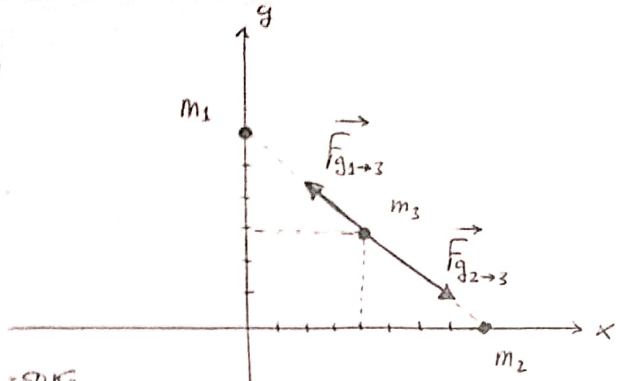
3. Dos masas, m_1 = 50 kg y m_2 = 100 kg, están situadas en los puntos A(0,6) y B(8,0) m, respectivamente.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre una masa m_3 = 20 kg situada en el punto P(4,3) m y calcule la fuerza resultante que actúa sobre ella. ¿Cuál es el valor del campo gravitatorio en este punto?

b) Determine el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria al trasladar la masa de 20 kg desde el punto (4,3) hasta el punto (0,0) m. Explique si ese valor del trabajo depende del camino seguido.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

③



$$\vec{F}_{g_{1\to3}} = -\frac{G m_1 m_3}{r_{13}^2}\,\hat{r}_{13}$$

$$\vec{F}_{g_{2\to3}} = -\frac{G m_2 m_3}{r_{23}^2}\,\hat{r}_{23}$$

$m_1 = 50$ Kg

$m_2 = 100$ Kg

$\hat{r}_{13}$, $\hat{r}_{23}$ vectores unitarios que van desde el cuerpo atrayente hasta el cuerpo atraído

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_{13} = +4\hat{i} - 3\hat{j} \text{ m} \\ |\vec{r}_{13}| = \sqrt{(+4)^2+(-3)^2} = 5 \text{ m}\end{array}\right\} \hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = +\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_{23} = -4\hat{i} + 3\hat{j} \text{ m} \\ |\vec{r}_{23}| = \sqrt{(-4)^2+(+3)^2} = 5 \text{m}\end{array}\right\} \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = -\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{g_{1\to3}} = -\frac{G m_1 m_3}{r_{13}^2}\,\hat{r}_{13} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{Kg}^2} \cdot 50 \text{Kg} \cdot 20 \text{Kg}}{(5\text{m})^2} \cdot \left(+\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}\right) \text{ N}$$

$$\Longrightarrow \vec{F}_{g_{1\to3}} = -2{,}13 \cdot 10^{-9}\,\hat{i} + 1{,}6 \cdot 10^{-9}\,\hat{j} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{g_{2\to3}} = -\frac{G m_2 m_3}{r_{23}^2}\,\hat{r}_{23} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{Kg}^2} \cdot 100 \text{Kg} \cdot 20 \text{Kg}}{(5\text{m})^2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}\right) \text{ N}$$

$$\Longrightarrow \vec{F}_{g_{2\to3}} = 4{,}27 \cdot 10^{-9}\,\hat{i} - 3{,}2 \cdot 10^{-9}\,\hat{j} \text{ N}$$

Principio superposición: $\vec{F}_{g\,tot} = \vec{F}_{g_{1\to3}} + \vec{F}_{g_{2\to3}}$

$$\vec{F}_{g\,Total} = (-2{,}13 \cdot 10^{-9}\hat{i} + 1{,}6 \cdot 10^{-9}\hat{j}) + (4{,}27 \cdot 10^{-9}\hat{i} - 3{,}2 \cdot 10^{-9}\hat{j}) = 2{,}14 \cdot 10^{-9}\hat{i} - 1{,}6 \cdot 10^{-9}\hat{j} \text{ N}$$

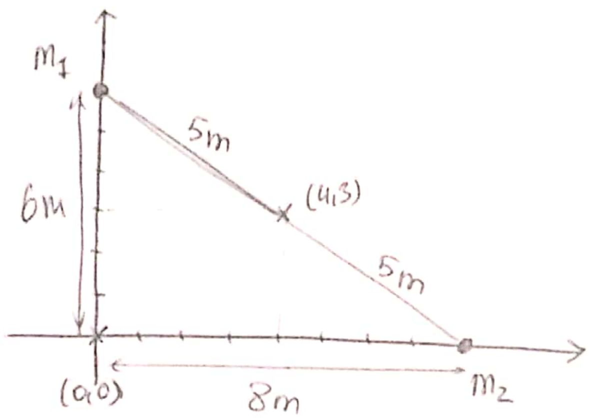
$$|\vec{F}_{g\,total}| = \sqrt{(2{,}14 \cdot 10^{-9})^2 + (-1{,}6 \cdot 10^{-9})^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

a) Como $\vec{F}_{g\,total(4,3)} = m_3 \cdot \vec{g}_{total(4,3)}$ despejando el vector campo gravitatorio; $\vec{g}_{total(4,3)} = \dfrac{\vec{F}_{g\,total(4,3)}}{m_3}$

$$\vec{g}_{Total(4,3)} = \frac{2'14 \cdot 10^{-9}\,\hat{\imath} - 1'6 \cdot 10^{-9}\,\hat{\jmath}\ N}{20\,Kg} = 1'07 \cdot 10^{-10}\,\hat{\imath} - 8 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath}\ N/Kg$$

$$|\vec{g}_{Total(4,3)}| = \sqrt{(1'07 \cdot 10^{-10})^2 + (-8 \cdot 10^{-11})^2} = \cancel{1'35} \cdot 10^{-11}\ N/Kg$$

b)



Principio superposición

$$V_{g(4,3)} = V_{g_1}(4,3) + V_{g_2}(4,3)$$

$$V_{g(0,0)} = V_{g_1}(0,0) + V_{g_2}(0,0)$$

$$V_g(4,3) = \left(-\frac{Gm_1}{5m}\right) + \left(-\frac{Gm_2}{5m}\right) = -\frac{6'67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot 50\,Kg}{5\,m} - \frac{6'67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot 100\,Kg}{5\,m}$$

$$\Longrightarrow V_g(4,3) = -2 \cdot 10^{-9}\ J/Kg$$

$$V_g(0,0) = \left(-\frac{Gm_1}{6m}\right) + \left(-\frac{Gm_2}{8m}\right) = -\frac{6'67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot 50\,Kg}{6\,m} - \frac{6'67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot 100\,Kg}{8\,m}$$

$$\Longrightarrow V_g(0,0) = -1'39 \cdot 10^{-9}\ J/Kg$$

$$W_{\vec{F}_g} = -m \cdot \Delta V_g = -m \cdot [V_g(0,0) - V_g(4,3)] = -20\,Kg \cdot \left[\left(-1'39 \cdot 10^{-9}\,\frac{J}{Kg}\right) - \left(-2 \cdot 10^{-9}\,\frac{J}{Kg}\right)\right]$$

El trabajo debe realizarlo una fuerza externa

$$W_{\vec{F}_g} = -1'22 \cdot 10^{-8}\ J$$

No depende del camino seguido porque $\vec{F}_g$ es conservativa y el $W_{\vec{F}_g}$ sólo depende de la posición inicial y final.

1. a) Enuncie las leyes de Kepler.

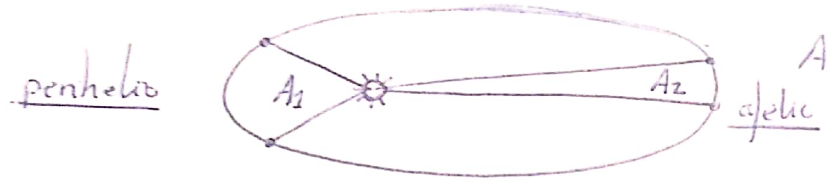
b) Dos satélites A y B se encuentran en órbitas circulares alrededor de la Tierra, estando A al doble de distancia que B del centro de la Tierra. ¿Qué relación guardan sus respectivos periodos orbitales?

1A

a) Dichas leyes explican el movimiento de los planetas.

1ª Ley de Kepler (1609): los planetas se mueven alrededor del Sol en una trayectoria elíptica, de modo que el Sol se encuentra situado en uno de los focos de la elipse (las elipses son de poca excentricidad)

2ª Ley de Kepler (1609): El vector de posición de un planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



$A_1 = A_2$

Como consecuencia un planeta se mueve más rápido cuanto más cerca del Sol se encuentra

3ª Ley de Kepler (1619): El cuadrado del periodo de revolución "T" de cualquier planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media "r_M" del planeta al Sol

$$T^2 = K \cdot r_M^3$$

K constante de proporcionalidad para todos los planetas igual

Para cualquier pareja de planetas: $\dfrac{T_1^2}{r_{M_1}^3} = \dfrac{T_2^2}{r_{M_2}^3}$

b) Sobre un satélite en órbita, actúa la fuerza gravitatoria que se comporta como fuerza centrípeta al describir un movimiento circular alrededor de la Tierra

3. Un cuerpo de 200 kg situado a 5000 km de altura sobre la superficie terrestre cae a la Tierra.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar suponiendo que el cuerpo partió del reposo y calcule con qué velocidad llega a la superficie.

b) ¿A qué altura debe estar el cuerpo para que su peso se reduzca a la tercera parte de su valor en la superficie terrestre?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km