

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
TEMA 4: FUNCIONES**

- Junio, Ejercicio B3
- Junio, Ejercicio B4
- Septiembre, Ejercicio B3
- Septiembre, Ejercicio B4

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) (1 Punto) Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

b) (0'75 puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) (0'75 Puntos) Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\text{Extremo relativo en } (2, 36) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 36 \Rightarrow 8a + 2b + 4 = 36 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = -2$; $b = 24$

b) Calculamos la derivada de la función $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2} \mid\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, - \mid\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty \mid\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo:

$$\left(-\frac{1}{2}, - \mid\right).$$

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 5 \mid\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, 3 \mid\right)$.

c) Calculamos la integral

$$F(x) = \int (4x^3 - 3x + 4) dx = 4 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + 4x + C = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$$

Como sabemos que $F(2) = 10$, entonces:

$$F(2) = 10 \Rightarrow 16 - 6 + 8 + C = 10 \Rightarrow C = -8$$

Luego, la función es: $F(x) = x^4 - \frac{3x^2}{2} + 4x - 8$

a) (1'2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5)}{1 - x^2}$$

b) (1'3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = 2 \cdot (-5 + x^2) \cdot 2x \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{3x} \cdot (-5 + x^2)^2 = e^{3x} \cdot (-5 + x^2) [3x^2 + 4x - 15]$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2}{x^3 - 5} \cdot (1 - x^2) - (-2x) \cdot \ln(x^3 - 5)}{(1 - x^2)^2}$$

b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 3$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre -1 y 3 , y vemos cuál tiene mayor valor.

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow h(0) = 3$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Por lo tanto, la función que va por encima es $h(x) = -x^2 + 2x + 3$. Luego el área vendrá dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (0)] dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{32}{3} u^2 \end{aligned}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} a \frac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ a b e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) (0'75 puntos) Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) (0'5 puntos) Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f , si existen.

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 + \frac{a}{x-1} = 2 - a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + b e^x) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 2 \text{ Por ser continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ b e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y como es derivable

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = - \\ f'(0^+) = b \end{array} \right\} \Rightarrow -a = b \text{ Derivable en } x = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left. \begin{array}{l} 2a + b \\ a = b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 ; b = -2$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ -2 e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y la igualamos a cero

Vemos que no sale ningún valor.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-
Función	D	D

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Luego es estrictamente decreciente en \mathbb{R} y no tiene máximos ni mínimos.

c) Calculamos las asíntotas.

Para $x < 0$

En la función $2 + \frac{2}{x-1}$ no hay ningún valor que anule el denominador, luego no tiene

asíntota vertical.

Calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{2}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal. Al tener horizontal, no tiene oblicua.

Para $x > 0$

No tiene asíntota vertical

Calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 2e^x = 2 - \infty = -\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

Calculamos la asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 2e^x}{x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow L'Hopital = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2^x}{1} = -\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

b) (0'75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

c) Calcule $\int_2^3 f(x) dx$

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-x + 2$ es continua y derivable en su dominio. La función $-x^2 + 6x - 8$ es continua y derivable en su dominio. La función $\frac{x-3}{x}$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 2$ y $x = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 6x - 8) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x^2 + 6x - 8) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x-3}{x} \right) = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua ni derivable en } x = 4$$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 2 \\ -2x + 6 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{3}{x^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 2 \end{array} \right\} f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 2$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	+
Función	D	C	D	C

La función es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ y creciente en $(2, 3) \cup (4, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo (pico) en $(2, 0)$ y un máximo relativo en $(3, 1)$.

c) Calculamos la integral

$$\int_2^3 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 8x \right]_2^3 = \left(-\frac{27}{3} + 27 - 24 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16 \right) = \frac{2}{3}$$