

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Resolverlo para el caso $m = 1$ (1 punto)

a) El sistema solo puede ser Compatible Indeterminado e Incompatible ya que tiene menos ecuaciones que incógnitas

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \rightarrow \forall m \in R \rightarrow \text{rang}(A) = 2 < \text{Número de incógnitas} \rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

b)

Si $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -y + 3z = 2 \rightarrow y = -2 + 3z \rightarrow x - 2 + 3z - z = 1 \rightarrow x = 3 - 2z$$

$$\text{Solución} \rightarrow (x, y, z) = (3 - 2\alpha, -2 + 3\alpha, \alpha)$$

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1, 1, a)$ y $\vec{v} = (1, -1, a)$ Calcular a para que sean perpendiculares. (0,5 puntos)

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1, 2, 3)$ y $\vec{q} = (1, -2, -3)$ (1,5 puntos)

a) Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (1, 1, a) \cdot (1, -1, a) = 0 \rightarrow 1 - 1 + a^2 = 0 \rightarrow a = 0$$

b) El vector \vec{w} perpendicular a dos vectores es el resultante del producto vectorial de ambos vectores. El vector unitario se halla dividiendo cada uno de sus componentes entre su módulo.

$$\vec{w} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 6\vec{i} + 3\vec{j} = 6\vec{j} - 4\vec{k} \rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\vec{w} = (0, 6, -4) \rightarrow \left| \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \right| = \left(0, \frac{6}{2\sqrt{13}}, -\frac{4}{2\sqrt{13}} \right) = \left(0, \frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13} \right)$$

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a)** Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**
b) Probar que no posee extremo relativo en 0. **(0,6 puntos)**

a)

Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2.

Sabemos que si $f'(b) = 0$ y $f''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $f(x)$.
 Análogamente si $f'(b) = 0$ y $f''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $f(x)$.

Como $x = -1 < 0$, nuestra función es $f(x) = -x^2 - 2x$.

Tenemos $f'(x) = -2x - 2$, $f''(x) = -2$.

Como $f'(-1) = -2(-1) - 2 = 0$ y $f''(-1) = -2 < 0$, **efectivamente $x = -1$ es un máximo relativo de $f(x)$.**

Como $x = 2 > 0$, nuestra función es $f(x) = x^2 - 4x$.

Tenemos $f'(x) = 2x - 4$, $f''(x) = 2$.

Como $f'(2) = 2(2) - 4 = 0$ y $f''(2) = 2 > 0$, **efectivamente $x = 2$ es un mínimo relativo de $f(x)$.**

b)

Probar que no posee extremo relativo en 0.

Aunque la función es continua en $x = 0$, no es derivable en $x = 0$. Estudiamos su monotonía en $x = 0$ y veremos que $x = 0$ no es un máximo relativo.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vemos la continuidad de la derivada.

Como $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - 2) = -2 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $x = 0^-$.

Como $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 4) = -4 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $x = 0^+$, por tanto **en $x = 0$ la función es estrictamente decreciente y no tiene un máximo relativo en $x = 0$.**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)}$ (1 punto)

b) Calcular a siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1. (1 punto)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)}$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H).- (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$, con lo cual tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)} = \left\{ \frac{\text{sen}(0)}{e^0 - \cos(0)} = \frac{0}{0}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{e^x + \text{sen}(x)} = \frac{\cos(0)}{e^0 - \text{sen}(0)} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

b)

Calcular a siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1.

Para calcular el área entre dos funciones tenemos que calcular los límites de integración, igualando las funciones.

De $f(x) = g(x)$ tenemos $x = ax \rightarrow x - ax = 0 = x(1 - a)$, de donde $x = 0$ y $a = 1$, lo cual es absurdo porque nos dicen que $a > 1$, luego **no existe ningún valor de a que cumpla las condiciones del enunciado.**

E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37°C y desviación típica $0,5^\circ\text{C}$.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que $36,5^\circ\text{C}$. (1 punto)

Se trata de una distribución normal $N(37,0'5)$. Calculemos las probabilidades pedidas:

a)

Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C .

$$\text{Me piden } p(36 \leq X \leq 38) = p\left(\frac{36 - 37}{0'5} \leq Z \leq \frac{38 - 37}{0'5}\right) = p(-2 < Z \leq 2) =$$

$$= p(Z \leq 2) - p(Z \leq -2) = p(Z \leq 2) - [1 - p(Z \leq 2)] = 2 \cdot p(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0'9772 - 1 = 0'9544.$$

b)

Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que $36,5^\circ\text{C}$.

$$\text{Me piden } p(X \leq 36,5) = p\left(Z \leq \frac{36,5 - 37}{0'5}\right) = p(Z \leq -1) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587.$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N **(2 puntos)**

1) Una matriz es invertible cuando el su matriz no es nula

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix}$$

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } N^{-1} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|} \cdot \text{adj } N^t \rightarrow N^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{adj } N^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AM = N^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x-y = 2 \\ -x+y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 3 \rightarrow -3 + y = 1 \rightarrow y = 4$$

E2.- Hallar **a** y **b** para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Para que sean perpendiculares su producto escalar es nulo

$$(a, -1, 2) \cdot (1, b, -2) = 0 \rightarrow a - b - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -1 & 2 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + ab\vec{k} + \vec{k} - 2b\vec{i} + 2a\vec{j} = (2 - 2b)\vec{i} + (2 + 2a)\vec{j} + (1 + ab)\vec{k} \rightarrow$$

$$(2 - 2b, 2 + 2a, 1 + ab) \rightarrow 2 - 2b = 2 + 2a \rightarrow a = -b \rightarrow a + a - 4 = 0 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = -4$$

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \sin x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

a) Teorema de Rolle

Sea **f(x)** una función continua en **[a, b]**, derivable en **(a, b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f'(c) = 0**

b) Se cumple en $x = 0$ ya que $f(0) = 2 \cdot 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

Además es una función continua en todo el campo de los números reales sin máximos y mínimos relativos en ya que $f'(x) = 2 - \cos x \rightarrow \text{Si } f'(x) = 0 \rightarrow 2 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 2 \rightarrow \text{Sin solución}$

Continuación del Problema E.3 de la opción B

b) Continuación

Como además $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{cases}$ la función es creciente en todo su recorrido por lo tanto el único punto de corte de la función con el eje OX es en $x = 0$

E4.- Determinínense los valores de **a** y de **b** para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ es continua y verifica que } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \text{ (2 puntos)}$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a + \cos 0 = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 - 2b \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow a + 1 = 1 \rightarrow a = 0$$

$$\int_0^1 (x^2 - 2bx + 1) dx = \frac{1}{3} \rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot bx^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}1^3 - b \cdot 1 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - b \cdot 0 + 0 \right) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} - b + 1 = \frac{1}{3} \rightarrow -b + 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: **A** = "tener menos de 45 años", **B** = "tener entre 45 y 55 años", **C** = "tener más de 55 años" e **I** = "hablar inglés":

a) Calcular **P(I / A)**, **P(I / B)**, **P(I / C)** (0,9 puntos)

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? (1,1 puntos)

Tenemos conductores $50 + 30 + 20 = 100$, luego $p(A) = 50/100 = 0'5$, $p(B) = 30/100 = 0'3$ y $p(C) = 0'2$.
Tenemos que hablan inglés $15 + 6 + 3 = 24$.

a)

Calcular **P(I / A)**, **P(I / B)** y **P(I / C)**

Las probabilidades que piden nos las dan directamente:

$$P(I / A) = 15/50 = 0'3.$$

$$P(I / B) = 6/30 = 0'2.$$

$$P(I / C) = 3/20 = 0'15.$$

b)

Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años?

Me piden **p(A/I)**. Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(A/I) = \frac{p(A \cap I)}{p(I)} = \frac{p(A) \cdot p(I/A)}{p(I)} = \frac{p(A) \cdot p(I/A)}{p(A) \cdot p(I/A) + p(B) \cdot p(I/B) + p(C) \cdot p(I/C)} =$$

$$= \frac{(0'5) \cdot (0'3)}{(0'5) \cdot (0'3) + (0'3) \cdot (0'2) + p(0'2) \cdot (0'15)} = 5/8 = 0'625.$$