OPCIÓN A

E1.- Dado el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro **m (1 punto)**
b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso **m = 2**. **(1 punto)**

1)

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 2-2m \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{m} \\ 0 & 2-2\mathrm{m} \end{vmatrix} = -(2-2\mathrm{m}) = -2(m-1) \rightarrow$$

$$Si\ |\mathrm{A}| = 0 \rightarrow -2(m-1) = 0 \rightarrow \mathrm{m} - 1 = 0 \rightarrow \mathrm{m} = 1 \rightarrow$$

$$\forall m \in R - \{1\} \rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$\boldsymbol{S}\mathrm{i\ m} = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ \left(A - B\right) = 2 \rightarrow Sistema\ Incompatible$$

2)

Si **m = 2**$\rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow -2z = -2 \rightarrow z = 1 \rightarrow -y - 4 = -5 \rightarrow y = 1 \rightarrow x + 1 + 2 = 4 \rightarrow \mathrm{x} = 1$$

$$\boldsymbol{Soluci}ó\boldsymbol{n} \rightarrow (\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{1})$$

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto A (1 , 2 ,1). **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto B **(2 , 1 , 2)** y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$

a) El plano π queda determinado por el vector director de la recta, por el vector AR, siendo R un punto cualquiera de la recta (tomamos el indicado en su ecuación) y por el vector RG, siendo G el punto generador del plano; los tres vectores son coplanarios y su producto mixto es nulo ya que el volumen que determinan es cero

Siendo R **(1 , 1 , 1)** $\begin{cases} \overrightarrow{RA} = (1, \quad 2, \quad 1) - (1, \quad 1, \quad 1) = (0, \quad 1, \quad 0) \\ \overrightarrow{RG} = (x, \quad y, \quad z) - (1, \quad 1, \quad 1) = (x-1, \quad y-1, \quad z-1) \rightarrow \\ \overrightarrow{v_r} = (2, \quad 3, \quad 2) \end{cases}$

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \rightarrow 2x - 2z = 0 \rightarrow \pi \equiv x - z = 0$$

Continuación del ejercicio E.2 de la opción A

2) El vector director de la recta buscada **t** es el producto vectorial de los dos vectores de las rectas ya que es perpendicular a ambas

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{s_1}} = (2\,,\quad 2\,,\quad 2) \equiv (1\,,\quad 1\,,\quad 1) \\ \overrightarrow{v_{s_2}} \equiv (-1\,,\quad 3\,,\quad 2) \end{cases} \to \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{s_1}} \times \overrightarrow{v_{s_2}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} + \vec{k} - 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_r} = -\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k} \to \overrightarrow{v_r} = (-1\,,\quad -3\,,\quad 4) = (1\,,\quad 3\,,\quad -4) \to \begin{cases} x = 2 + \gamma \\ y = 1 + 3\gamma \\ z = 2 - 4\gamma \end{cases}$$

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ para $x \in R$

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo [−2,2]. **(1 punto)**

1) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) \to Creciente \to f'(x) > 0 \to$

$$x^2 + x - 2 = 0 \to \Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 9 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1} \to \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$6(x^2 + x - 2) > 0 \to 6(x-1)(x+2) > 0 \to \begin{cases} 6 > 0 \to \forall X \in R \\ x - 1 > 0 \to x > 1 \\ x + 2 > 0 \to x > -2 \end{cases}$$

$-\infty$	**- 2**	**1**	∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > - 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \boldsymbol{R}\ /\ (x < -2) \cup (x > 1)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \boldsymbol{R}\ /\ -2 < x < 1$

Máximo relativo en $\boldsymbol{x = -2} \to f(-2) = 2.(-2)^3 + 3.(-2)^2 - 12.(-2) = 20$ De crecimiento pasa a decrecimiento

Máximo relativo en $\boldsymbol{x = 1} \to f(1) = 2.1^3 + 3.1^2 - 12.1 = -7$ De decrecimiento pasa a crecimiento

2) Estudiaremos los valores $f(-2)\ y\ f(-2)$ y los compararemos con el máximo y mínimo relativo que hemos calculado

$$\begin{cases} f(-2) = 20 \\ f(-2) = 2.2^3 + 3.2^2 - 12.2 = 4 > -7 \end{cases} \to \begin{cases} Máximo\ absoluto\ en\ x = -2 \\ Míimo\ absoluto\ en\ x = 1 \end{cases}$$

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{c\,os\,(x)-1}{x\,sen\,(x)}$ **(1 punto)**
b) Calcular el área encerrada por las gráficas de f(x) = 4x y de g(x) = x^3 en el intervalo [0,2], probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$ **(1 punto)**
a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\,sen\,(x)}=\frac{\cos(0)-1}{0.sen\,(0)}=\frac{1-1}{0.0}=\frac{0}{0.}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,(x)}{sen\,(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\frac{-sen\,(0)}{sen\,(0)+0.\cos(0)}=-\frac{0}{0+0.1}=-\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen\,(x)}=$$

$$=\frac{-\cos(0)}{2\cos(0)-0.sen\,(x0)}=\frac{-1}{2.1+0.0}=-\frac{1}{2}$$

b)
Son dos funciones continuas en todo el campo de los números reales y como

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(0)=4.0=0} \\ \boldsymbol{g(0)=0^3=0} \end{cases} \boldsymbol{y} \begin{cases} \boldsymbol{f(2)=4.2=8} \\ \boldsymbol{g(0)=2^3=8} \end{cases} \to x=1\in[0,2]\to \begin{cases} \boldsymbol{f(1)=4.1=4} \\ \boldsymbol{g(0)=1^3=1} \end{cases} \to \boldsymbol{f(x)\geq g(x)}$$

Puntos de corte entre ecuaciones $\boldsymbol{x^3=4x\to(x^2-4)x=0\to x(x-2)(x-2)=0\to \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}\to}$

$$\boldsymbol{A=\int_0^2 4x\,dx-\int_0^2 x^3\,dx=4.\frac{1}{2}.[x^2]_0^2-\frac{1}{4}.[x^4]_0^2=2.(2^2-0^2)-\frac{1}{4}.(2^4-0^4)=2.4-\frac{16}{4}=8-4=4\,u^2}$$

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.
a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**
b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

Se trata de una distribución normal N(6'5,2). Calculemos las probabilidades pedidas:
a)
Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos.

Me piden **p(X ≥ 8) =** 1 - p(X ≤ 8) = 1 - $p\left(Z \leq \frac{8 - 6'5}{2}\right)$ = 1 - p(Z ≤ 0'75) = 1 – 0'7734 **= 0'2266.**

b)
¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos?

Sabemos que número de alumnos = total de alumnos por la probabilidad.

Tenemos **p(X ≤ 5) =** $p\left(Z \leq \frac{5 - 6'5}{2}\right)$ = p(Z ≤ -0'75) = 1 - p(Z ≤ 0'75) = 1 - 0'7734 **= 0'2266**.

Los alumnos que obtuvieron notas menor que 5 son 500· p(X ≤ 5) = 500·0'2266 **= 113'3, es decir 113 alumnos.**

OPCIÓN B

E1.- a) Encontrar los valores de **k** para que la matriz A= $\begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible.

(1 punto)

b) Encontrar la inversa de A para k = 2 **(1 punto)**

1) Una matriz es invertible cuando el su matriz no es nula

$$|A| = \begin{vmatrix} k-1+2 & 2 & 0 \\ -1 & k-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ -1 & k-2 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2)+2 = k^2-2k+k-2+2$$

$$|A| = k^2-k = k(k-1) \rightarrow Si\ |A| = 0 \rightarrow k(k-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases} \rightarrow \forall k \in R-\{0\,,1\} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow Existe\ A^{-1}$$

b)

Cuando $k = 2 \rightarrow |A| = 2(2-1) = 2 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ (A)^t \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow adj\ (A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E2.- Sean la recta $r = \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$

Encontrar **m** y **k** para que:

a) La recta **r** sea perpendicular al plano π**. (1 punto)**

b) La recta **r** esté contenida en el plano π**. (1 punto)**

1) Para que la recta y el plano sean perpendiculares sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (m\,,\ 2\,,\ 4) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\ 1\,,\ k) \end{cases} \rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \rightarrow \begin{cases} \frac{m}{1} = \frac{2}{1} \rightarrow m = 2 \\ \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \rightarrow 2k = 4 \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

2) Para que la recta este contenida en el plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo; además un punto **R** cualquiera de la recta r pertenecerá al plano

$$Siendo\ R(1\,,\ 1\,,\ 1) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (m\,,\ 2\,,\ 4) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\ 1\,,\ k) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{v_\pi} = 0 \rightarrow (m\,,\ 2\,,\ 4).(1\,,\ 1\,,\ k) = 0 \\ 1+1+k.1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2+4k = 0 \\ 2+k = 0 \rightarrow k = -2 \end{cases} \rightarrow m+2-8 = 0 \rightarrow m = 6$$

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que f(0) = 1, f (1) = 0 y que tiene extremos relativos en x = 0 y x =1. Calcular **a**, **b**, **c** y **d**

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \rightarrow a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 1 \rightarrow d = 1 \\ f(1) = 0 \rightarrow a.1^3 + b.1^2 + c.1 + 1 = 0 \rightarrow a + b + c = -1 \\ f'(0) = 0 \rightarrow 3a.0^2 + 2b.0 + c = 0 \rightarrow c = 0 \\ f'^{(1)} = 0 \rightarrow 3a.1^2 + 2b.1 = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + 0 = -1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = 3 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow -b = 3 \rightarrow b = -3 \rightarrow a - 3 = -1 \rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f(x) el eje OX y las rectas **x = 0** y **x =2** . **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{3 \cos x - 3}$ **(1 punto)**

a)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}\ no\ pertenece\ a\ [0\ ,\quad 1]$$

$$x = \frac{1}{2} \in [0\ ,\quad 1] \rightarrow f(x) = \frac{2.\left(\frac{1}{2}\right) + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{1 + 3}{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1} = \frac{4}{\frac{11}{4}} = \frac{16}{11} > 0 \rightarrow f(x) > 0$$

$$A = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x^2 + 3x + 1) + K$$

$$x^2 + 3x + 1 = t \rightarrow (2x + 3)\, dx = dt$$

$$\int_0^1 \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1}\, dx = [\ln(x^2 + 3x + 1)]_0^1 = \ln(1^2 + 3.1 + 1) - \ln(0^2 + 300 + 1) = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

b)

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{3 \cos x - 3} = \frac{0.\operatorname{sen} 0}{3 \cos 0 - 3} = \frac{0.0}{3.1 - 3} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Por\ L'Hopital} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{-3 \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 0 + 0 \cos 0}{-3 \operatorname{sen} 0} == \frac{0 + 0.1}{-3.0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Por\ L'Hopital} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x\ sen\ x}{-3 \cos x} =$$

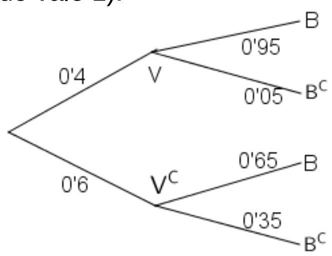
$$= \lim_{x\rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x\ sen\ x}{-3 \cos x} = \frac{2 \cos 0 - 0.sen\ 0}{-3 \cos 0} = \frac{2.1 - 0.0}{-3.1} = -\frac{2}{3}$$

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.
a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**
b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

Llamemos V, V^C, B y B^C, a los sucesos siguientes, "tener visor telescópico", "no tener visor telescópico", "hacer blanco" y "no hacer blanco", respectivamente.

Datos del problema p(V) = 4/10 = 0'4; p(V) = 6/10 = 0'6; p(B/V) = 0'95 ; p(B/V^C) = 0'65, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

p(hacer blanco) = p(B) = p(V).p(B/V) + p(V^C).p(B/V^C) =
= (0'4)·(0'95) + (0'6)·(0'65) **= 77/100 = 0'77**.
b)
Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él?

Calculamos **p(A/V) y p(A/V^C), y es la probabilidad mayor.**

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(V/B) = $\frac{p(V \cap B)}{p(B)} = \frac{p(V).p(B/V)}{p(B)} = \frac{(0'4)\cdot(0'95)}{0'77}$ **= 38/77 ≅ 0'4935**.

p(V^C/B) = $\frac{p(V^C \cap B)}{p(B)} = \frac{p(V^C).p(B/V^C)}{p(B)} = \frac{(0'6)\cdot(0'65)}{0'77}$ **= 39/77 ≅ 0'5065**.

Si ha hecho blanco es más probable que haya tirado sin visor telescópico