UNIDAD 12: Integrales indefinidas

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 300

1. Encuentra, en cada apartado, dos funciones cuyas derivadas sean las siguientes:

a) f(x) = $3x^2$ **c) f(x) = cos x**

b) f(x) = e^x **d) f(x) = $\frac{2}{x-1}$**

Un ejemplo de las funciones pedidas son:

a) F(x) = $x^3 + 5$; F(x) = $x^3 - 2/5$

b) F(x) = $e^x - 3$; F(x) = $e^x + \sqrt{2}$

c) F(x) = sen x + $\frac{1}{2}$; F(x) = sen x + π

d) F(x) = $2 \cdot \ln |x-1| + \frac{2}{5}$; F(x) = $2 \cdot \ln |x-1| - \sqrt{5}$

2. Una función *F(x) es primitiva de una función f(x) siempre que la derivada de F(x) sea f(x).*

Comprueba, en cada uno de los siguientes apartados, que la función F(x) es primitiva de f(x).

a) F(x) = arcsen 2x + $\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$ **; f(x) =** $\frac{4x}{(1+2x)\sqrt{1-4x^2}}$

b) F(x) = ln(1 – cosx) – ln(1 + cos x) + $\frac{3}{8}$ **; f(x) =** $\frac{2}{sen\ x}$

Se deriva la función F(x) y se obtiene f(x).

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 315

1. Número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{ con a, b } \in \text{ Z y primos entre sí.}$$

De esta igualdad obtenemos: $a = b\sqrt{3}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$.

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir $a = 3m$ con $m \in Z$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$(3m)^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 9m^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 = b^2$

Como b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también los es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplos de 3. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre si. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Implicación lógica. Demuestra que si P $\Rightarrow$ Q, entonces no Q $\Rightarrow$ no P.

Tiene que ser no P, pues si fuera P entonces sería Q, y como dice no Q, no puede ser P.

Veamos que las tablas de verdad de ambas proposiciones coinciden:

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	no Q	no P	no Q $\Rightarrow$ no P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Es una ley lógica $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (no\ Q \Rightarrow no\ P)$, denominada "contraposición".

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 317

1. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (3x-1)\ln(x+2)\,dx$ **b)** $\int \sqrt{\frac{3}{1+3x}}\,dx$ **c)** $\int \frac{2x^2+3x-2}{x^2-7x+10}\,dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos la solución de cada una de estas integrales indefinidas que vemos en las imágenes siguientes:

$$\int (3\cdot x-1)\cdot \ln(x+2) \rightarrow -6\cdot \ln(|x+2|)+\left(\left(\frac{3\cdot x^2}{2}-x-2\right)\cdot \ln(x+2)-\frac{3\cdot x^2}{4}\right)+4\cdot x$$

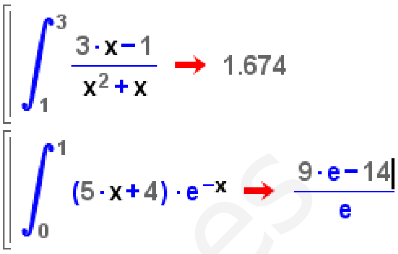
$$\int \sqrt{\frac{3}{1+3\cdot x}} \rightarrow \frac{6\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3\cdot x+1}}$$

$$\int \frac{2\cdot x^2+3\cdot x-2}{x^2-7\cdot x+10} \rightarrow 21\cdot \ln(|-x+5|)-4\cdot \ln(|x-2|)+2\cdot x$$

2. Halla las siguientes integrales definidas:

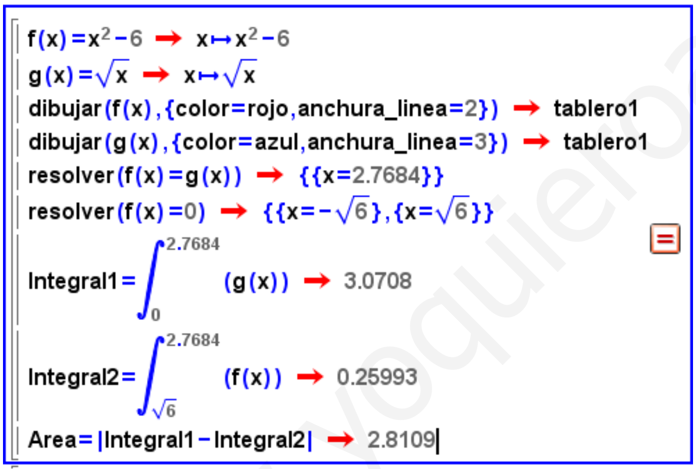
a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{x^2+x}\,dx$ **b)** $\int_0^1 (5x+4)\cdot e^{-x}\,dx$

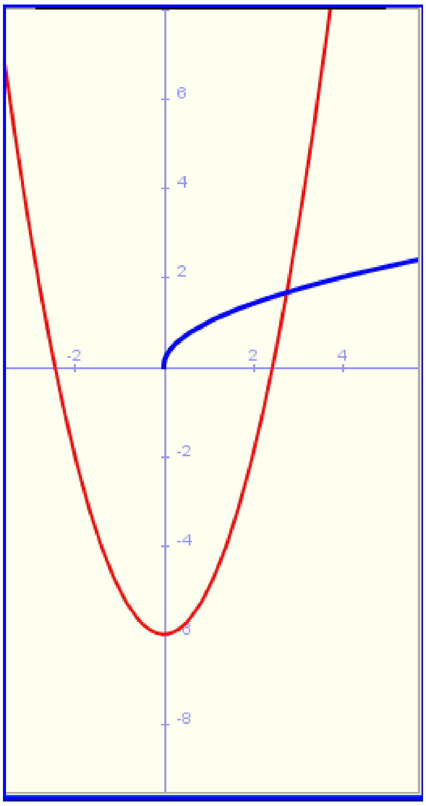
Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos el resultado de cada una de estas integrales definidas que vemos en la imagen siguiente:



3. Calcula el área del recinto, del primer cuadrante, limitado por las gráficas de las funciones f(x) = x^2 - 6; g(x) = $\sqrt{x}$ y el eje OX.

De la misma forma que hemos hecho en la actividad desarrollada resolvemos esta nueva actividad como vemos en la siguiente imagen:





ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 320

1. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int (6x^2 - 5x + 7)\, dx$

b) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2\right) dx$

d) $\int \left(\frac{5x^2 - 7\sqrt{x^3} - 9}{x}\right) dx$

e) $\int 3x\,(2x+5)^2\, dx$

f) $\int (1-4x)^3\, dx$

g) $\int (6x^2 - 5)^8 \cdot x\, dx$

h) $\int 7x^2 \sqrt{x^3+2}\, dx$

i) $\int \frac{(3\sqrt{x} - 2)^4}{4\sqrt{x}}\, dx$

j) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\, dx$

k) $\int \frac{12x - 3}{4x^2 - 2x + 3}\, dx$

l) $\int e^{3x}\, dx$

m) $\int x \cdot 7^{5x^2}\, dx$

n) $\int 3 \cdot sen\ 6x\, dx$

o) $\int \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

p) $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{\cos^2 x^3}\right) dx$

q) $\int \frac{5}{4+16x^2}\, dx$

r) $\int \frac{6}{\sqrt{9-2x^2}}\, dx$

s) $\int \frac{4 \cdot \cos 2x}{3 - sen 2x}\, dx$

t) $\int \frac{3x}{(x^2+7)^5}\, dx$

u) $\int \cos^2 3x \cdot sen\ 3x\, dx$

w) $\int \frac{2}{3x \ln x}\, dx$

y) $\int \frac{5 \cdot senx}{\sqrt{7 - 4\cos^2 x}}\, dx$

z) $\int 6x \cdot tg\,(x^2+3)\, dx$

Las funciones primitivas son:

a) $\int (6x^2 - 5x + 7)\, dx = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$

b) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{2}{x} + C$

c) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2\right) dx = 3\sqrt{x} + \frac{x^5}{40} - 2x + C$

d) $\int \left(\frac{5x^2 - 7\sqrt{x^3} - 9}{x}\right) dx = \frac{5}{2}x^2 + \frac{14\sqrt{x^3}}{3} - 9 \cdot \ln|x| + C$

e) $\int 3x\,(2x+5)^2\, dx = 3x^4 + 20x^3 + \frac{75}{2}x^2 + C$

f) $\int (1-4x)^3\ dx = -\dfrac{(1-4x)^4}{16} + C$

g) $\int (6x^2-5)^8 \cdot x\,dx = \dfrac{(6x^2-5)^9}{108} + C$

h) $\int 7x^2\ \sqrt{x^3+2}\ dx = \dfrac{14\sqrt{(x^3+2)^3}}{9} + C$

i) $\int \dfrac{(3\sqrt{x}-2)^4}{4\sqrt{x}}\ dx = \dfrac{(3\sqrt{x}-2)^5}{30} + C$

j) $\int \dfrac{4x^2}{2x^3+5}\ dx = \dfrac{2}{3}\ln\left|2x^3+5\right| + C$

k) $\int \dfrac{12x-3}{4x^2-2x+3}\ dx = \dfrac{3}{2}\ln\left|4x^2-2x+3\right| + C$

l) $\int e^{3x}\ dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} +$

m) $\int x\cdot 7^{5x^2}\ dx = \dfrac{1}{10\cdot\ln 7}\cdot 7^{5x^2} + C$

n) $\int 3\cdot sen\ 6x\ \ dx = -\dfrac{1}{2}\cos 6x + C$

o) $\int \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)dx = 4\ sen\left(\dfrac{x}{4}\right) + C$

p) $\int\left(e^{-2x} + \dfrac{5x^2}{\cos^2 x^3}\right)dx = -\dfrac{1}{2}\cdot e^{-2x} + \dfrac{5}{3}\,tg\ x^3 + C$

q) $\int \dfrac{5}{4+16x^2}dx = \dfrac{5}{8}\ arctg\,(2x) + C$

r) $\int \dfrac{6}{\sqrt{9-2x^2}}dx = 3\sqrt{2}\cdot arcsen\left(\dfrac{\sqrt{2}\,x}{3}\right) + C$

s) $\int \dfrac{4\cdot\cos 2x}{3-sen2x}\ dx = -2\cdot\ln\left|3-sen\ 2x\right| + C$

t) $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx = \frac{-3}{8\cdot\left(x^2+7\right)^4}+C$

u) $\int \cos^2 3x \cdot sen\ 3x\,dx = -\frac{1}{9}\cos^3(3x)+C$

w) $\int \frac{2}{3x\ln x}\,dx = \frac{2}{3}\ln\left|\ln x\right|+C$

y) $\int \frac{5\cdot senx}{\sqrt{7-4\cos^2 x}}\,dx = -\frac{5}{2}\,arcsen\left(\frac{2\cos x}{\sqrt{7}}\right)+C$

z) $\int 6x\cdot tg\left(x^2+3\right)dx = -3\cdot\ln\left|\cos\left(x^2+3\right)\right|+C$

2. Halla una función f(x) de la que sabemos que f (1) = f ´ (1) = 1 y f ´´ (x) = x.

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:

F ´ (x) = $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C \Rightarrow$ f(x) = $\int\left(\frac{x^2}{2}+C\right)dx = \frac{x^3}{6}+Cx+D$

Como f (1) = 1 $\Rightarrow 1 = \frac{1}{6}+C+D$ y como f ´ (1) = 1 $\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}+C$.

De estas dos igualdades obtenemos C = $\frac{1}{2}$; D = $\frac{1}{3}$ y la función buscada es f(x) = $\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$

3. Halla dos primitivas de cada una de estas funciones:

a) $\int \frac{e^{2x}}{4-e^{2x}}\,dx$ **b)** $\int \frac{(2x-3)^2}{x}\,dx$ **c)** $\int \frac{4x-5}{1+9x^2}\,dx$

Las primitivas pedidas pueden ser:

a) F(x) = $\int \frac{e^{2x}}{4-e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|4-e^{2x}\right|+1$; F(x) = $\int \frac{e^{2x}}{4-e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|4-e^{2x}\right|$

b) F(x) = $\int \frac{(2x-3)^2}{x}dx = 2x^2-12x+9\ln|x|+6$;

F(x) = $\int \frac{(2x-3)^2}{x}dx = 2x^2-12x+9\ln|x|+\frac{7}{3}$

c) F(x) = $\int \frac{4x-5}{1+9x^2}dx = \frac{2}{9}\ln\left(1+9x^2\right)-\frac{5}{3}\,arctg\,(3x)-2$

F(x) = $\int \frac{4x-5}{1+9x^2}\,dx = \frac{2}{9}\ \ln\left(1+9x^2\right) - \frac{5}{3}\,arctg\ (3x) - \sqrt[4]{3}$

4. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int 3x \cdot e^{-x}\ dx$

b) $\int (2-5x) \cdot sen 2x\, dx$

c) $\int 14x^2 \cdot 7^{2x}\ dx$

d) $\int e^{2x} \cdot \cos x\ dx$

e) $\int 4x \cdot \ln x^2\ dx$

f) $\int 5\ \ln x\ \ dx$

g) $\int arctg\ 2x\ dx$

h) $\int 2^{3x} \cdot sen\,3x\ \ dx$

i) $\int x \cdot \ln^2\ x\ \ dx$

En cada una de las siguientes integrales utilizamos la fórmula de la integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

a) $\int 3x \cdot e^{-x}\ dx = -3x \cdot e^{-x} - \int -3\ e^{-x}\ dx = -3x \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} + C$

b) $\int (2-5x) \cdot sen 2x\, dx = -\frac{2-5x}{2} \cdot \cos 2x - \int \frac{5}{2} \cos 2x\ dx = -\frac{2-5x}{2} \cos\ 2x - \frac{5}{4}\, sen\,2x + C$

c) $\int 14x^2 \cdot 7^{2x}\ dx = \frac{7x^2 \cdot 7^{2x}}{\ln 7} - \frac{7}{\ln 7}\int x \cdot 7^{2x}\ dx = \frac{7x^2 \cdot 7^{2x}}{\ln 7} - \frac{7x \cdot 7^{2x}}{\ln^2 7} + \frac{7 \cdot 7^{2x}}{2 \cdot \ln^3 7} + C$

d) Esta es una integral cíclica, pues al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a salir la misma integral:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\ dx = e^{2x} \cdot \text{sen } x - \int 2e^{2x} \cdot sen\ x\ dx = e^{2x} \cdot \text{sen } x + 2e^{2x} \cdot \cos x - \int 4e^{2x} \cdot \cos x\ dx$$

Llamando I a la integral inicial obtenemos: I = e^{2x} · sen x + $2e^{2x}$ · cos x – 4 I. De modo que despejando I:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\ dx = \frac{e^{2x} \cdot senx + 2e^{2x} \cdot \cos x}{5} + C$$

e) $\int 4x \cdot \ln x^2\ dx = 2x^2 \cdot \ln^2 x - \int \frac{2}{x} \cdot\ 2x^2\ dx = 2x^2 \cdot \ln x^2 - 2x^2 + C$

f) $\int 5\ \ln x\ \ dx$ = 5x · ln x – 5x + C

g) $\int arctg\ 2x\ dx = x \cdot arctg\ 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2}\ dx = x \cdot arctg\ 2x - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C$

h) $\int 2^{3x} \cdot sen 3x \; dx = -\frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \cos 3x + \int 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \cos 3x \; dx =$

$-\frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot sen\ 3x - \int 2^{3x} \cdot \ln^2 2 \cdot sen\ 3x \; dx$

Llamando I a la integral inicial y despejando I:

$$\int 2^{3x} \cdot sen 3x \; dx = \frac{-2^{3x} \cdot \cos 3x + 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot sen 3x}{3 \cdot (1 + \ln^2 2)} + C$$

i) $\int x \cdot \ln^2 x \; dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \; dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$

5. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx$

b) $\int \frac{2x^2 + 3x + 8}{(x+2)(x^2+1)} dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

d) $\int \frac{2x^2 + 13x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$

e) $\int \frac{2x^3 + 8x - 4}{x^2 + 4} dx$

f) $\int \frac{2 + 7x - 5x^2}{4x^3 + 4x^2 + x + 1} dx$

g) $\int \frac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx$

h) $\int \frac{x^3 + 6}{x^2 - 4} dx$

i) $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$

a) $\int \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = -2 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C$

b) $\int \frac{2x^2 + 3x + 8}{(x+2)(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx = 2 \ln|x+2| + 3\ arctg\ x + C$

c) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$

d) $\int \frac{2x^2 + 13x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4} dx =$

$= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x+2)^2} dx + \int \frac{-1}{x+2} dx = 3 \ln|x-1| - \frac{2}{x+2} - \ln|x+2| + C$

e) $\int \frac{2x^3 + 8x - 4}{x^2 + 4} dx = \int 2x \; dx + \int \frac{-4}{x^2+4} dx = x^2 - 2\, arctg \left(\frac{x}{2}\right) + C$

f) $$\int \frac{2+7x-5x^2}{4x^3+4x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{3x+4}{4x^2+1}\,dx = -2\ln|x+1| + \int \frac{3x}{4x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= -2\ln|x+1| + \frac{3}{8}\ln\left(4x^2+1\right) + 2\,arctg\,(2x) + C$$

g) $$\int \frac{2x^2-10}{x^2-x-2}dx = \int \frac{2\left(x^2-x-2\right)+2x-6}{x^2-x-2}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{2x-6}{x^2-x-2}\,dx =$$

$$= 2x + \int \frac{8/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-2/3}{x-2}\,dx = 2x + \frac{8}{3}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\ln|x-2| + C$$

h) $$\int \frac{x^3+6}{x^2-4}dx = \int \frac{x\left(x^2-4\right)+4x+6}{x^2-4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{4x+6}{x^2-4}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{7}{2}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$

i) $$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx = \int \frac{\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)+81}{x^2+9}\,dx = \int \left(x^2-9\right)dx + \int \frac{81}{x^2+9}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 9x + 27\cdot arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 321

■ 6. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx$ **($5x^2+2=t^3$)**

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx$ **($\ln x = t$)**

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$ **($e^x = t$)**

d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **($x = t^2$)**

e) $\int sen^3 x\;dx$ **($\cos x = t$)**

f) $\int \frac{4x^3+2}{x^2+2}\,dx$ **($x^2 = t$)**

a) Mediante el cambio dado ($5x^2+2=t^3$) obtenemos: $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}\,dx$ =

$$\int \frac{4x}{t}\cdot\frac{3t^2}{10x}\,dt = \frac{3t^2}{5} = \frac{3\left(5x^2+2\right)^{\frac{2}{3}}}{5} + C$$

b) Mediante el cambio dado ($\ln x = t$) obtenemos: $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}\,dx$ =

$$\int \frac{2}{x(3+t)^2}\cdot x\,dt = \frac{-2}{3+t} = \frac{-2}{3+\ln x} + C$$

c) Mediante el cambio dado ($e^x = t$) obtenemos: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$ =

$$\int \frac{e^x}{t^2+4}\cdot\frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$$

d) Mediante el cambio dado ($x = t^2$) obtenemos: $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ =

$$= \int \frac{t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^3}{1+t}\,dt = \int \frac{(1+t)\cdot\left(2t^2-2t+2\right)-2}{1+t}\,dt =$$

$$= \int \left(2t^2-2t+2\right)dt - \int \frac{2}{1+t}\,dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

e) Mediante el cambio dado ($\cos x = t$) obtenemos:

$$\int sen\,x\,\left(1-t^2\right)\frac{dt}{sen\ x} = -\int sen\ x\,(1-t^2)\,\frac{dt}{-sen\ x} = -t + \frac{t^3}{3} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

f) Mediante el cambio dado ($x^2 = t$) obtenemos: $\int \frac{4x^3+2}{x^2+2}\,dx$ =

$$= \int \frac{4x^3}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+2} = \int \frac{4x\cdot t}{t+2}\cdot\frac{dt}{2x} + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{2\left((t+2)-4\right)}{t+2}\,dx + \sqrt{2}\,arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2t - 4\ln|t+2| + \sqrt{2}\,arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 2x^2 - 4\ln\left|x^2+2\right| + \sqrt{2}\,arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

7. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx$ **d)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **g)** $\int \frac{\ln x+8}{x(\ln^2 x+4\ln x)}dx$

b) $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx$ **e)** $\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\ \,dx$ **h)** $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx$

c) $\int \frac{2e^x+5}{e^x-3}\,dx$ **f)** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}dx$ **i)** $\int \frac{2\,arctg\,x}{x^2+1}\,dx$

7. a) Mediante el cambio (x - 2 = t^2) obtenemos:

$$\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2}{3+t}\cdot 2t\ dt =$$

$$= \int \frac{4t}{3+t}\,dx = \int \frac{4(3+t)-12}{3+t}\ dt = 4t - 12\ln|3+t| = 4\sqrt{x-2} - 12\ln\left|3+\sqrt{x-2}\right| + C$$

b) Mediante el cambio (ln x = t) obtenemos:

$$\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx = \int \frac{4+t^3}{2x}\cdot x\ dt = 2t + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = 2\ln x + \frac{1}{2}\frac{\ln^4 x}{4} + C$$

c) Mediante el cambio (e^x = t) obtenemos: $\int \frac{2e^x+6}{e^x-3}\,dx = \int \frac{2t+6}{t-3}\frac{dt}{t} =$ esta es una integral racional y queda: $\int \frac{-2}{t}\,dt + \int \frac{4}{t-3}dt = -2\ln|t| + 4\ln|t-3| = -2x + 4\ln|e^x-3| + C$

d) Mediante el cambio (x = t^2) obtenemos: $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t}{1+t}\,2tdt = \int \frac{8t^2}{1+t}\,dt =$ esta es una integral racional y queda:

$$\int \frac{8(t-1)(t+1)+8}{1+t}dt = 8\frac{(t-1)^2}{2} + 8\ln|1+t| = 4\left(\sqrt{x}-1\right)^2 + 8\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

e) Mediante el cambio (sen x = t) obtenemos:

$$\int \cos^3 x\cdot sen^2 x\ \,dx = \int \cos x\cdot\left(1-sen^2\ x\right)\cdot sen^2\ x\,dx = \int \cos x\cdot(1-t^2)\cdot t^2\ \frac{dt}{\cos x} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

f) Mediante el cambio (x-1 = t^2) obtenemos: $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}dx = \int \frac{t}{t^2-1}\,2t\ dt = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt =$

$$= \int \frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1}\,dt = 2t + \ln|t-1| + \ln|t+1| = 2\sqrt{x-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}\right) + C$$

g) Mediante el cambio (ln x = t) obtenemos: $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4\ln x)}dx = \int \frac{t+8}{x(t^2+4t)}\,x\,dt =$

$$= \int \frac{2}{t}\,dt + \int \frac{-1}{t+4}\,dt = 2\ln|t| - \ln|t+4| = 2\ln|\ln x| - \ln|\ln x + 4| + C$$

h) Mediante el cambio (e^x = t) obtenemos: $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{4t}{t^2-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t-1}\,dt + \int \frac{-2}{t+1}\,dt =$

$$= 2\ln|t-1| - 2\ln|t+1| = 2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

i) Mediante el cambio (arc tg x = t) obtenemos: $\int \frac{2\,arctg\,x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2t}{x^2+1}(x^2+1)\,dt = t^2 =$

= (arc tgx)^2 + C

8. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más adecuado:

a) $\int \ln(x^2-4)\,dx$

b) $\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx$

c) $\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int 5\cos 3x\; sen^2\,3x\;dx$

e) $\int \frac{8x^2+2x+5}{4x^2+5}\,dx$

f) $\int 8x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$

g) $\int \frac{3}{x^2+6x+18}dx$

h) $\int \frac{3+3x-2x^2}{x^2+x^3}dx$

i) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 1)}dx$

j) $\int \frac{3x^2+6x+10}{(x+2)^2}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

l) $\int (x^3+1)\ln x\,dx$

m) $\int \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt{x}}dx$

n) $\int (2x-1).\mathrm{arctg}\,x.dx$

o) $\int \frac{6}{x\cdot(\ln^2 x + \ln x)}dx$

p) $\int \frac{5x-12}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$

q) $\int e^{-2x}\cdot(x^2+1)\,dx$

r) $\int \frac{2}{e^{2x}-1}dx$

s) $\int \frac{4x(x+1)}{x^2-2x+5}dx$

t) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}}$.

u) $\int \frac{sen 2x}{3+\cos^2 x}dx$

w) $\int e^{-x}\cdot\cos 2x\;dx$

x) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-tg^2 x}}dx$

y) $\int \frac{x^5}{x^4-1}dx$

a) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int \ln(x^2-4)dx = x\ln|x^2-4| - 2x - 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$$

b) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx = \ln|2x-1| - 3\ln|x+1| + C$$

c) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{8\sqrt{x^5}}{5} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

d) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int 5\cos 3x\ sen^2\, 3x\ dx = \frac{5}{9}\,sen^3\ 3x + C$$

e) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{8x^2+2x+5}{4x^2+5}dx = 2x + \frac{1}{4}\ln\left(4x^2+5\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\,arctg\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

f) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int 8x^2\cdot e^{2x}\cdot dx = 4x^2 e^{2x} - 4x\, e^{2x} + 2e^{2x} + C$$

g) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{3}{x^2+6x+18}dx = arctg\left(\frac{x+3}{3}\right) + C$$

h) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{3+3x-2x^2}{x^2+x^3}dx = -\frac{3}{x} - 2\ln|x+1| + C$$

i) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x\,(\ln^2 x-1)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\ln^2 x - 1\right| + C$$

j) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{3x^2+6x+10}{(x+2)^2}\,dx = 3x - \frac{10}{x+2} - 6\ln|x+2| + C$$

k) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - arctg\,\sqrt{x^2-1} + C$$

l) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int (x^3+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} - x + C$$

m) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt{x}}\,dx = 8\sqrt[4]{x} - 24\ln\left|\sqrt[4]{x}+3\right| + C$$

n) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$\int (2x-1).\text{arctg}\,x.dx$ = $(x^2 - x + 1)$ arc tg x –x + ln $\sqrt{x^2+1}$ + C

o) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{6}{x\cdot(\ln^2 x+\ln x)}\,dx = 6\ \ln\left|\frac{\ln x}{1+\ln x}\right| + C$$

p) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{5x-12}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{5x-12}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,dx = -5\cdot\sqrt{9-(x-2)^2} - 2\,arcsen\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

q) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-2x}\cdot(x^2+1)\,dx = \frac{-1}{2}\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x} + C$$

r) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{e^{2x}-1}\,dx = -2x + \ln\left|(e^x-1)(e^x+1)\right| + C$$

s) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{4x\,(x-1)}{x^2-2x+5}\,dx = 4x + 6\ln(x^2-2x+5) - 4\,arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

t) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}} = 2\ arctg\ \sqrt{x+1} + C$$

u) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{sen 2x}{3+\cos^2 x} dx = -\ \ln(3+\cos^2 x) + C$$

w) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-x} \cdot \cos 2x\ \ dx = \frac{2e^{-x} sen 2x - e^{-x}\cos 2x}{5} + C$$

x) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas o por el método de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\sec^2\ x}{\sqrt{4-tg^2 x}} dx = arcsen\left(\frac{tg\ x}{2}\right) + C$$

y) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{x^5}{x^4-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)}\right| + C$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 322

1. Halla la primitiva de f(x) = $\frac{2x^2}{x^2+4x+3}$ **que valga 1 para x = 0**

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

$$F(x) = \int \frac{2x^2}{x^2+4x+3} dx = 2x - 9\ln|x+3| + \ln|x+1| + C$$

Como sabemos que F(0) = 1 sustituyendo obtenemos: C = 1 + 9 ln 3.

La primitiva que pide el problema es: $2x - 9\ln|x+3| + \ln|x+1| + 1 + 9\ln 3$

2. Halla una función f(x) real de variable real de la que se sabe que f´´ (x) = $3x^2$ - 4x + 3 y que su gráfica presenta un mínimo relativo en al punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$**.**

f´ (x) = $\int (3x^2 - 4x + 3)\ dx = x^3 - 2x^2 + 3x + C$;

F (x) = $\int (x^3 - 2x^2 + 3x + C)\ dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + Cx + K$

Como tiene un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ se debe verificar:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{11}{12} \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2 \\ K = \frac{11}{6} \end{cases}$$ por lo que f(x) = $\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{11}{6}$

3. Halla dos primitivas de la función f(x) = $\frac{2}{1-e^x}$.

Todas las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

F(x) = $\int \frac{2}{1-e^x}\ dx = 2\ x - 2\ \ln\left|1 - e^x\right| + C$

4. ¿Alguna de las funciones F(x) = $\frac{1 - senx}{\cos\ x} + 4$; G(x) = $\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}} - 5$ son primitivas de F (x) = $\frac{-1}{1+senx}$?

Ambas son primitivas de f(x) puesto que:

$$D\left(\frac{1-senx}{\cos\ x} + 4\right) = \frac{-1}{1+senx} \quad \text{y} \quad D\left(\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}} - 5\right) = \frac{-1}{1+senx}$$

5. Sea f(x) = $\frac{2x-12}{x^2-x+1}$. Halla $\int x \cdot f(x)\, dx$

$$\int x \cdot f(x)\, dx = \int x \cdot \frac{2x-12}{x^2-x+1}\ dx = \int \frac{2x^2-12x}{x^2-x+1}\ dx = \int 2 + \frac{-10x-2}{x^2-x+1}\ dx =$$

$$= 2x - 5\ \ln\left|x^2 - x + 1\right| - \frac{14\sqrt{3}}{3}\ arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

6. La curva que limita un determinado fractal viene dada por la función f (t) = 2t · cos $\left(\frac{t}{2}\right)$. Calcula $\int f(t)\ dt$.

$$\int f(t)\ dt = \int 2t \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4t \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) + 8 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

7. Halla $\int \frac{2^x + 4^x}{1+4^x}\, dx$

$$\int \frac{2^x + 4^x}{1+4^x}\, dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot arctg\ 2^x + \frac{1}{\ln 4} \cdot \ln\left(1+4^x\right) + C$$

8. Halla una función f: R $\longrightarrow$ R si se sabe que f (1) = 1; f ´(1) = 2; f ´´ (1) = 8 y f ´´´ (x) = 24x - 6.

f ´´ (x) = $\int (24x-6)\, dx = 12x^2 - 6x + C$;

f ´ (x) = $\int (12x^2 - 6x + C)\, dx = 4x^3 - 3x^2 + Cx + D$

f (x) = $\int (4x^3 - 3x^2 + Cx + D)\, dx = x^4 - x^3 + C\frac{x^2}{2} + Dx + K$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos: $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f\,'(1) = 2 \\ f\,''(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = -1 \\ K = 1 \end{cases}$ por lo que

f(x) = $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

9. Calcula, integrando por partes, $\int x \cdot \cos(\ln x)\, dx$ **y comprueba el resultado por derivación.**

En primer lugar hacemos un cambio de variable (ln x = t) y después resolvemos la integral por el método de integración por partes:

$$\int x \cdot \cos(\ln x)\, dx = = \int e^{2t} \cdot \cos(t)\, dt = \frac{e^{2t}\ sent + 2e^{2t}\ \cos t}{5} = \frac{x^2\ sen(\ln x) + 2\ x^2\ \cos(\ln x)}{5} + C$$

Comprobamos derivando esta última función:

$$D\left(\frac{x^2\ sen(\ln x) + 2\ x^2\ \cos(\ln x)}{5} + C\right) = x \cdot \cos(\ln x)$$

10. Resuelve la siguiente integral indefinida con un cambio de variable adecuado: $\int \frac{sen^2\ x}{\cos\ x} dx$

Resolvemos la integral con el cambio de variable (sen x = t):

$$\int \frac{sen^2\ x}{\cos\ x} dx = = \int \frac{t^2}{1-t^2}\ dt = \int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2}\right)\ dt = -t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = -senx + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+senx}{1-senx}\right| + C$$

11. Halla una función cuya derivada sea la función f(x) = arcsen x.

Todas las funciones cuya derivada es la dada se hallan mediante la integral:

$$\int arcsen\ x\, dx = x \cdot arcsen\ x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Una de estas funciones es $F(x) = x \cdot arcsen\ x - \sqrt{1-x^2} + 2$

12. Halla las siguientes integrales trigonométricas:

a) $\int \cos^5 x\, dx$ **b)** $\int \cos^2 x\, dx$ **c)** $\int \cos^2 x \cdot sen^2 x\, dx$

a) $\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x \cdot \left(1 - sen^2 x\right)^2 dx =$

$\int \cos x \left(1 - 2sen^2 x + sen^4 x\right) dx = senx - \frac{2sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + C$

b) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{sen 2x}{4} + C$

c) $\int \cos^2 x \cdot sen^2 x\, dx = \int \frac{sen^2 2x}{4} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{sen 4x}{8} + C$

13. Demuestra la siguiente igualdad: $\int \frac{1}{sen\ x} dx = \ln\left(\frac{1-\cos x}{sen\ x}\right) + C$

$D\left[\ln\left(\frac{1-\cos x}{sen\ x}\right) + C\right] = \frac{1}{senx}$

14. Halla una función polinómica de segundo grado cuya derivada es la función g(x) = 4x – 3 y tiene una tangente en la recta y = x + 2.

La función es f(x) = $\int (4x-3) dx = 2x^2 - 3x + C$

Si la recta dada es tangente a la gráfica de la función se verifica que g (x) = 4x – 3 = 1; por lo que x = 1 e y = 3. El punto de tangencia es (1, 3).

La función polinómica f(x) pasa por este punto, de modo que la función es: f (x) = $2x^2 - 3x + 4$

15. Halla una función real de variable real f(x) que pasa por el origen de coordenadas y de la que se sabe que f ´ (x) = x · ln (x^2 +1).

La función es: f (x) = $\int x \cdot \ln\left(x^2+1\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{x^3}{x^2+1} dx =$

$= \frac{x^2+1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{2} + C$

Para que pase por el origen de coordenadas se debe verificar que f(0) = 0. Por lo que C = 0 y la función buscada es:

f(x) $= \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\dfrac{x^2}{2}$

16. Halla la primitiva de la función f(x) = (x² + 1) · cos x que vale π para x = π.

Todas las primitivas se hallan mediante la siguiente integral:

$$\int\left(x^2+1\right)\cdot\cos x\ \ dx = \left(x^2+1\right) sen\,x - \int 2x\cdot sen\,x\ \ dx =$$

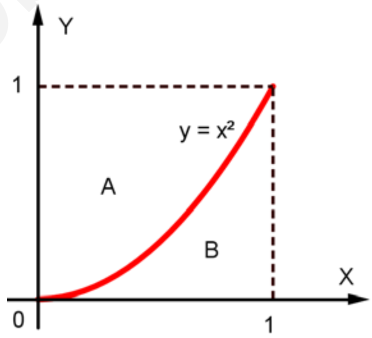
$$= \left(x^2+1\right) sen\,x + 2x\cdot\cos x - 2\,senx + C$$

La primitiva que pasa por el punto (π, π) es: F(x) = $\left(x^2+1\right) sen\,x + 2x\cdot\cos x - 2\,senx + 3\pi$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 323

Razones de áreas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen si se halla la razón de las áreas que se forman cuando las funciones y = x^n (n ∈ Z, n ∈ Q) se representan entre dos valores arbitrarios a y b, con a < b.



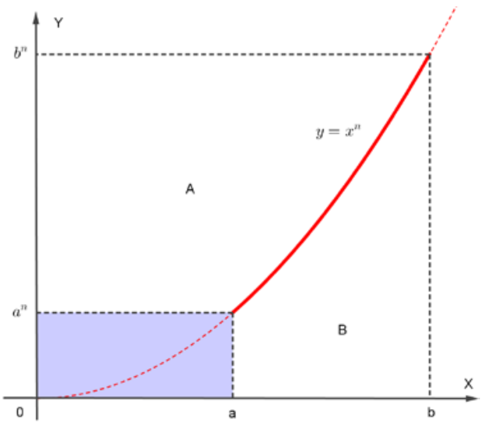
1. Sea la función y = x^2. Consideramos:

- **La región B delimitada por y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX.**
- **La región A delimitada por y = x^2, y = 0, y = 1 y el eje OY.**

Halla la razón: $\dfrac{Área\ A}{Área\ B}$.

2. Calcula la razón de las áreas para otras funciones del tipo y = x^n, n ∈ Z^+, entre x = 0 y x = 1.

3. Estudia qué ocurre para áreas comprendidas entre x = 0 y x = 2, entre x = 1 y x = 2, etc.



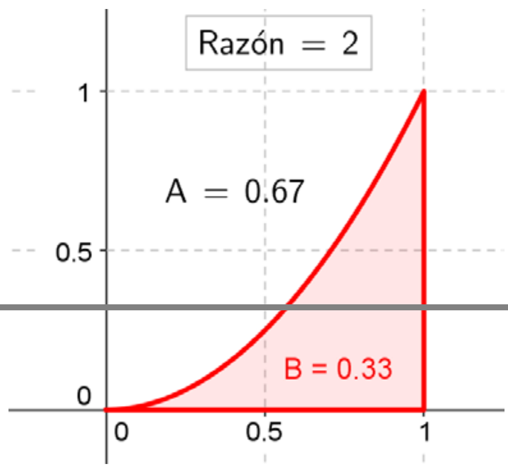
4. Analiza el caso general, con y = x^n entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:

- **La región A delimitada por y = x^n, y = a^n, y = b^n y el eje OY.**
- **La región B delimitada por y = x^n, x = a, x = b y el eje OX.**

5. Los resultados que obtienes, ¿se mantienen para funciones del tipo y = x^n, $n \in Z^-$, entre x = 0 y x = 1; entre x = 0 y x = 2; entre x = 1 y x = 2, etc.? ¿Y para funciones del tipo y = x^n, $n \in Q$, en los mismos intervalos?

1. Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^2\ \ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}33$$



$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

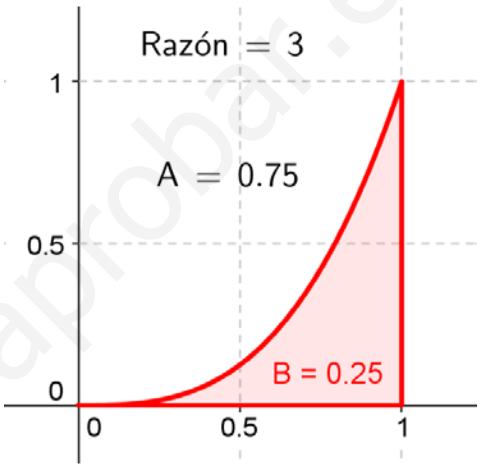
2. Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

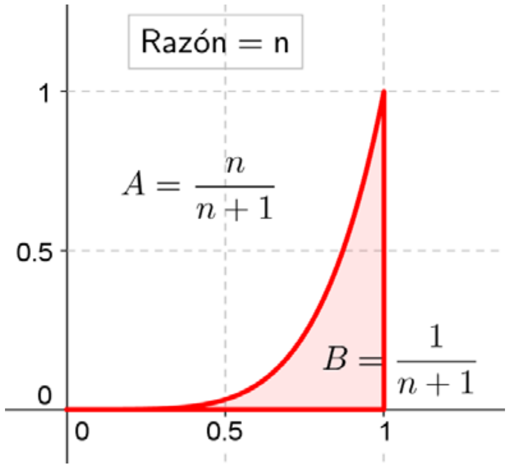


Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = n.$



En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

3. Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 0 y x = 2.

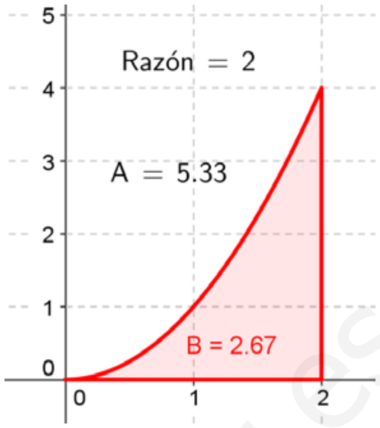
Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^2 \ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

$$A = 8 - B = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área \ A}{Área \ B} = \dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



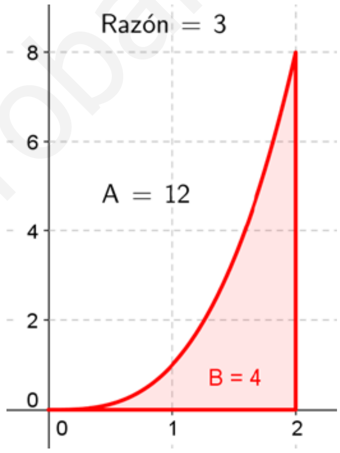
Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^3 \ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$A = 16 - B = 16 - 4 = 12$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área \ A}{Área \ B} = \dfrac{12}{4} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

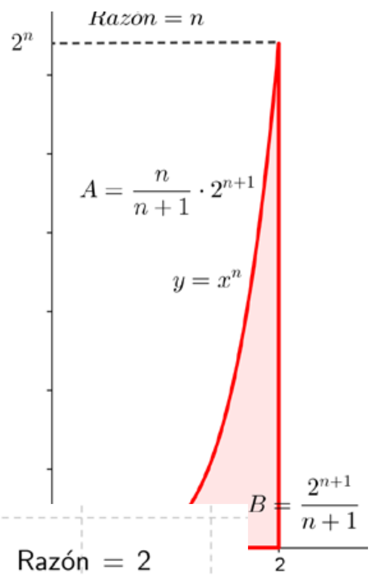


Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^n \ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área \ A}{Área \ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+1}} = n.$

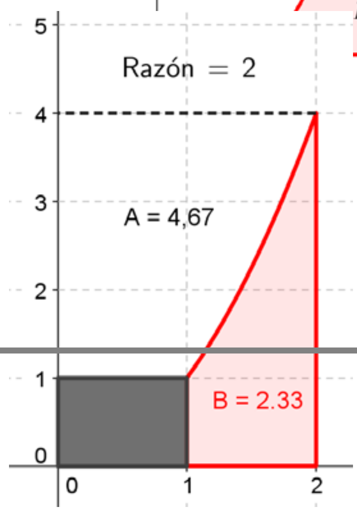


En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 1 y x = 2.

Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:



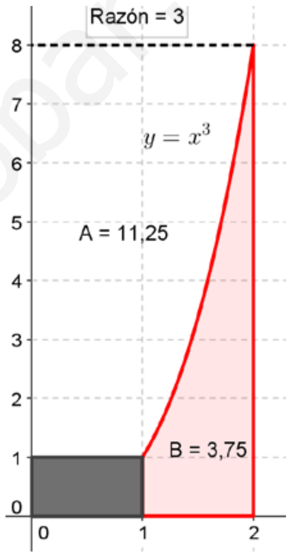
$$B = \int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}33$$

$$A = 8 - 1 - B = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4{,}67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función $y = x^3$ hallamos las áreas de las regiones B y A:



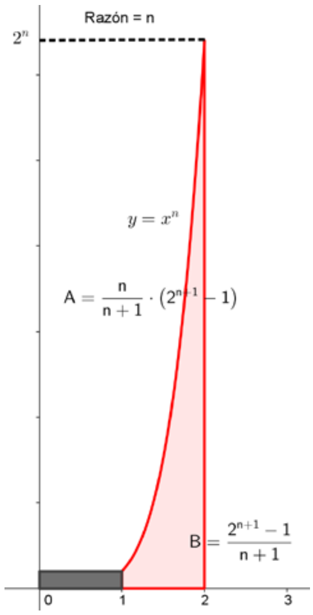
$$B = \int_1^2 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$A = 16 - 1 - B = 15 - \frac{15}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{45}{4}}{\frac{15}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función $y = x^n$, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:



$$B = \int_1^2 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función $y = x^n$.

4. Analizamos el caso general, con $y = x^n$ entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:

- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.

- La región B delimitada por y = x^n, x = a, x = b y el eje OX.

El área de la Región B es:

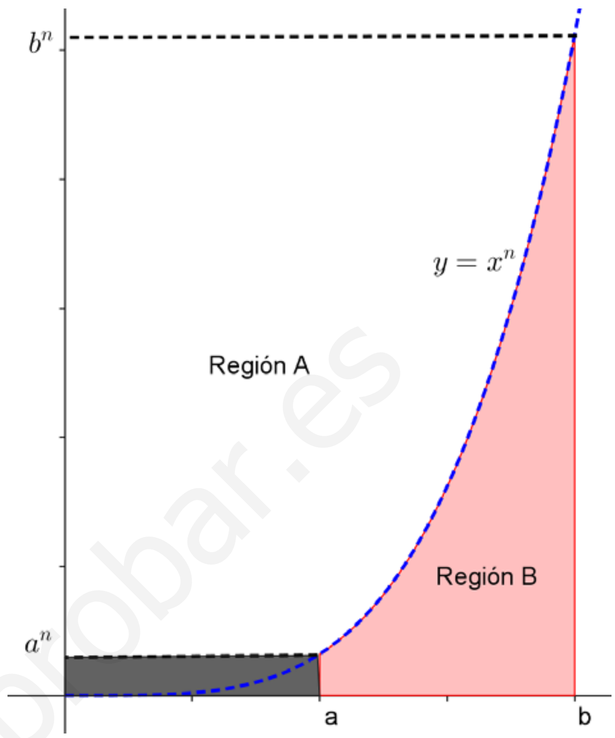
$$B = \int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

El área de la Región A es:

$$A = b^n \cdot b - a^n \cdot a - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

La razón de las áreas es:

$$Razón = \frac{Área \ A}{Área \ B} = \frac{\frac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)} = n$$



5. Estudiamos las funciones y = x^n, $n \in Z^-$.

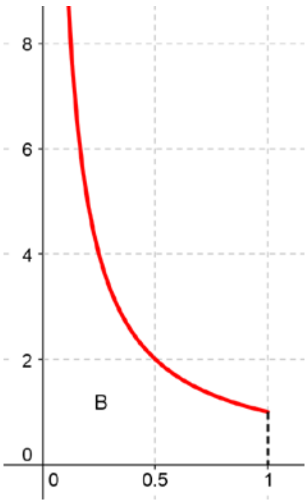
Comenzamos con $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

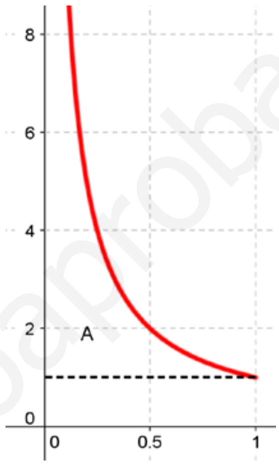
● **Entre 0 y 1:**

El área de la región B es: $B = \int_0^1 \dfrac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty$$





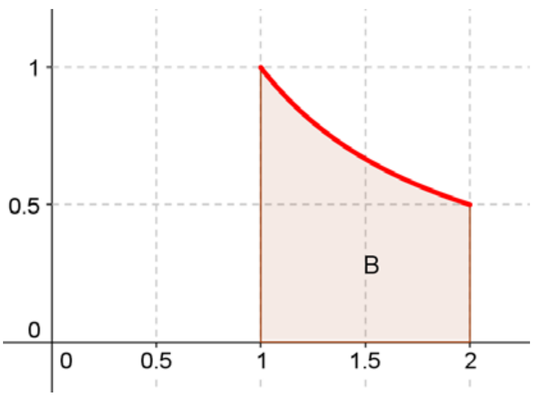
● **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

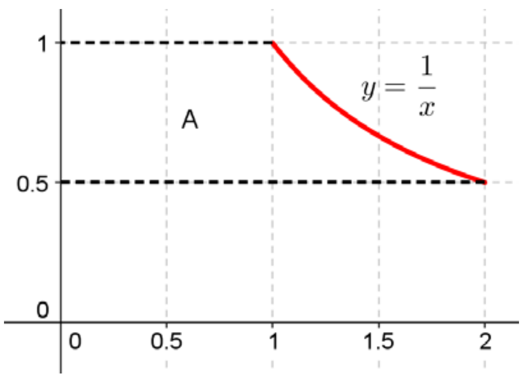
● **Entre 1 y 2:**

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}6931$$

$$A = \int_{1/2}^1 \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_{1/2}^1 = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2 = 0{,}6931$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$



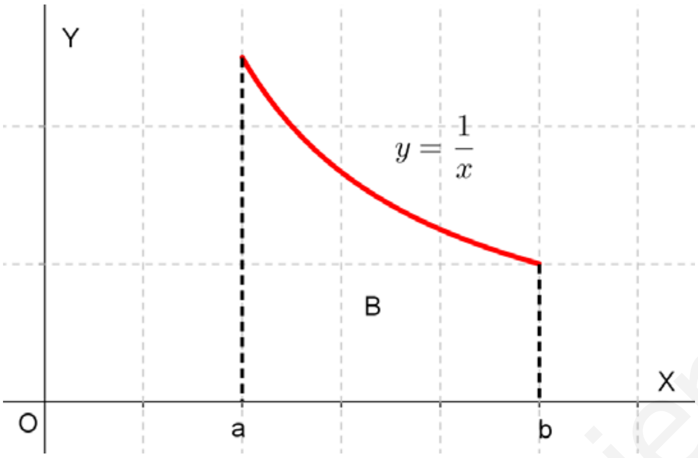


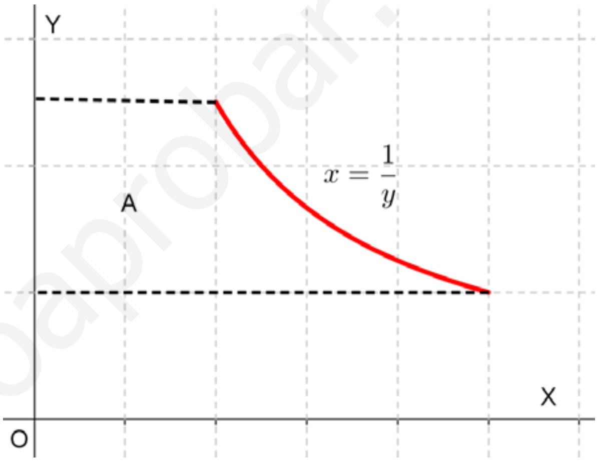
● **Entre a y b:**

$$B = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

$$A = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_{1/b}^{1/a} = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a - (-\ln b) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = 1$





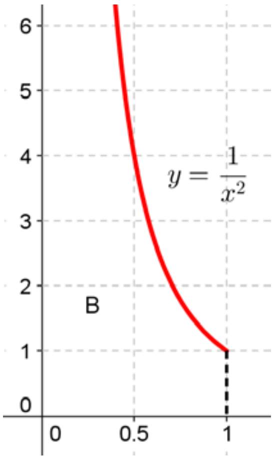
Consideramos $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

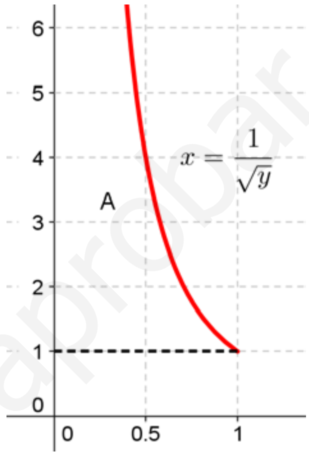
● Entre 0 y 1:

El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-2}\ dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_0^1 = -1 - \left(-\dfrac{1}{0}\right) = -1 + \infty = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}}\ dy = \left[2\sqrt{y}\right]_1^{+\infty} = +\infty - 2 = +\infty$$



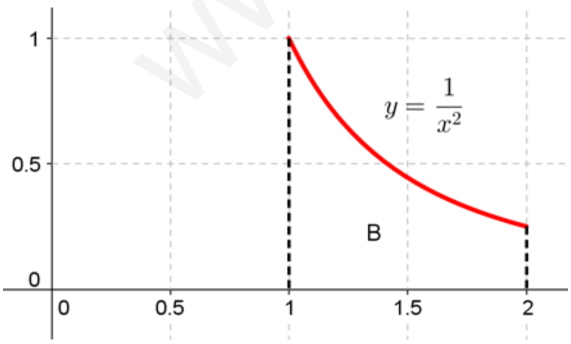


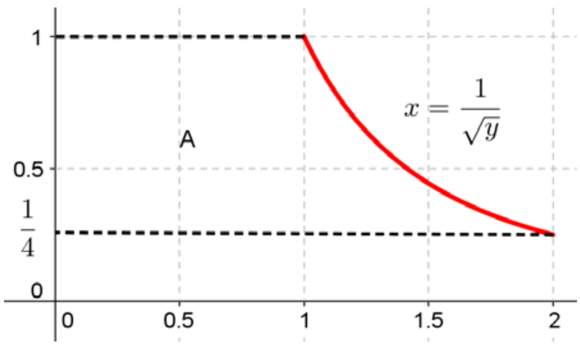
● Entre 0 y a, con a > 0, se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

● Entre 1 y 2:

$$B = \int_1^2 x^{-2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_{1/4}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\ dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/4}^{1} = 2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} = 2 - 1 = 1$$





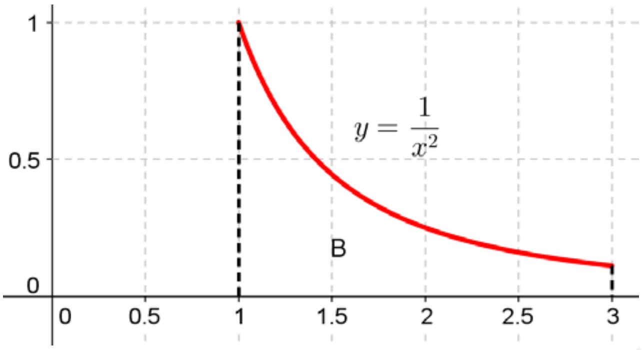
El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

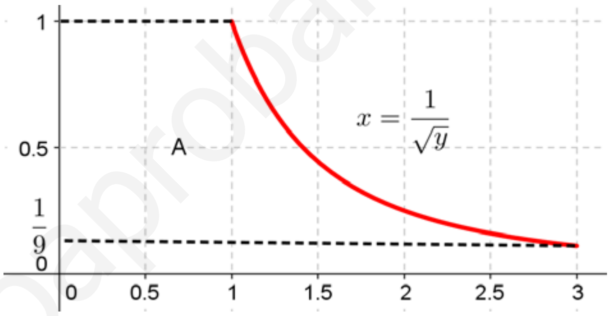
● **Entre 1 y 3:**

$$B = \int_1^3 x^{-2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A = \int_{1/9}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/9}^{1} = 2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{9}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$



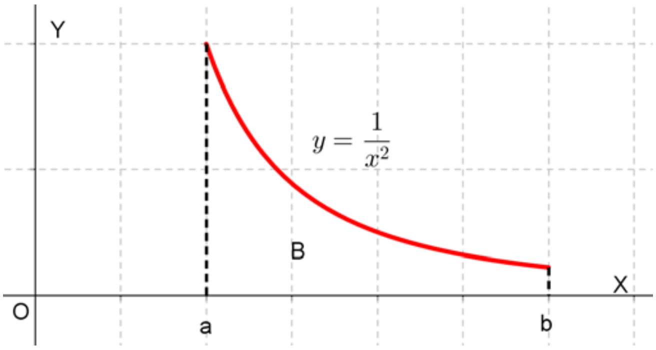


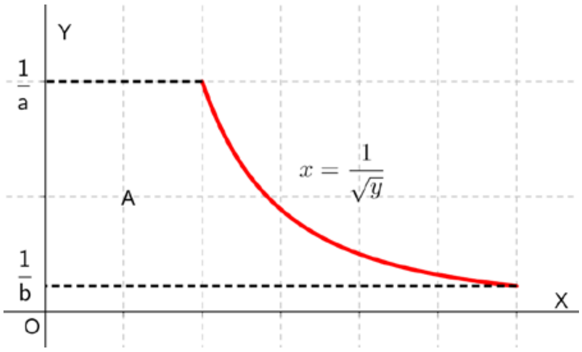
● **Entre a y b:**

$$B = \int_a^b x^{-2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$A = \int_{1/b^2}^{1/a^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/b^2}^{1/a^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = 2$





Consideramos $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

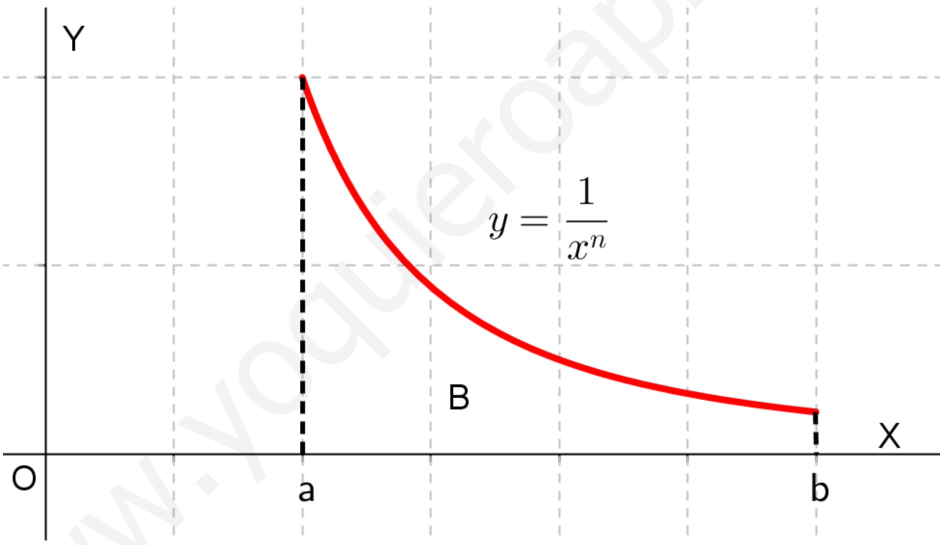
● Entre a y b:

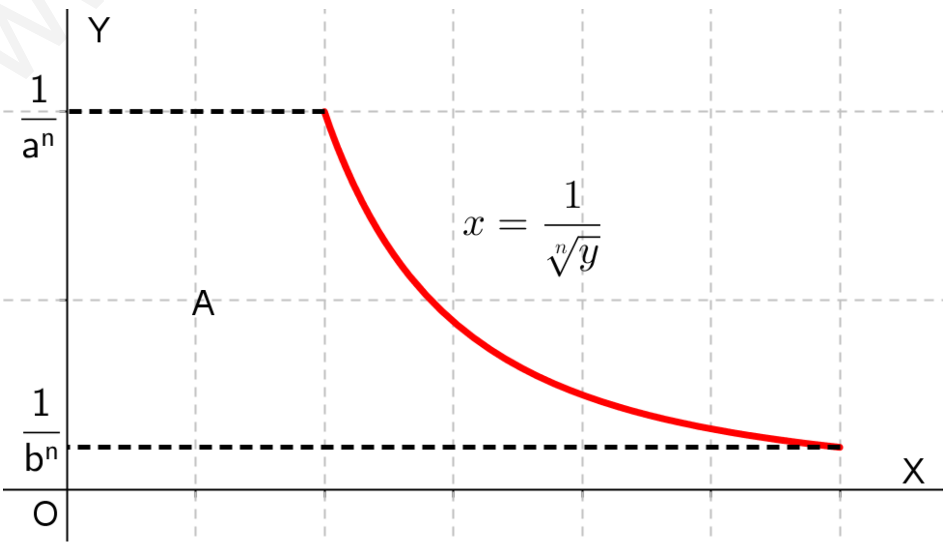
$$B = \int_a^b x^{-n}\,dx = \left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_a^b = \frac{1}{-n+1}b^{-n+1} - \frac{1}{-n+1}a^{-n+1} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

$$A = \int_{1/b^{n2}}^{1/a^n} y^{-1/n}\,dy = \left[\frac{n}{n-1}y^{\frac{n-1}{n}}\right]_{1/b^n}^{1/a^n} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{b^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right)}{\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right)} = n$





Estudiamos las

funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\dfrac{p}{q} \in Q^+$. Comenzamos con $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

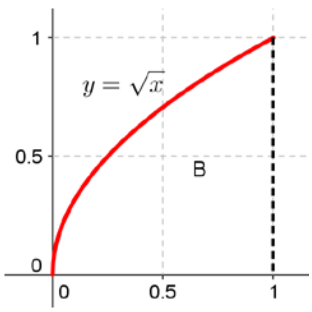
● **Entre 0 y 1:**

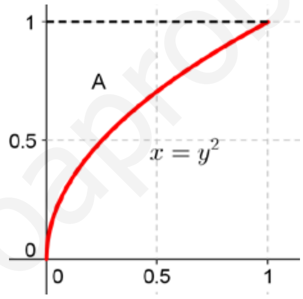
El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} - 0 = \dfrac{2}{3}$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} y^2\ dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





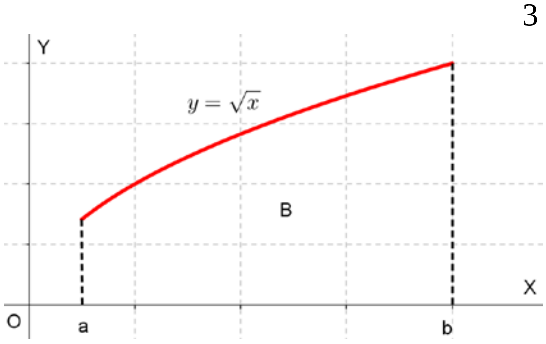
● **Entre a y b:**

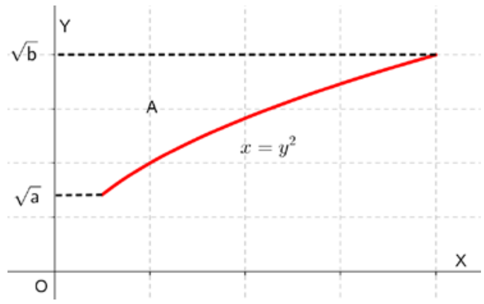
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_a^b = \dfrac{2}{3}\sqrt{b^3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{a^3} = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2\ dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}\sqrt{b^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)}{\frac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





Consideramos la función $y = x^{\frac{p}{q}},\ \frac{p}{q} \in Q^+$ **entre a y b.**

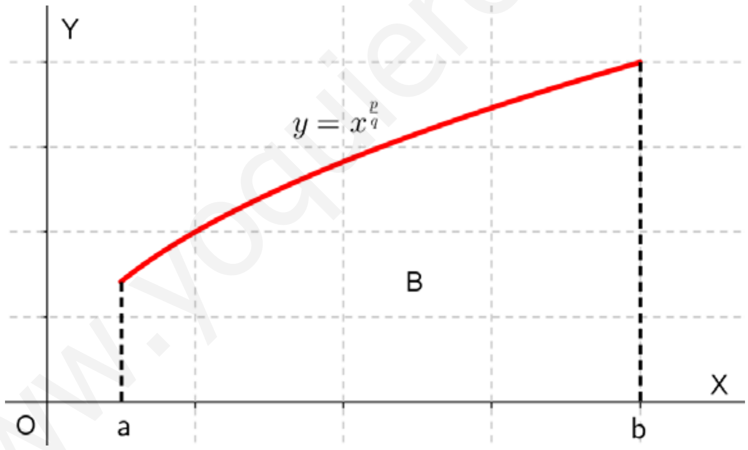
El área de la región B es:

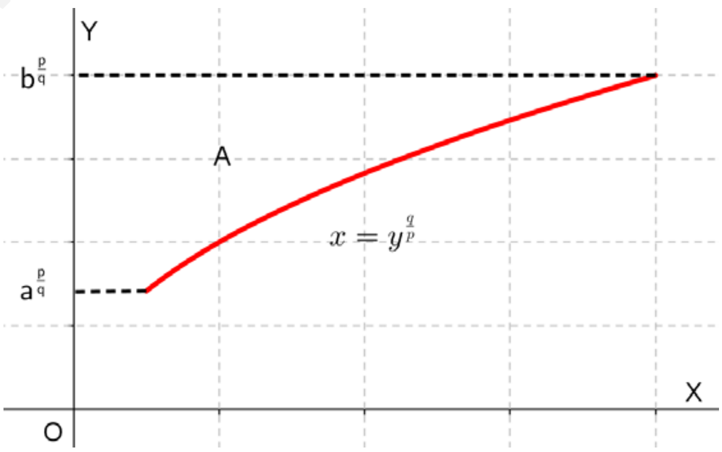
$$B = \int_a^b x^{\frac{p}{q}}\, dx = \left[\frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{p}}\right]_a^b = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{q}} - \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q}\left(b^{\frac{q}{p+q}} - a^{\frac{q}{p+q}}\right)$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} y^{\frac{q}{p}}\, dy = \left[\frac{p}{p+q} y^{\frac{p+q}{p}}\right]_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{p}{p+q}\left[\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}} - \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}}\right] = \frac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right]}{\frac{q}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}}\right]} = \dfrac{p}{q}$





Estudiamos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\frac{p}{q} \in Q^-$. Comenzamos con $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

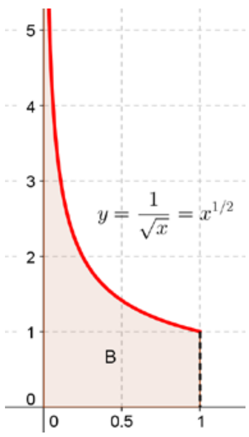
● **Entre 0 y 1:**

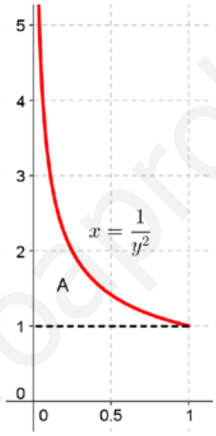
El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$





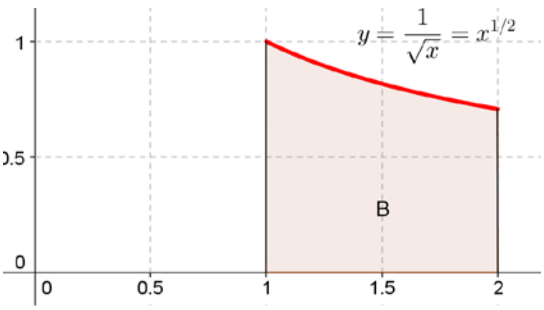
● **Entre 1 y 2:**

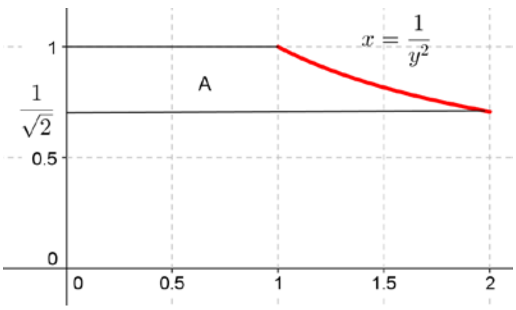
El área de la región B es: $B = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\, dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2} - 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{2}$





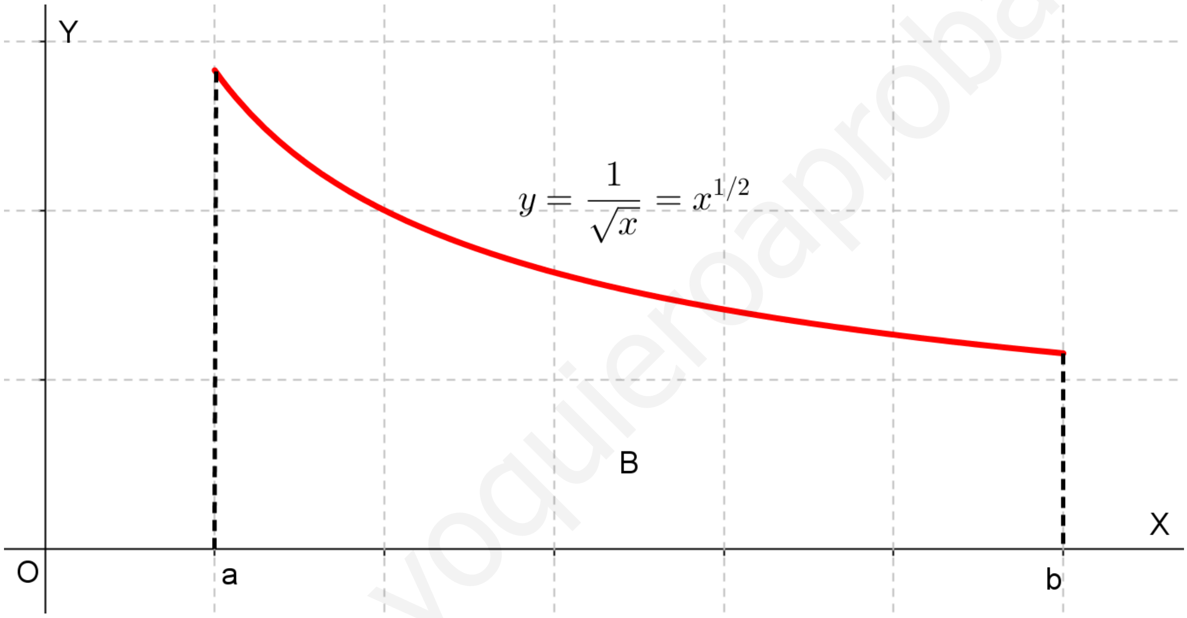
• **Entre a y b:**

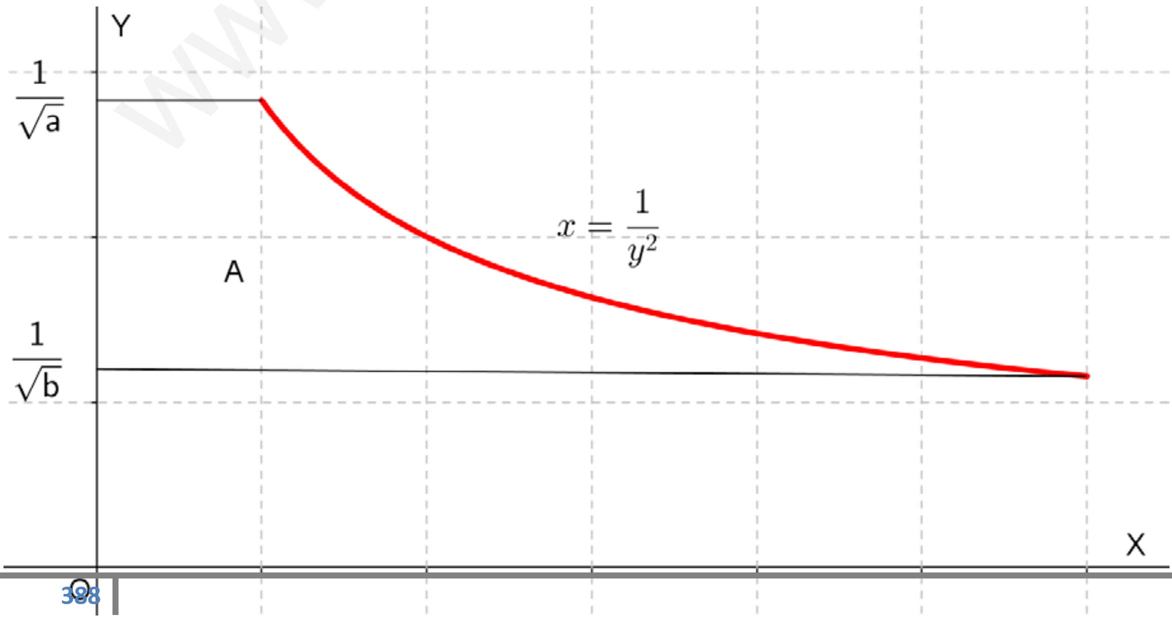
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} = 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{b}}^{1/\sqrt{a}} \frac{1}{y^2}\, dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{a}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2}$





Podemos comprobar con otras funciones del mismo tipo, por ejemplo:

$$y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \qquad y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad y = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \qquad \ldots$$

que se obtienen resultados análogos al anterior.

Para finalizar, h**acemos**, **los cálculos para la función** $y = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{p}}$ **entre a y b.**

El área de la región B es:

$$B = \int_a^b x^{-\frac{p}{q}}\, dx = \left[\frac{q}{q-p} x^{\frac{q-p}{q}}\right]_a^b = \frac{q}{q-p} b^{\frac{q-p}{q}} - \frac{q}{q-p} a^{\frac{q-p}{q}} = \frac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/b^{p/q}}^{1/a^{p/q}} y^{-\frac{q}{p}}\, dy = \left[\frac{p}{p-q}\right]_{1/b^{p/q}}^{1/a^{p/q}} = \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} - \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} = \ldots =$$

$$= \frac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\dfrac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]}{\dfrac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]} = \dfrac{p}{q}$