## UNIDAD 11: Representación gráfica de funciones

### ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 276

**1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas y ramas parabólicas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia de puntos de inflexión:**

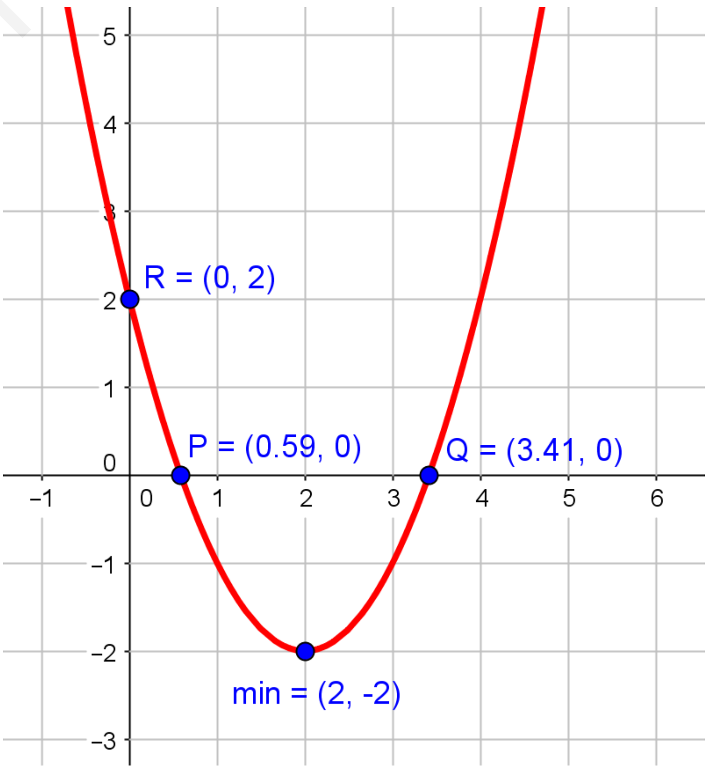
**a)** $f(x) = x^2 - 4x + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

a) Las características de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ son:

- Dominio: Dom f = R
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: P\left(2+\sqrt{2},\ 0\right) \text{ y } Q\left(2-\sqrt{2},\ 0\right) \\ OY: R\ (0,\ 2) \end{cases}$
- No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty$$

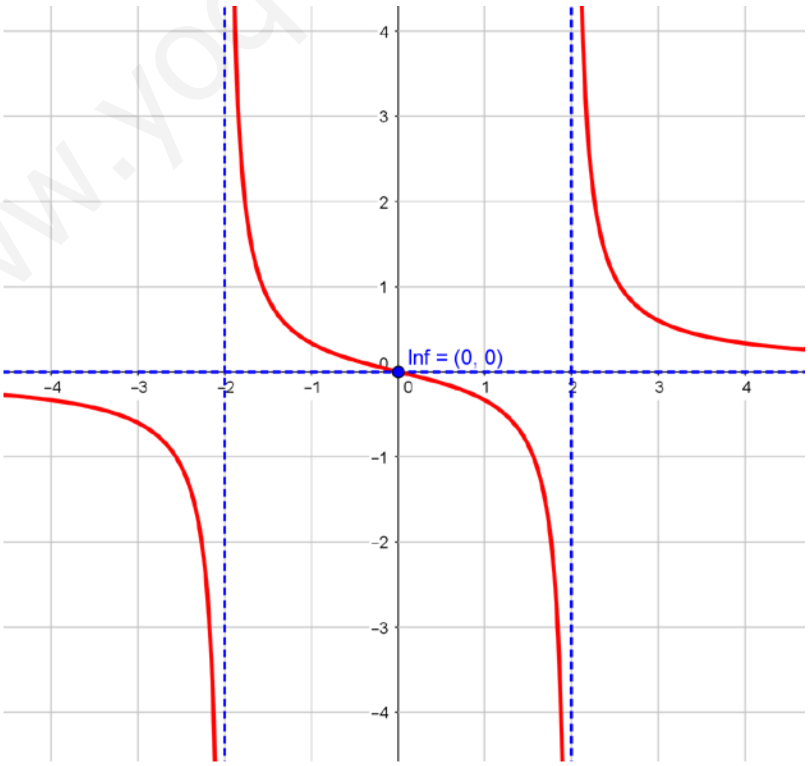
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 2)$ y estrictamente creciente en $(2,\ +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, - 2).
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en todo R.
- Puntos de inflexión: no tiene.



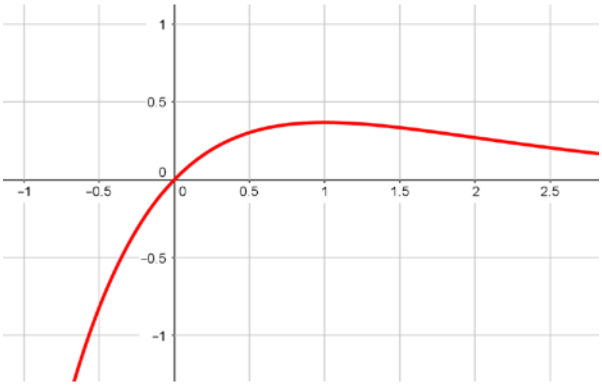

b) Las características de la función

$f\ (x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ son:

- Dominio: Dom f = R – {- 2, 2}
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : O\ (0,\ 0) \\ OY : O\ (0,\ 0) \end{cases}$
- Simetría; es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas:
  - Verticales: x = - 2 y x = 2, al cumplirse: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x^2 - 4} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2 - 4} = \infty$
  - Horizontales: y = 0, al cumplirse: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = \infty$
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {- 2, 2}.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ -2) \cup (0,\ 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.



**2. Estudia las características (dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, monotonía, extremos relativos y curvatura) de la función $f\ (x) = \dfrac{x}{e^x}$, representada en la gráfica.**



Las características de la función $f\ (x) = \dfrac{x}{e^x}$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Recorrido: $(-\infty, 1/e)$

● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : O\ (0,\ 0) \\ OY : O\ (0,\ 0) \end{cases}$

● Simetría; no tiene.

● Asíntotas: y = 0, al cumplirse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

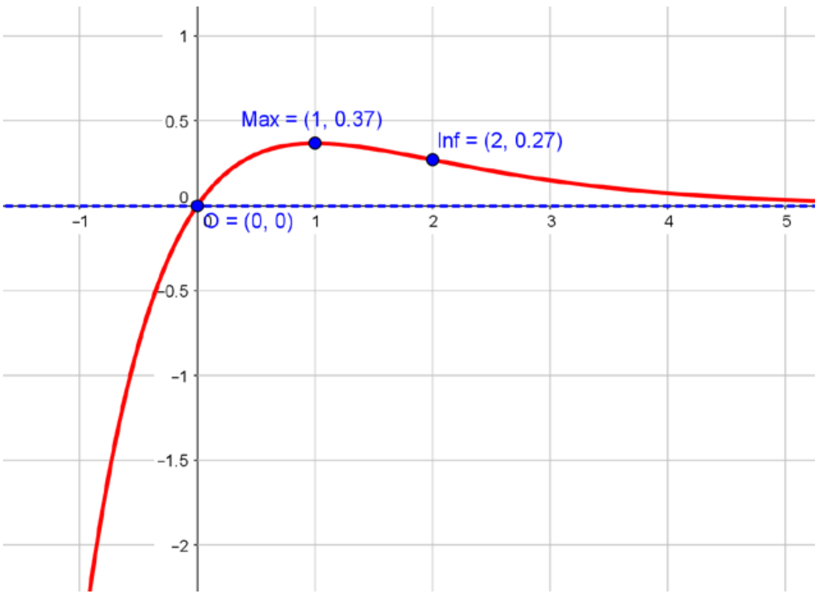
● Ramas parabólicas: tiene una, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

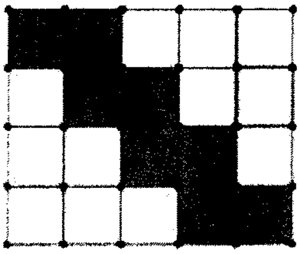
● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en el punto (1, 1/e).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (2, $2/e^2$) es de inflexión.



## ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 291



**1. Diagonal y cuadrados. En el rectángulo del dibujo, de orden 5 x 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal en un rectángulo de orden a x b?**

Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando a (altura) y b (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

| **a x b** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 |
| **3** | 3 | 4 | 3 | 6 | 7 | 6 |
| **4** | 4 | 4 | 6 | 4 | 8 | 8 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 | 10 |
| **6** | 6 | 6 | 6 | 8 | 10 | 6 |

En el elemento en el que se cruzan la fila a con la columna b aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensiones a x b, por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4 x 3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

● El número de cuadrados pequeños que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden a x b es igual a: a + b – 1, si a y b son primos entre sí.

● Si los números a y b nos son primos entre sí, entonces el número es: a + b – d, siendo d el máximo común divisor de a y b.

**2. Producto de tres números. Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.**

El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n (n + 1) (n + 2)$.

Por otra parte son válidas las siguientes desigualdades:

$$n^3 < n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$$

La desigualdad primera $n^3 < n (n + 1) (n + 2)$, es decir $n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

Para probar la segunda $n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$, basta comprobar que: $n (n + 2) < (n + 1)^2$.

Pero esto también es inmediato por que: $n (n + 2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Luego el número $n (n + 1) (n + 2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

## ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 293

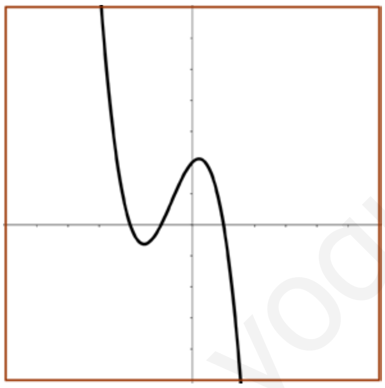
**1. Representa gráficamente las funciones que siguen, explorando sus gráficas y modificando su aspecto.**

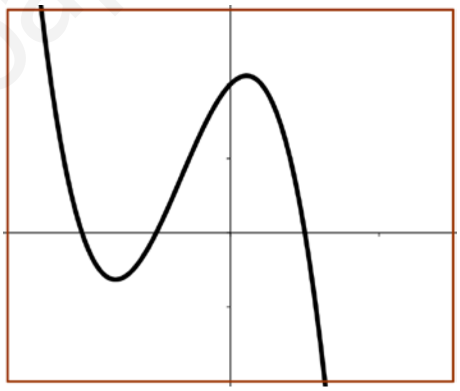
**a)** $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe OPCIONES PARA UNA GRÁFICA:

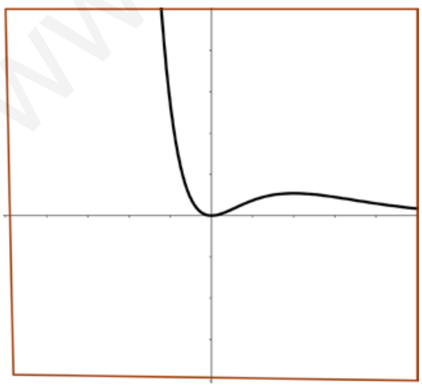
- Editamos la función en la tecla **Y=**.
- Pulsamos **GRAPH** y visualizamos la gráfica.
- Activando la tecla **WINDOW** podemos mejorar el aspecto de la gráfica.
- Pulsando de nuevo **GRAPH** obtenemos una nueva imagen de la gráfica.
- Activando **TRACE** nos movemos con el cursor por la gráfica y en la pantalla aparece la posición del cursor así como sus coordenadas.
- Con la tecla **ZOOM** modificamos el aspecto de la gráfica.

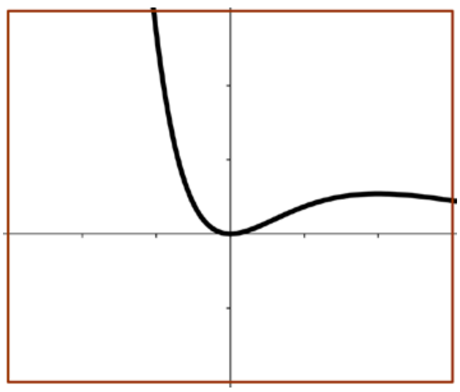
a) Para la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ podemos obtener imágenes como las que siguen.



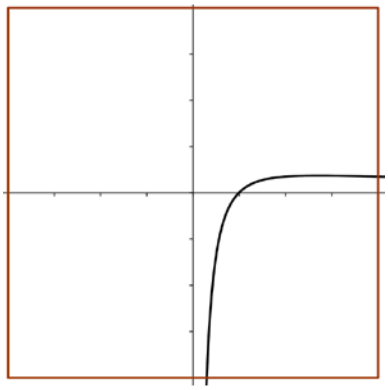


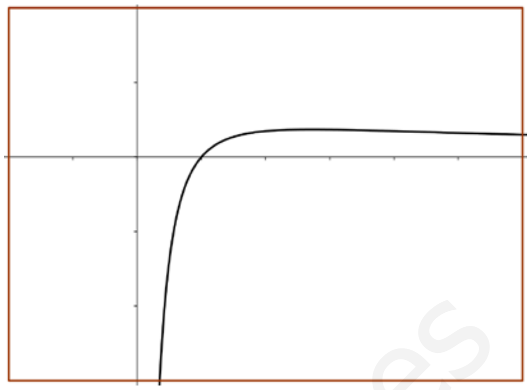
b) La gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ puede presentar los siguientes aspectos:





c) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ presenta el siguiente aspecto:





**2. Para las funciones de la actividad anterior visualiza simultáneamente su gráfica y su tabla de valores.**

Procedemos como se explica en el epígrafe GRÁFICA Y TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN:

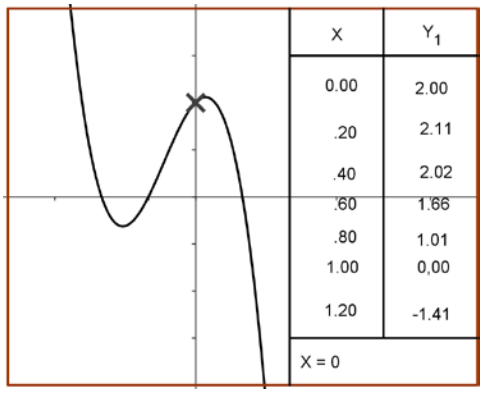
- Pulsamos la tecla **Y =** y en $Y_1$ introducimos la expresión de la función.

- En el menú de la tecla **MODE** elegimos **FLOT 2**, para obtener resultados con dos cifras decimales y en la línea COMPL (Full) HORIZ G-T elegimos la opción **G-T** (gráfico-tabla) que muestra la pantalla dividida verticalmente.

- Pulsando **GRAPH** visualizamos la gráfica de la función y parte de su tabla de valores. Con las teclas **WINDOWS** y **ZOOM** podemos modificar el aspecto de la gráfica.

- Con la tecla **TRACE** nos movemos sobre la gráfica y la posición del cursor queda reflejada en la tabla y en la pantalla gráfica, como puede verse en las imágenes.

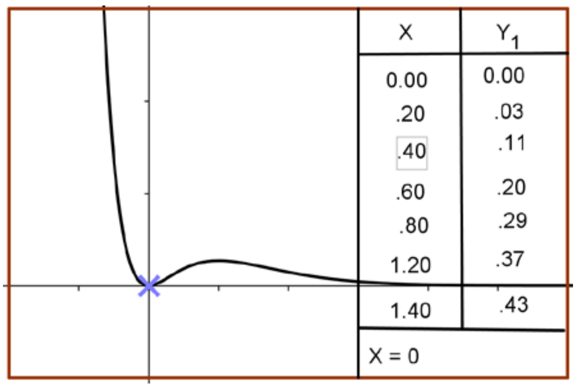
a) Para la función f (x) = - $x^3$ - $2x^2$ + x + 2 obtenemos:



| X | $Y_1$ |
|---|---|
| 0.00 | 2.00 |
| .20 | 2.11 |
| .40 | 2.02 |
| .60 | 1.66 |
| .80 | 1.01 |
| 1.00 | 0,00 |
| 1.20 | -1.41 |

X = 0

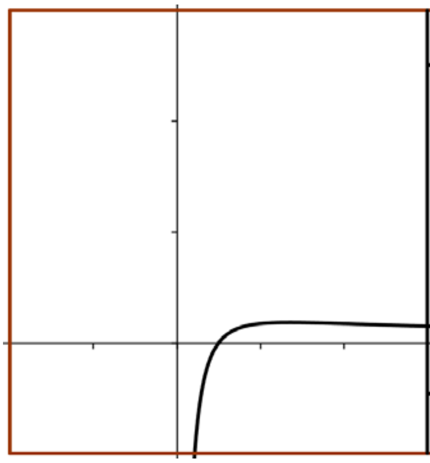
b) Para la función f(x) = $x^2 \cdot e^{-x}$ obtenemos:



| X | $Y_1$ |
|---|---|
| 0.00 | 0.00 |
| .20 | .03 |
| .40 | .11 |
| .60 | .20 |
| .80 | .29 |
| 1.20 | .37 |
| 1.40 | .43 |

X = 0

c) Para la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ obtenemos:

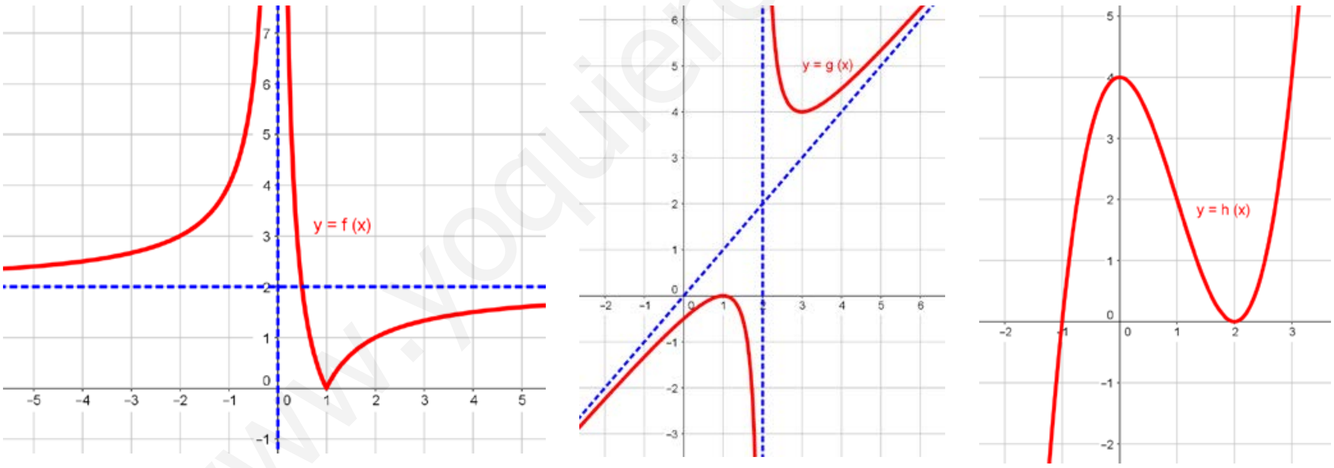


| X | $Y_1$ |
|---|---|
| 0.00 | ERROR |
| .20 | -8.05 |
| .40 | -2.29 |
| .60 | -.85 |
| .80 | -.28 |
| 1.00 | 0.00 |
| 1.20 | .15 |

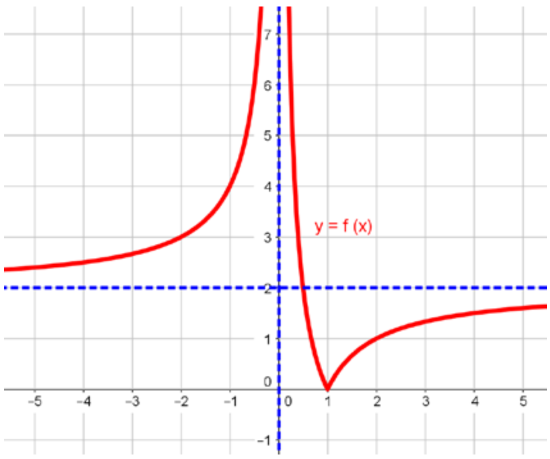
X = 0

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 296

**1. Describe las siguientes funciones indicando sus dominios, recorridos, puntos de corte con los ejes, asíntotas, ramas infinitas, intervalos de monotonía y curvatura y sus puntos singulares.**




a) Las características de la gráfica de f (x) son:




● Dominio: Dom f = R - {0}.

● Recorrido: Im f = $[0, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0 e y = 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

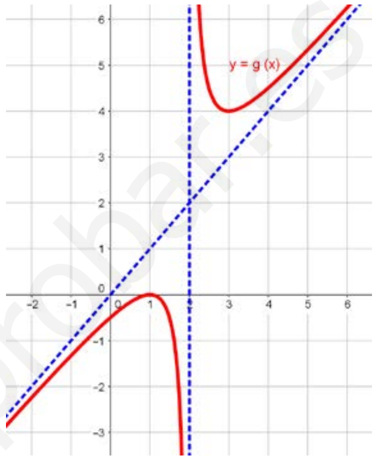
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de la gráfica de g (x) son:




● Dominio: Dom f = R - {2}.

● Recorrido: Im f = $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 2 e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 2) \cup (2,3)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1, 0) y un mínimo relativo en (3, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$

● Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de la gráfica de h (x) son:


● Dominio: Dom f = R.

● Recorrido: Im f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0) y (2, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, una a menos infinito y otra a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, 0) y un máximo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

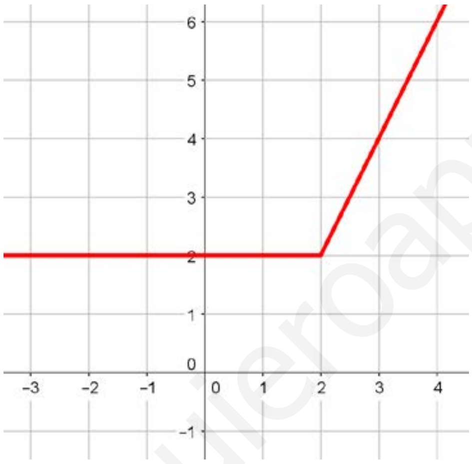
● Puntos de inflexión: el punto (1, 2) es de inflexión.

**2. Representa gráficamente las siguientes funciones:**

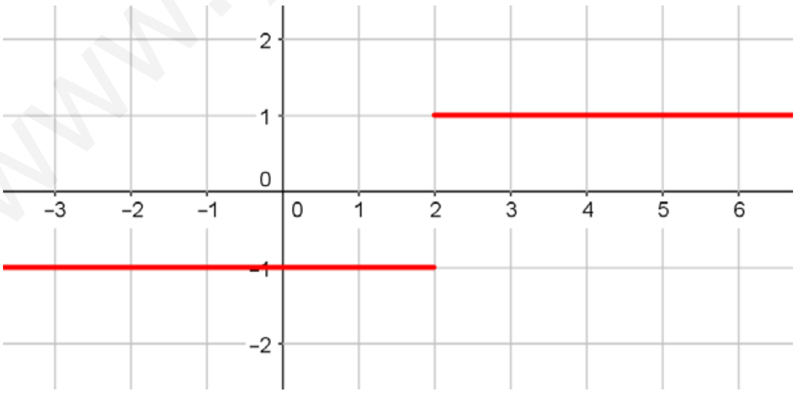
**a)** $f(x) = |x - 2| + x$ **c)** $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ **e)** $f(x) = x^3 - 3|x|$

**b)** $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ **d)** $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$ **f)** $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

a) La función f (x) = |x - 2| + x puede expresarse en la forma: $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \leq 2 \\ 2x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



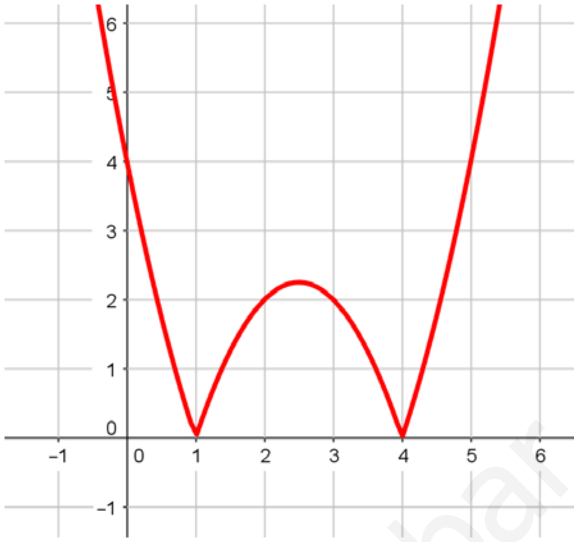

b) La función $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ puede expresarse en la forma $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.




c) La función f (x) = $|x^2 - 5x + 4|$ puede expresarse en la forma:

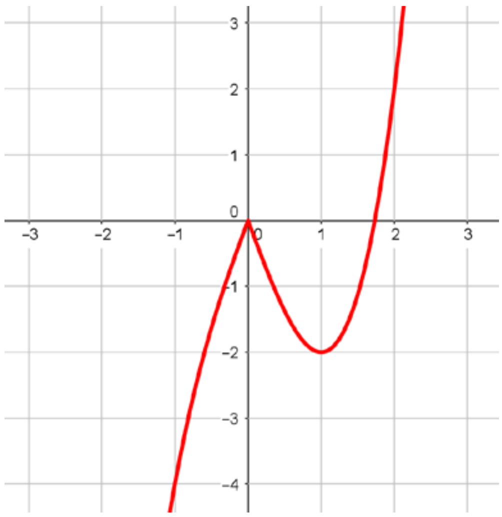
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 & si\ x \in [1, 4] \\ x^2 - 5x + 4 & si\ x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

Su gráfica puede verse a continuación.

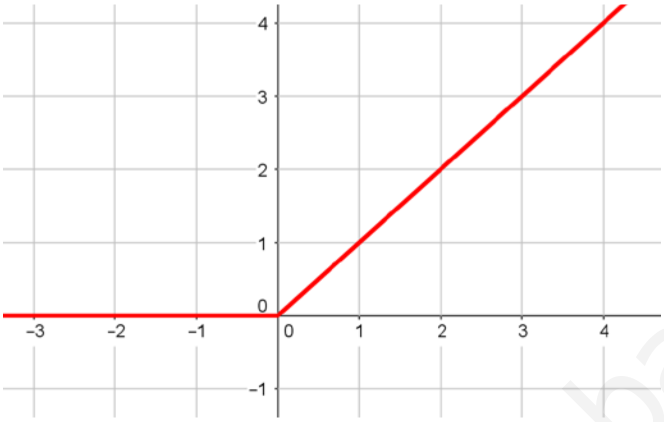


d) La función f (x) = |x - 2| - |x + 2| puede expresarse en la forma $f\ (x) = \begin{cases} 4 & si\ x \le -2 \\ -2x & si\ -2 < x\ 2 \\ -4 & si\ x \ge 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.

e) La función f (x) = $x^3$ - 3|x| puede expresarse en la forma $f\ (x) = \begin{cases} x^3 + 3x & si\ x \le 0 \\ x^3 - 3x & si\ x > 0 \end{cases}$ y su gráfica aparece a continuación:



f) La gráfica de la función $f\ (x) = \frac{x + |x|}{2}$ puede expresarse en la forma $f\ (x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en al imagen.



**3. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

**a) f (x) = x · (x – 3) · (x + 3)**

**b) f (x) = (x – 1) · (x – 2) · (x – 3)**

**c) f (x) = - 3x³ + 3x**

**d) f (x) = $x^4$ – $x^3$**

**e) f (x) = $x^3$ – $3x^2$ + x + 2**

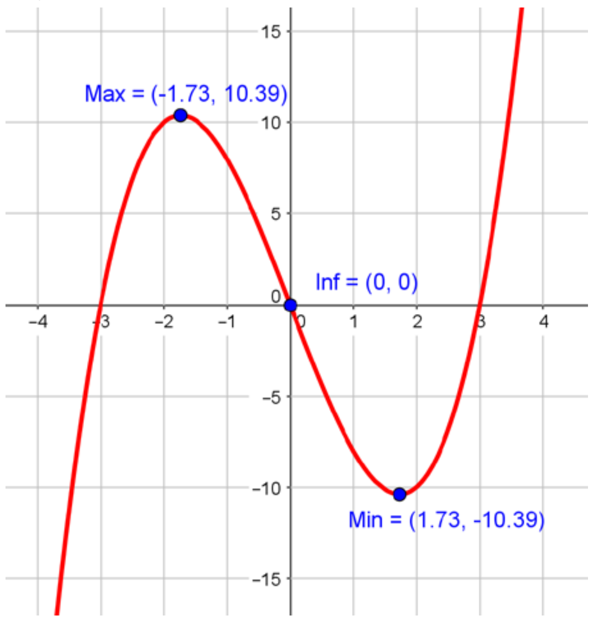
**f) f (x) = $2x^2$ – $x^4$ – 1**

**g) f (x) = $x^3$ – $4x^2$ + 4x**

**h) f (x) = - $x^4$ + $2x^2$ + 8**

**i) f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$**

a) Las características de la función f (x) = x · (x – 3) · (x + 3) son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-3,\ 0);(0,\ 0)\ y\ (3,\ 0) \\ OY : (0,\ 0) \end{cases}$$

● Simetría: respecto al origen de coordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1{,}73;\ 1{,}73)$ y estrictamente creciente en $(-\infty,\ -1{,}73) \cup (1,\ 73,\ +\infty)$.

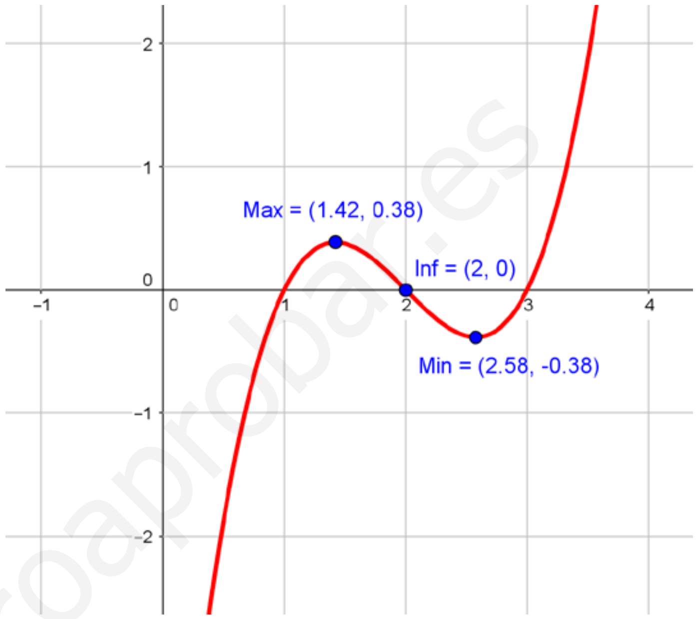
● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (- 1,73; 10,39) y un mínimo relativo en (1,73; 10,39).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

b) Las características de la función f (x) = (x – 1) · (x – 2) · (x – 3) son:

● Dominio: Dom f = R.




● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (1,\ 0); (2,\ 0)\ y\ (3,\ 0) \\ OY: (0, -6) \end{cases}$$

● Simetría; no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = +\infty$$

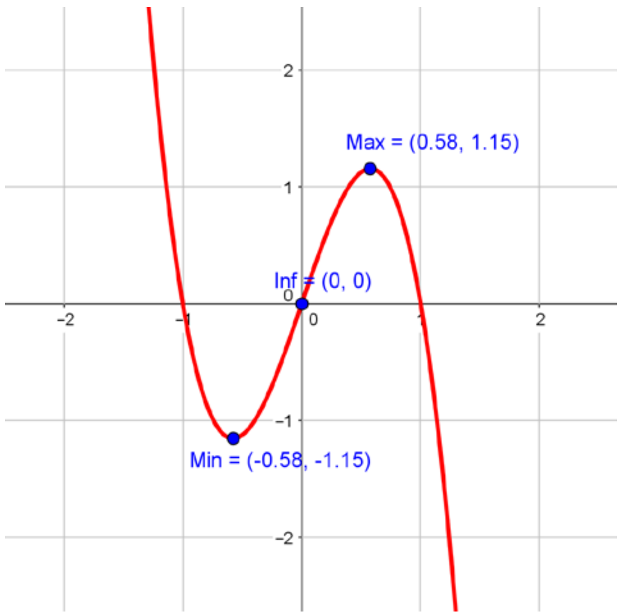
● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(1{,}42;\ 2{,}58)$ y estrictamente creciente en $(-\infty,\ 1{,}42) \cup (2{,}58,\ +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (- 1,42; 0,38) y un mínimo relativo en (2,58; - 0,38).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (2, 0) es de inflexión.

c) Las características de la función f (x) = - 3x$^3$ + 3x son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1,\ 0); (0,\ 0)\ y\ (1,\ 0) \\ OY: (0,\ 0) \end{cases}$$

● Simetría: es simétrica respecto del eje de ordenadas OY.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^3 + 3x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^3 + 3x) = -\infty$$

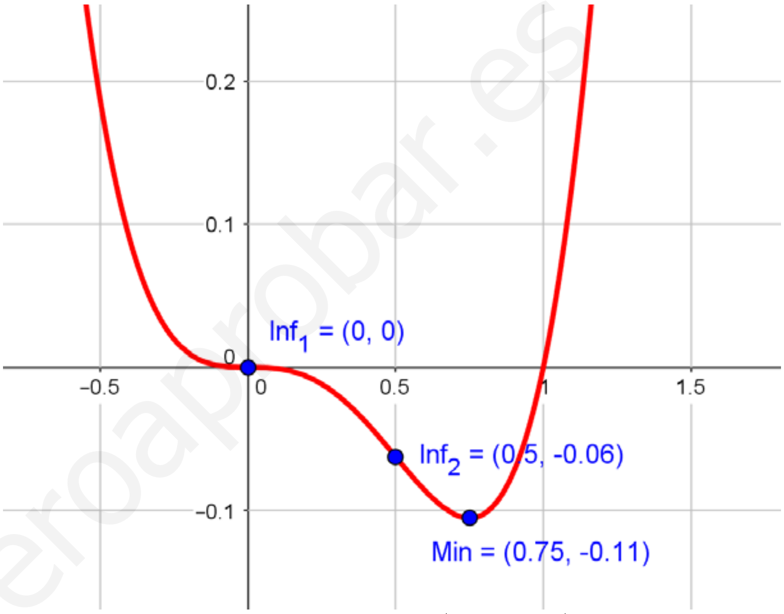
● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-0{,}58; 0{,}58)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0,58; 1,15) y un mínimo relativo en (-0,58; - 1,15).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

d) Las características de f (x) = $x^4 - x^3$ son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (0, 0) \ y \ (1, 0) \\ OY : (0, 0) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

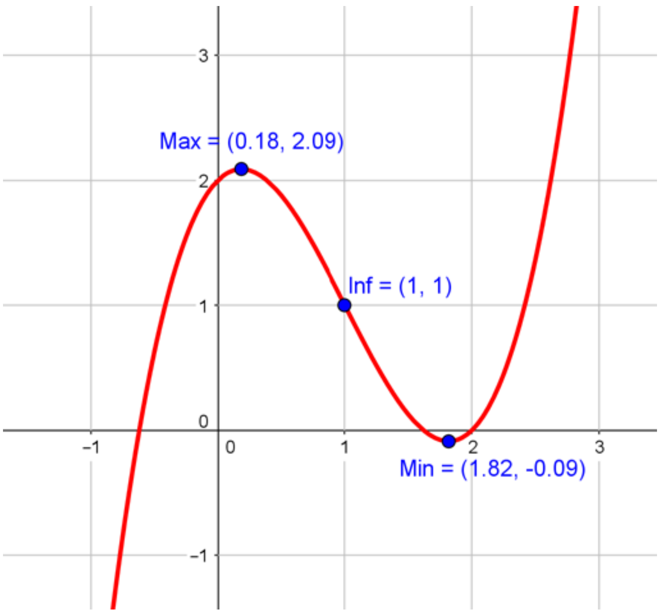
$$\lim_{x \to \mp\infty} (x^4 - x^3) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0{,}75)$ estrictamente creciente en $(0{,}75; +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0,75; - 0,11).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (0{,}5; +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, 0{,}5)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (0, 0) y (0,5; - 0,06) son de inflexión.




e) Las características de f (x) = $x^3 - 3x^2 + x + 2$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-0{,}62, 0); (1{,}62, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY : (0, 2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + x + 2) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0{,}18) \cup (1{,}82\ +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0{,}18;\ 1{,}82)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0,18; 2,09) y un mínimo relativo en (1,28; - 0.09).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

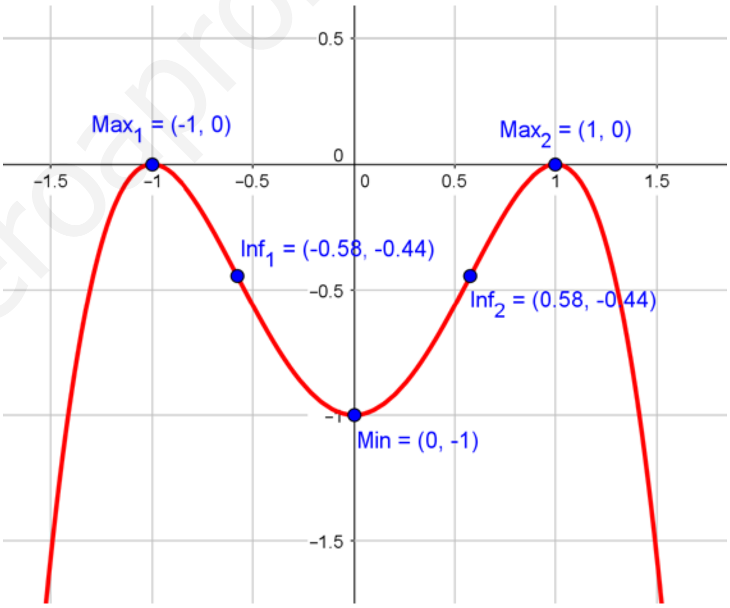
● Puntos de inflexión: el punto (1, 1) es de inflexión.

f) Las características de f (x) = $2x^2 - x^4 - 1$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-1,\ 0)\ y\ (1,\ 0) \\ OY : (0,\ -1) \end{cases}$$




● Simetría: es simétrica respecto de OY.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \mp\infty} (2x^2 - x^4 - 1) = -\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1,\ 0) \cup (1, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (0,\ 1)$.

● Extremos relativos: tiene máximos relativos en (- 1, 0) y (1, 0) y un mínimo relativo en (0, - 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-0{,}58;\ 0{,}58)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58; +\infty)$.

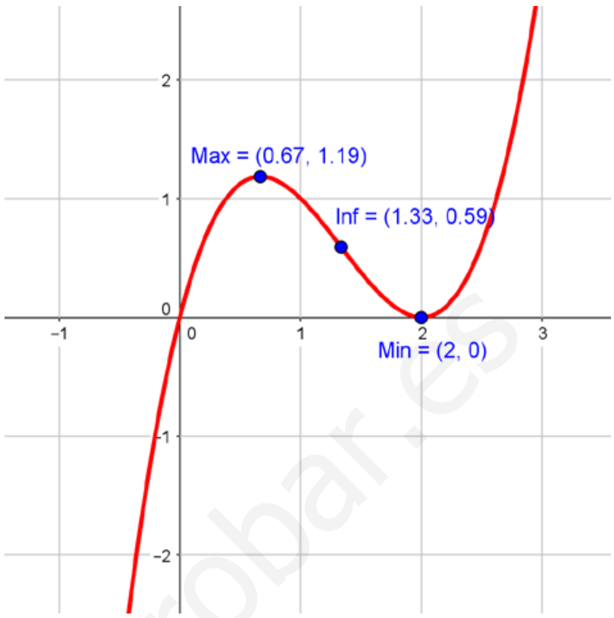
● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; - 0,44) y (0,58; - 0,44) son de inflexión.

g) Las características de f (x) = $x^3 - 4x^2 + 4x$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (0,\ 0)\ y\ (2,\ 0) \\ OY : (0,\ 0) \end{cases}$$




● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty$$

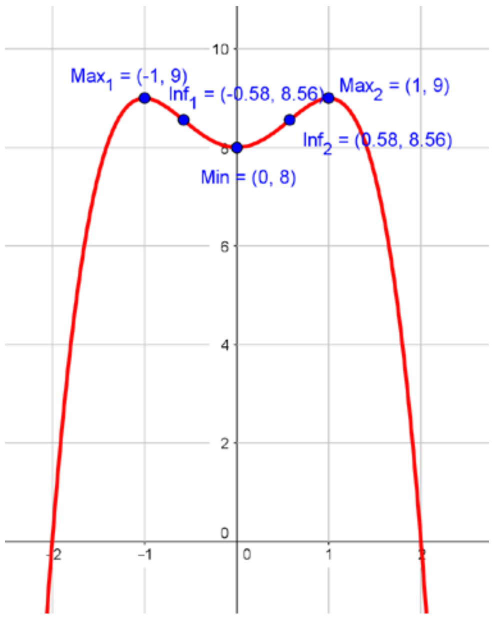
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty,\ 0{,}67) \cup (2\ +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0{,}67;\ 2)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0,67; 1,19) y un mínimo relativo en (2, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ 1{,}33)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1{,}33,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1,33; 0,59) es de inflexión.

h) Las características de f (x) = - $x^4$ + $2x^2$ + 8 son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-\ 2,\ 0)\ y\ (2,\ 0) \\ OY: (0,\ 8) \end{cases}$$

● Simetría: es simétrica respecto de OY.
● Asíntotas: no tiene.
● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \mp\infty} -\ x^4 + 2x^2 + 8) = -\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\ 1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$ estrictamente creciente en $(-\infty,\ -\ 1) \cup (0,\ 1)$.

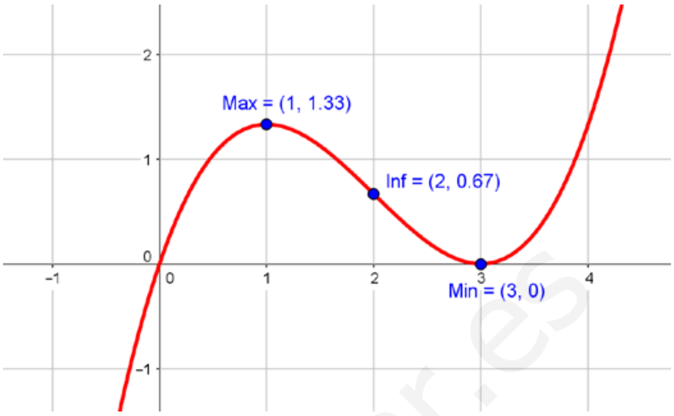
● Extremos relativos: tiene máximos relativos en (- 1, 9) y (1, 9) y un mínimo relativo en (0, 8).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\ 0{,}58;\ 0{,}58)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ -\ 0{,}58) \cup (0{,}58;\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; 8,56) y (0,58; 8,56) son de inflexión.

i) Las características de f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ son:

● Dominio: Dom f = R.




● Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (3, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right) = -\infty \text{ y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right) = +\infty$$

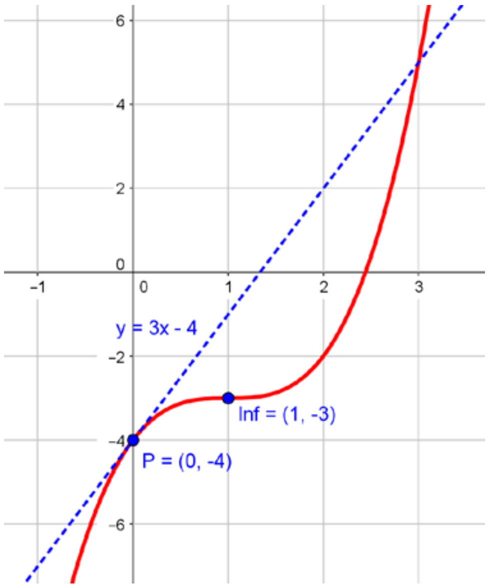
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (3 \ +\infty)$ estrictamente decreciente en $(1, 3)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1; 1,33) y un mínimo relativo en (3, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (2, 0,67) es de inflexión.

**4. Dada la función f (x) = $x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d para que tenga un punto de inflexión en (1, - 3) y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3. Representa gráficamente la función que resulta.**




Las derivadas primera y segunda son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \text{ y } f''(x) = 6x + 2b$$

Imponemos las condiciones f (1) = 3, f ´´ (1) = 0 y f ´ (0) = 3 y obtenemos:

$$\begin{cases} b + c + d = -4 \\ 2b \qquad\quad = -6 \\ \quad\ c \qquad = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 3 \\ d = -4 \end{cases}$$

La función es f (x) = $x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ y su representación gráfica puede verse en el dibujo.

**5. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales:**

**a)** $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ **i)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

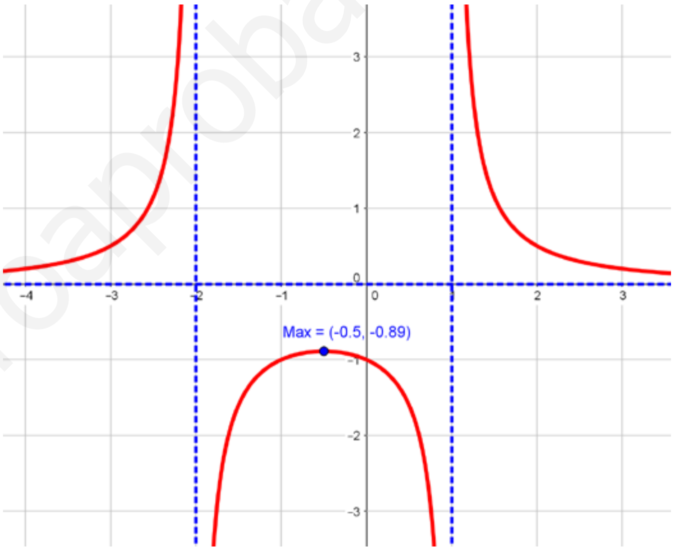
**b)** $f(x) = \dfrac{3x}{1 - x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 3}$ **j)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

**c)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$ **g)** $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ **k)** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

**d)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)}$ **h)** $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ **l)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3x + 3}$

Las características más importantes de cada una de las funciones y su gráfica aparecen a continuación.

a) Las características de $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 2}$ son:




● Dominio: Dom f = R – {- 2, 1}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\{OY : (0, -1)$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 2, x = 1 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, -0{,}5)$ estrictamente decreciente en $(-0{,}5; 1) \cup (1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (- 0,5; - 0,89).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de $f(x) = \dfrac{3x}{1 - x^2}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 1, 1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = - 1, x = 1 e y = 0.

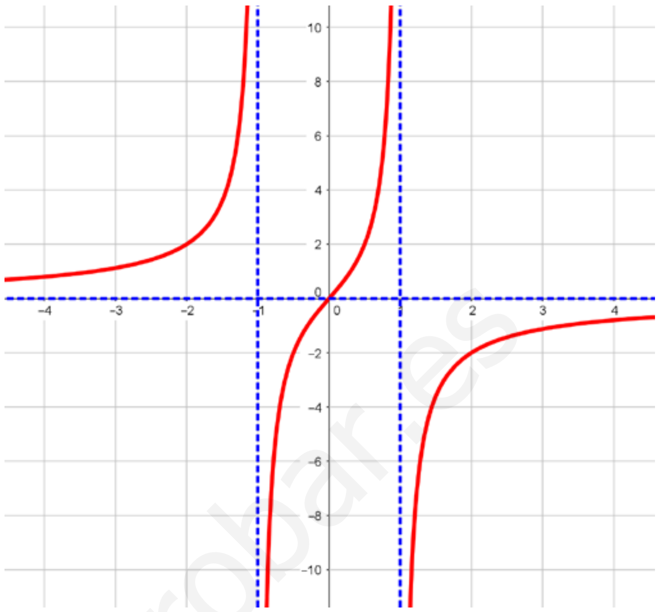
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en R – {- 1, 1}

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

● Puntos de inflexión: el (0, 0) es un punto de inflexión.




c) Las características de $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2-4}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 2, 2}.

● Puntos de corte con los ejes: (0; 0,25); (-0,5; 0) y (0,5; 0)

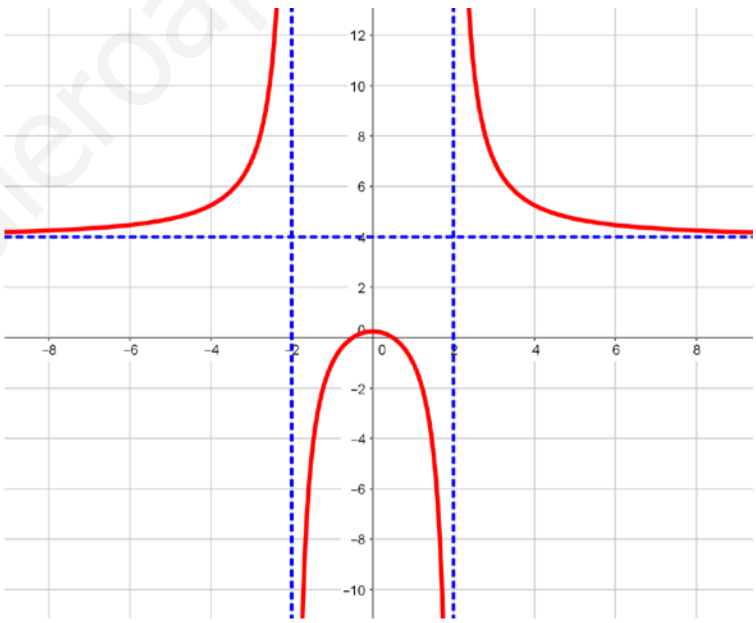
● Simetría: respecto del eje de ordenedas.

● Asíntotas: las rectas x = - 2, x = 2 e y = 4.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y estrictamente decreciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

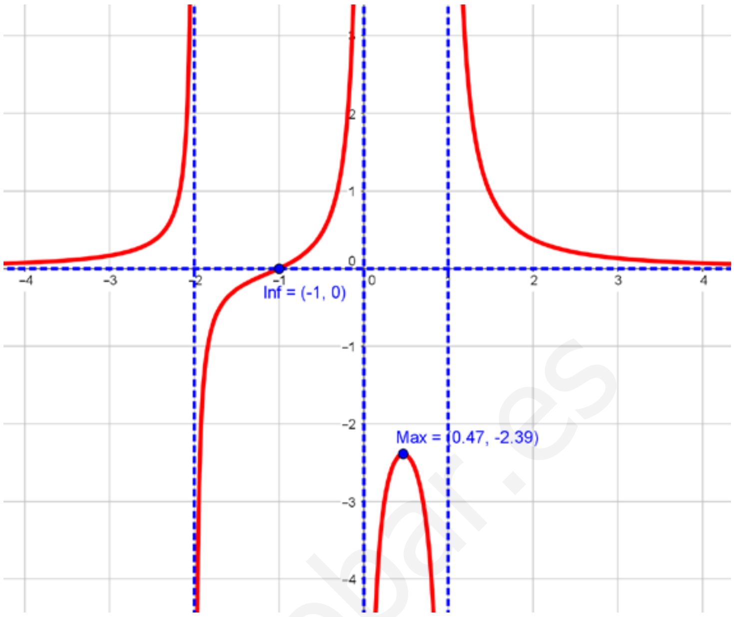
● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0; 0,25).




● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2,2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

d) Las características de $f(x)=\dfrac{x+1}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$ son:




● Dominio: Dom f = R – {- 2, 0, 1}.

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 2, x = 0, x = 1 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

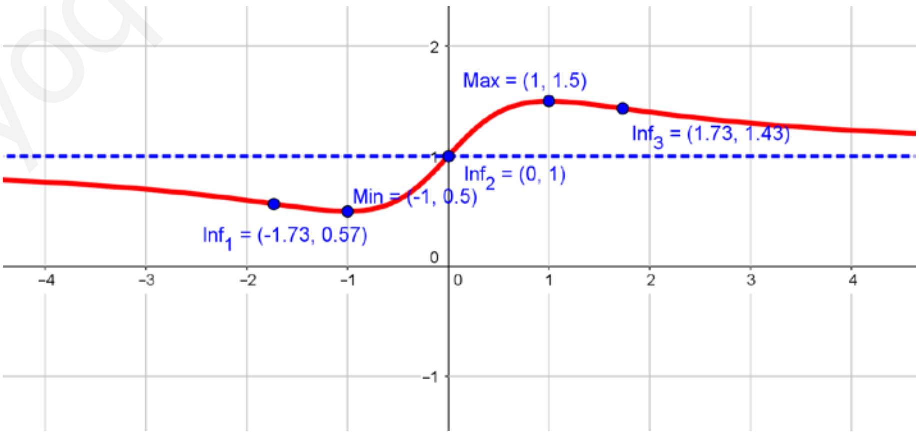
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2,0) \cup (0; 0,47)$ y estrictamente decreciente en $(0,47; 1) \cup (1, +\infty)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0,47; - 2,39).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, -1) \cup (0, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (- 1, 0) es de inflexión.

e) Las características de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 1)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta y = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

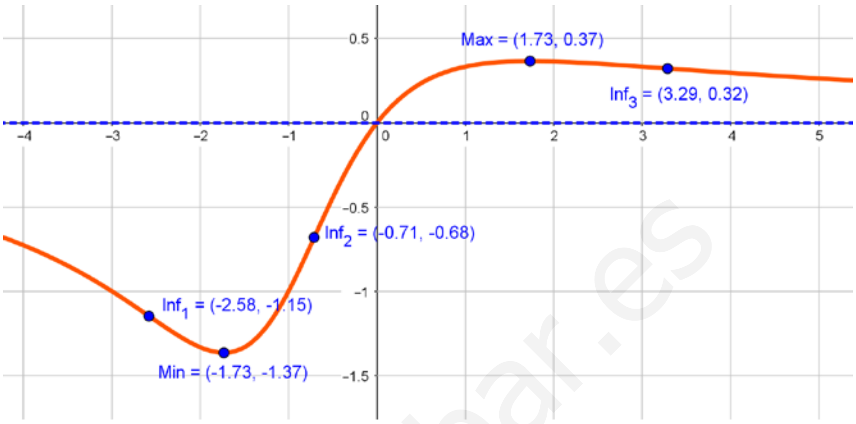
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1; 1,5) y un mínimo relativo en (- 1, 0,5).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1,73) \cup (0, 1,73)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1,73, 0) \cup (1, 73; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 1,73; 0,57; (0, 1) y (1,73; 1,43).

f) Las características de $f\ (x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 3}$ son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

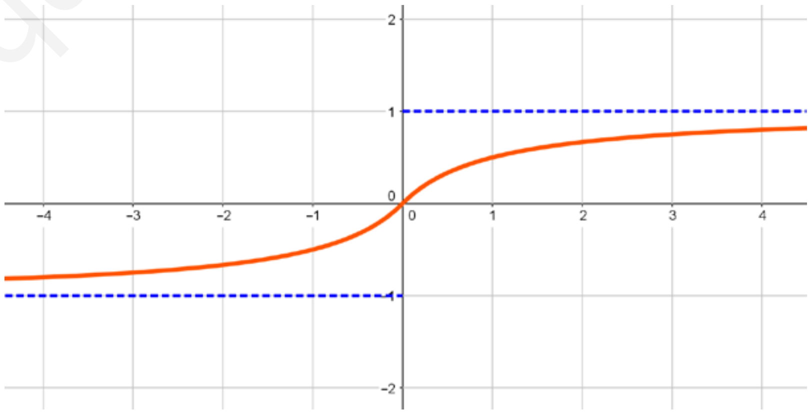
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1{,}73;\ 1{,}73)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,\ -1{,}73) \cup (1{,}73;\ +\infty)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1,73; 0,37) y un mínimo relativo en (- 1,73; - 1,37).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ -2{,}58) \cup (-0{,}71;\ 3{,}28)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2{,}58;\ -0{,}71) \cup (3{,}29;\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 2,58; - 1,15); (- 0,71; - 0,68) y (3,29; 0,32) son de inflexión.

g) Las características de $f\ (x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas y = 1 e y = - 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en R

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0,\ +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty,\ 0)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

h) Las características de $f\ (x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 2)

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: la recta y = 0.

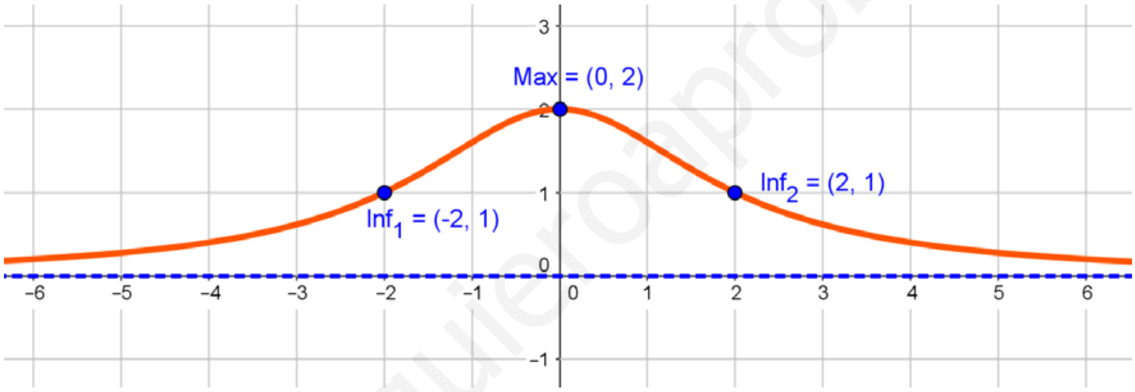
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0, 2).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en R.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 2, 1) y (2, 1) son de inflexión.




i) Las características de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ son:

● Dominio: Dom f = R- {- 1, 1}.

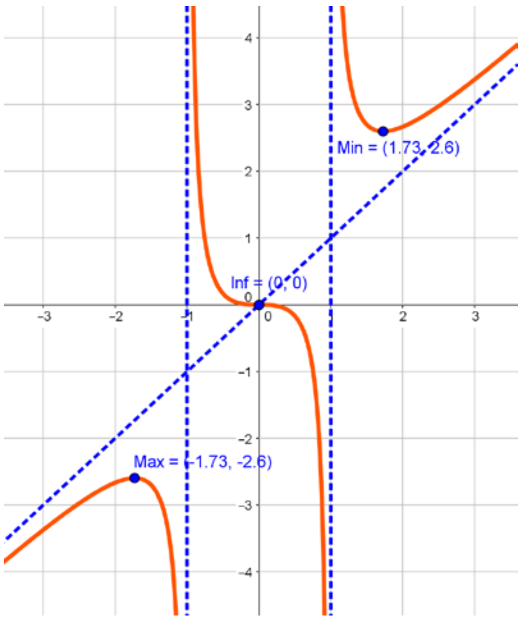
● Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = - 1, x = 1 e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

●Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -1,73) \cup (1,73; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-1,73; -1) \cup (-1,1) \cup (1; 1,73)$

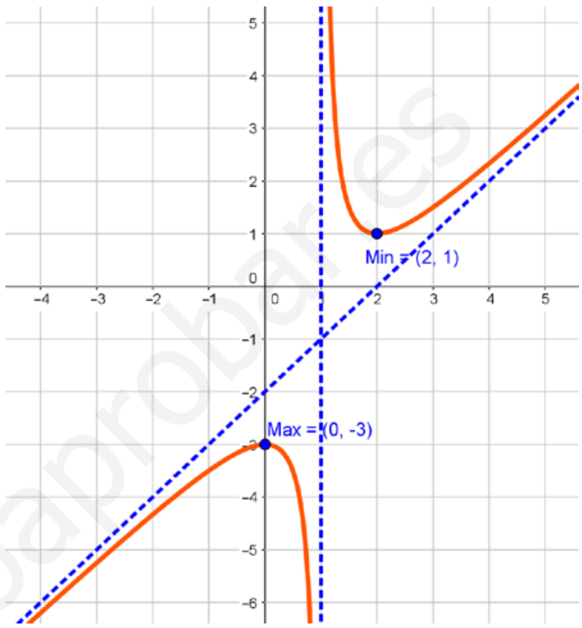



● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (-1,73; -2,6) y un mínimo relativo en (1,73; 2,6).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, 0) \cup (1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

j) Las características de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ son:




● Dominio: Dom f = R - {1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, - 3)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = x - 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

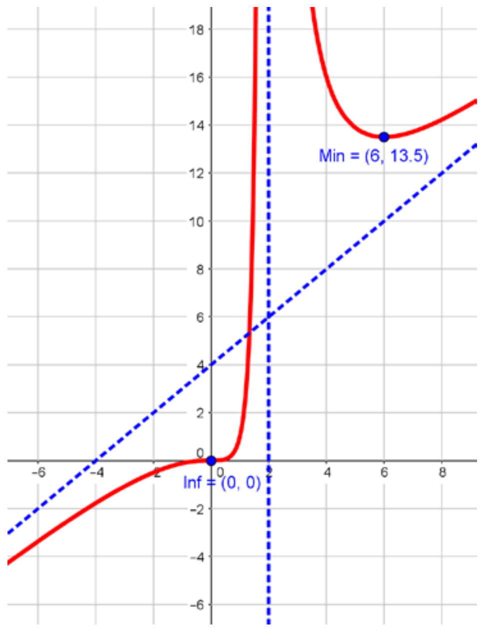
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0, - 3) y un mínimo relativo en (2, 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

k) Las características de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ son:




● Dominio: Dom f = R - {2}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = x + 4.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 2) \cup (6; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(2, 6)$

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (6; 13,5).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0,1) \cup (1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

l) Las características de $f\ (x) = \dfrac{x^3}{3x + 3}$ son:

● Dominio: Dom f = R - {- 1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

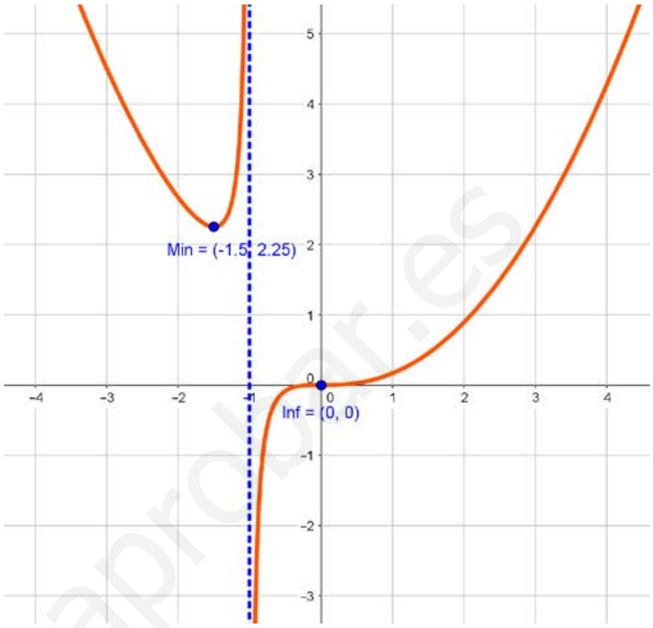
● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = - 1.

● Ramas parabólicas: tiene dos hacia más infinito.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1{,}5; -1) \cup (-1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-1{,}5, -1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 1,5; 2,25).




● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-1, 0)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.



**6. Encuentra el valor del parámetro k para que la recta y = x + 2 sea la asíntota oblicua de la gráfica de la función $f\ (x) = \dfrac{x^3}{(x + k)^2}$. Representa la función obtenida y encuentra el punto de corte de la gráfica con la asíntota.**

**6.** Determinamos el valor del parámetro k calculando el límite:

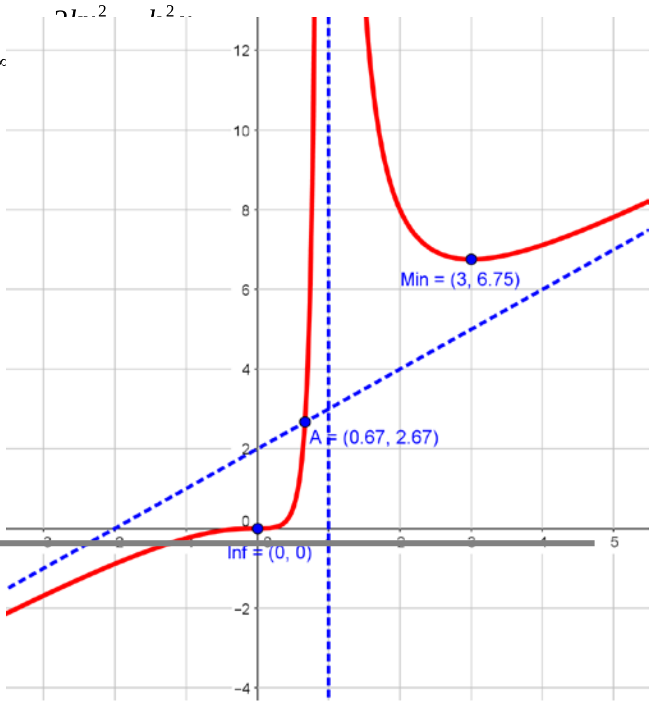
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f\ (x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 2kx + k^2} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty}$$

Como – 2k = 2, entonces k = - 1.

La función es $f\ (x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$, y sus características son:

● Dominio: Dom f = R - {1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0).



● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = x + 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (3; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 3)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (3, 6,75).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$y cóncava hacia las y positivas en $(0,1) \cup (1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión

El punto de corte de la gráfica con la asíntota es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1} \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} = 0{,}67 \\ y = \dfrac{8}{3} = 2{,}67 \end{cases} \Rightarrow A\,(0{,}67;\ 2{,}67)$$

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 297

**7. Representa gráficamente las siguientes funciones:**

**a)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ **e)** $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$

**b)** $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$ **f)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$

a) Las características de la función a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ son:

● Dominio: Dom f = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

● Puntos de corte con los ejes: (- 3, 0) y (3, 0).

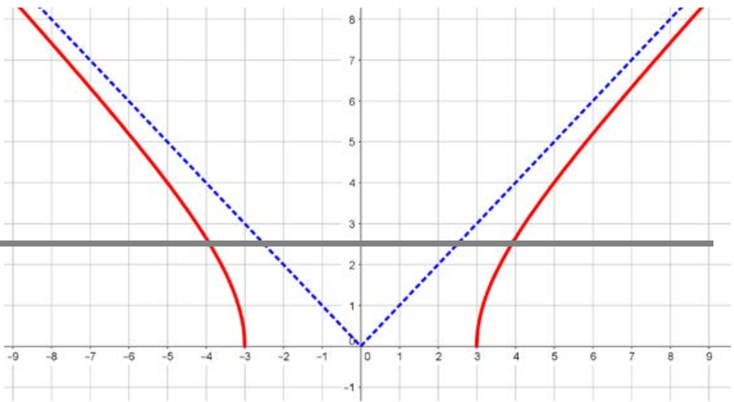
● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: las rectas y = - x e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(3; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$

● Extremos relativos: no tiene.

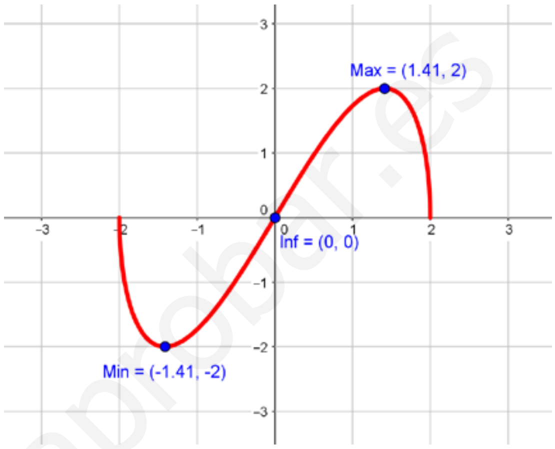


● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(3,+\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: no tiene

b) Las características de la función $f\ (x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$ son:

● Dominio: Dom f = [- 2, 2]




● Puntos de corte con los ejes: (- 2, 0); (0, 0) y (2, 0).

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(-1{,}41;\ 1{,}41\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-2,\ -1{,}41\right)\cup\left(1{,}41;\ 2\right)$

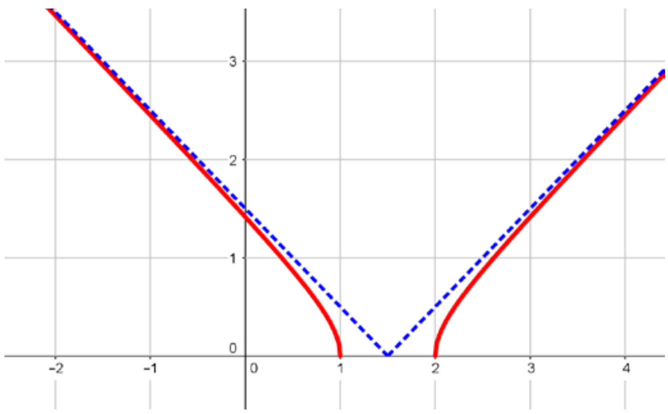
● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1,41; 2) y un mínimo relativo en (- 1,41; - 2).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(0,\ 2\right]$ y cóncava hacia las y positivas en (- 2, 0].

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

c) Las características de $f\ (x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ son:

● Dominio: Dom f = $\left(-\infty,\ 1\right)\cup\left(2,\ +\infty\right)$



● Puntos de corte con los ejes: (1, 0); (2, 0) y $\left(0,\ \sqrt{2}\right)$.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas y = x – 3/2 e y = - x + 3/2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(2,\ +\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-\infty,\ 1\right)$

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty,\ 1\right)\cup\left(2,\ +\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

d) Las características de la función $f\ (x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$ son:

● Dominio: Dom f = $(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$

● Puntos de corte con los ejes: (- 3, 0) y (3, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas y = - 1 e y = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$

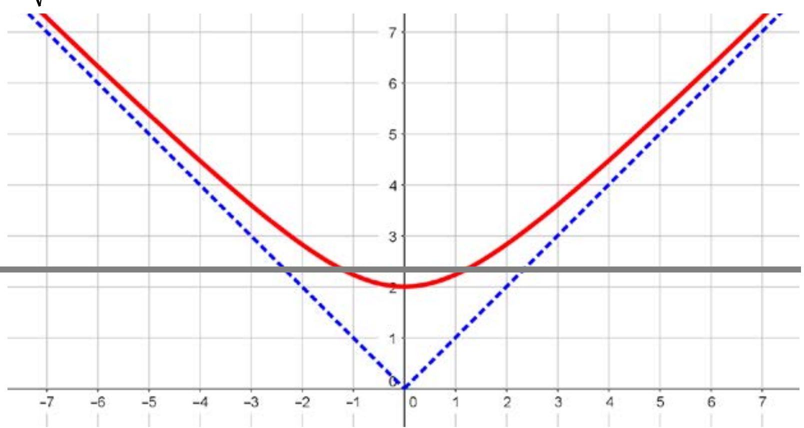
● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(3, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -3)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.




e) Las características de la función $f\ (x)=\sqrt{4+x^2}$ son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 2).

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: las rectas y = - x e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, 2).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en R.

● Puntos de inflexión: no tiene.

f) Las características de la función $f\ (x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ son:

● Dominio: Dom f = $(-2, 2]$

● Puntos de corte con los ejes: (2, 0) y (0, 1).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = - 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-2, 2]$.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 1) es de inflexión.




**8. Representa gráficamente las siguientes funciones:**

**a) f (x) = ln (x + 2)**

**b) f (x) = ln |x + 2|**

**c) f (x) = ln (x² + 4x – 5)**

**e) f (x) = (x – 2) · e^x**

**f) f (x) = x² · e^-2x**

**g) f (x) = (x + 1) · e^-x**

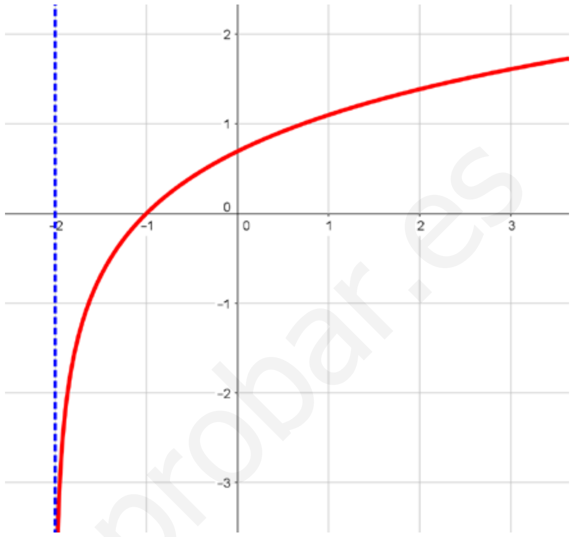
**i) f (x) = x · ln x – 2x**

**j) f (x) = x · ln x**

**k) f (x) = e^x + ln x**

**d)** $f\ (x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ **h)** $f\ (x) = \frac{e^x}{x}$ **l)** $f\ (x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

a) Las características de la función f (x) = ln (x + 2) son:




● Dominio: Dom f = $\left(-2, +\infty\right]$

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0) y (0, ln 2).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = - 2.

● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

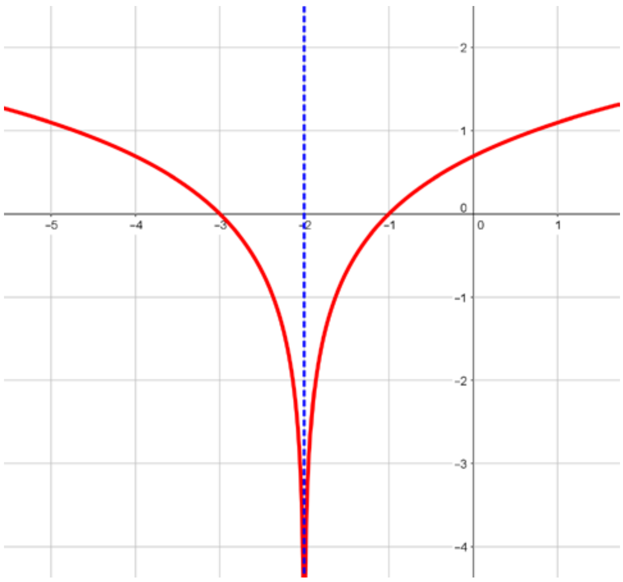
● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(-2, +\infty\right)$.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-2, +\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de la función f (x) = ln |x + 2| son:




● Dominio: Dom f = R – {- 2}.

● Puntos de corte con los ejes: (- 3, 0); (- 1, 0) y (0, ln 2).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = - 2.

● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, -2\right)$ y estrictamente creciente en $\left(-2, +\infty\right)$.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en R – {2}.

● Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de la función f (x) = ln ($x^2$ + 4x – 5) son:

●Dominio: Dom f = $\left(-\infty, -5\right) \cup \left(1, +\infty\right)$.

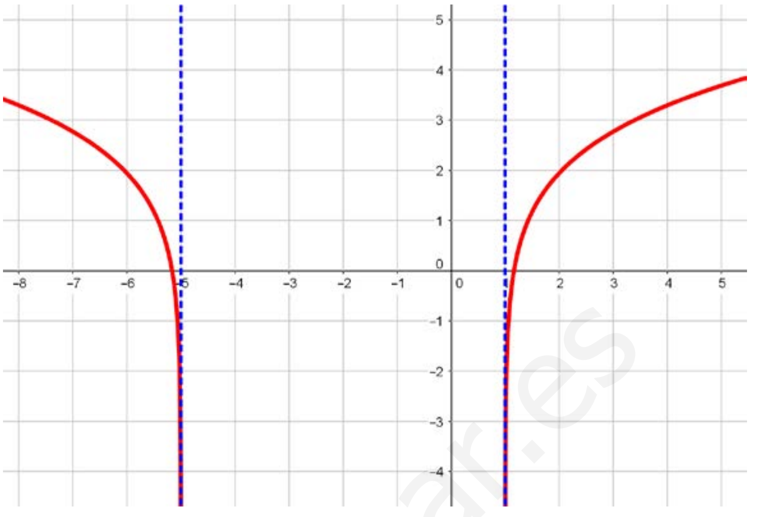
● Puntos de corte con los ejes: (- 5,16, 0) y (1,16; 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 5 y x = 1.

● Ramas parabólicas: tiene dos hacia más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -5)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.



● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

d) Las características de la función $f\ (x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ son:

● Dominio: Dom f = $(-1, 1)$.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

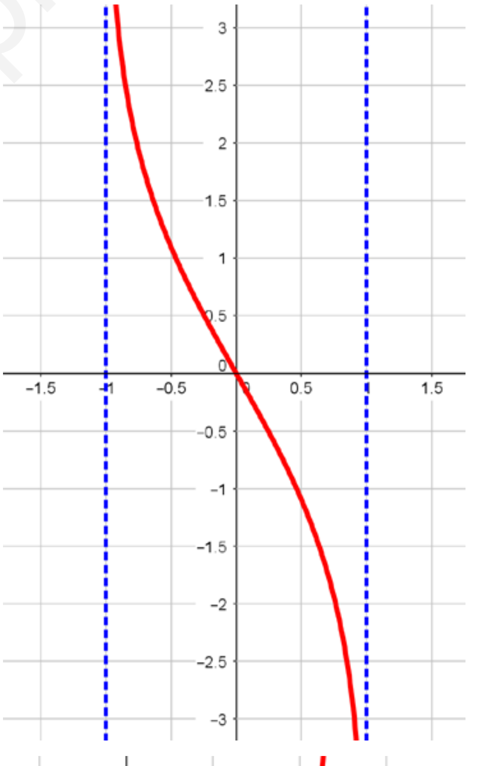
● Asíntotas: las rectas x = - 1 y x = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1, 1)$.

● Extremos relativos: no tiene.

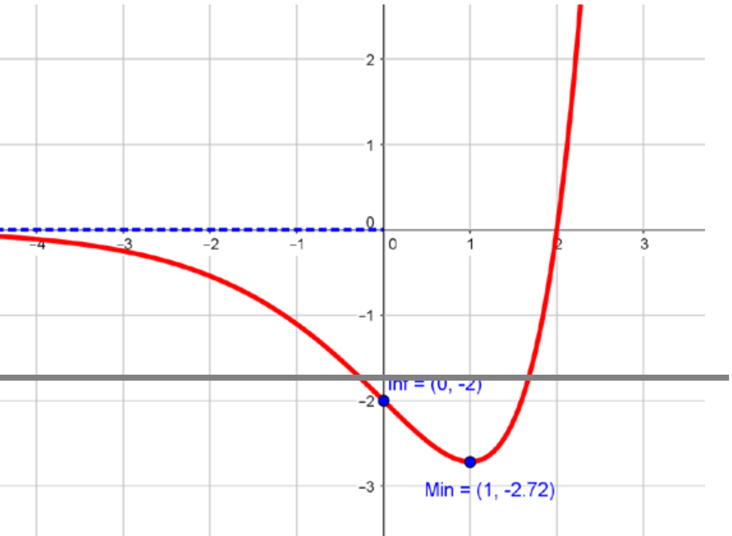
● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en (- 1, 0) y hacia las y negativas en (0, 1).



● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

e) Las características de la función f (x) = (x – 2) · $e^x$ son:

● Dominio: Dom f = R.



● Puntos de corte con los ejes: (2, 0) y (0, -2).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta y = 0.

● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1, - 2,72).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$ y hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, - 2) es de inflexión.

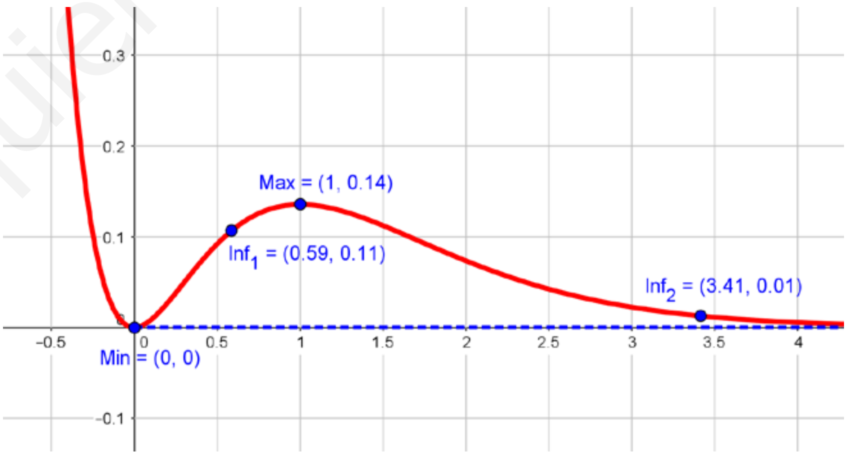
f) Las características de la función f (x) = $x^2 \cdot e^{-2x}$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta y = 0.




● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

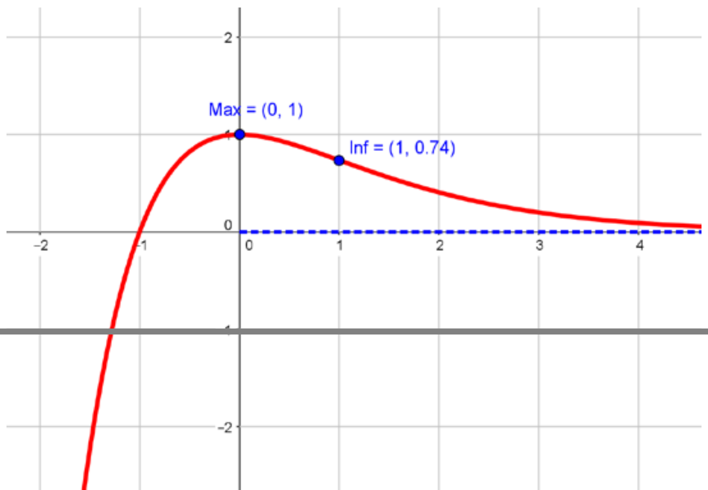
● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(0, 1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (1; 0,14).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0{,}59) \cup (3{,}41; +\infty)$ y hacia las y negativas en $(0{,}59; 3{,}41)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (0,59; 0,11) y (3,41; 0,01) son de inflexión.

g) Las características de la función f (x) = (x + 1) · $e^{-x}$ son:




● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0) y (0,1).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta y = 0.

● Ramas parabólicas: tiene una a menos infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0, 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$y hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1; 0,74) es de inflexión.

h) Las características de la función $f\ (x) = \frac{e^x}{x}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {0}.

● Puntos de corte con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las recta x = 0 e y = 0.

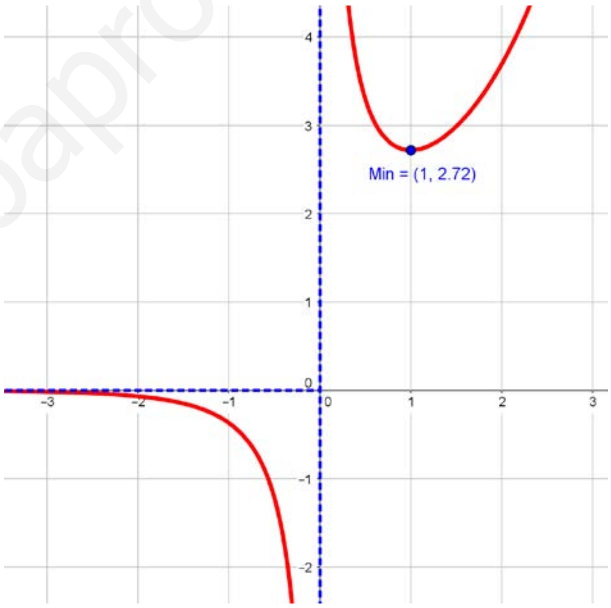
● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0,1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1; 2,72).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$y hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



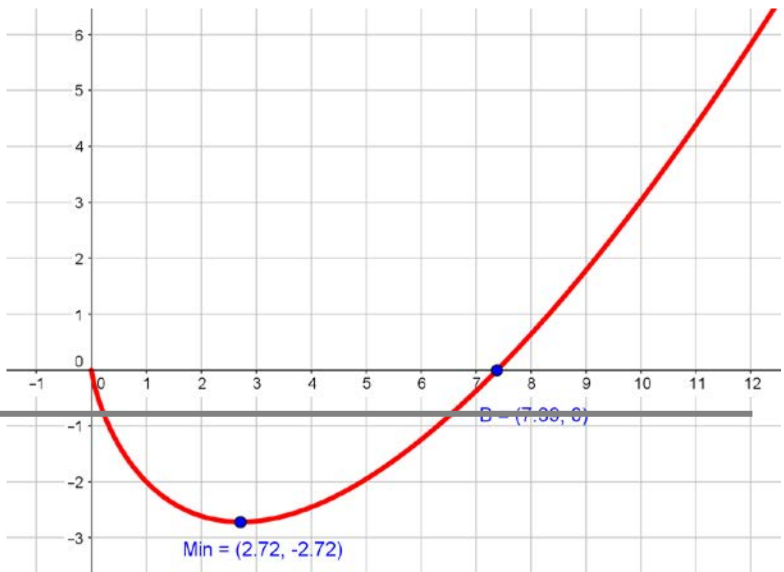

i) Las características de la función f (x) = x · ln x – 2x son:

● Dominio: Dom f = $(0, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes: (7,39; 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.



● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0,\ e)$ y estrictamente creciente en $(e,\ +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (e, - e) = (2,72; - 2,72).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

j) Las características de la función f (x) = x · ln x son:

● Dominio: Dom f = $(0,\ +\infty)$.

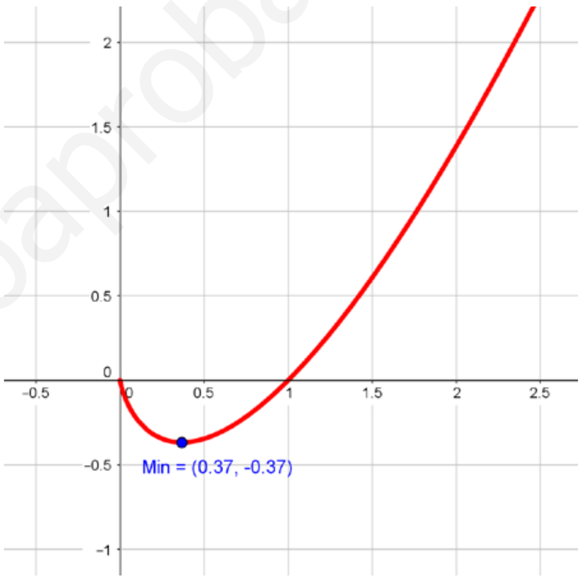
● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0;\ 0{,}37)$ y estrictamente creciente en $(0{,}37;\ +\infty)$.




● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0,37; -0,37).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

k) Las características de la función f (x) = $e^x$ + ln x son:

● Dominio: Dom f = $(0,\ +\infty)$.

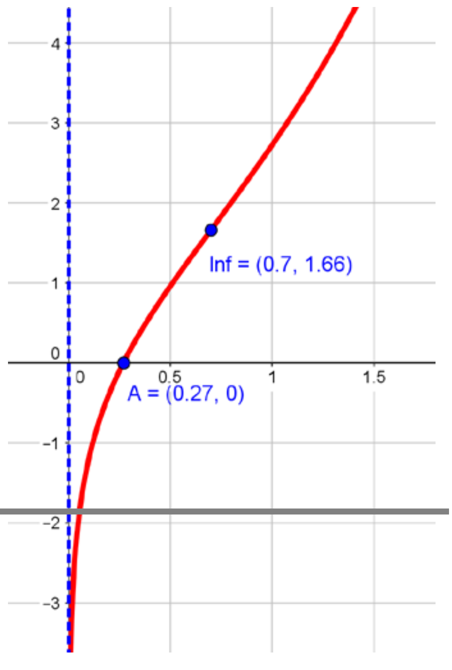
● Puntos de corte con los ejes: (0,27; 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = 0.

● Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(0,\ +\infty)$.



● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en (0; 0,7) y hacia las y positivas en $(0{,}7;+\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0,7; 0,66) es de inflexión.

l) Las características de la función $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {0}.

● Puntos de corte con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0, y = - 1 e y = 1.

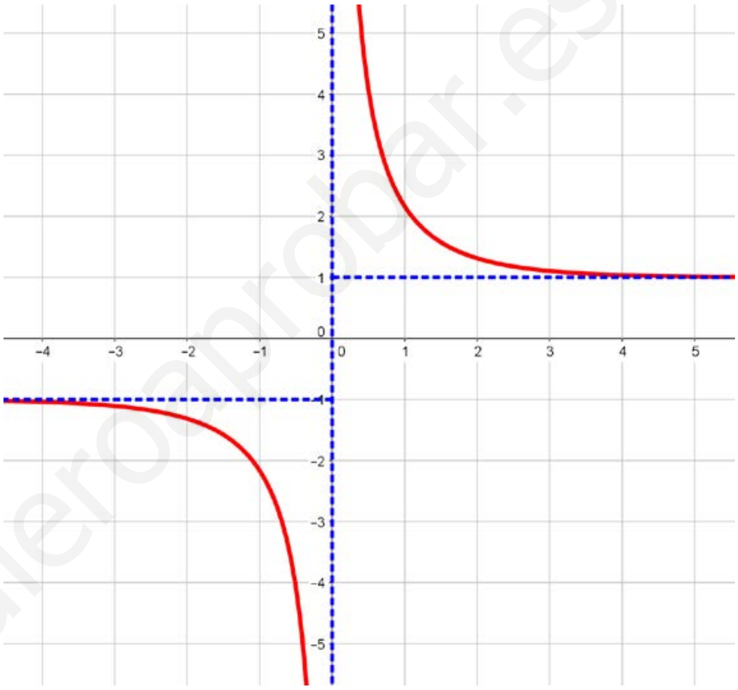
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {0}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,0)$ y hacia las y positivas en $(0,+\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



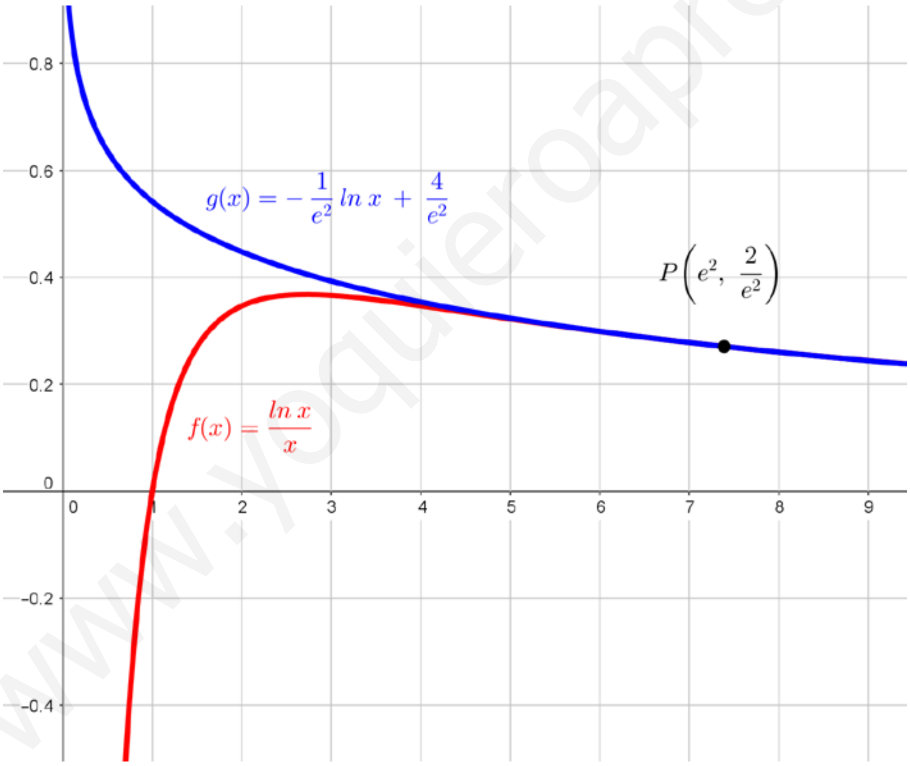
**9. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y g (x) = a ln x + b se corten en el punto $\left(e^2, 2e^{-2}\right)$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación de las funciones resultantes.**

Tiene que cumplirse $g(e^2) = \frac{2}{e^2}$ y $g'(e^2) = -\frac{1}{e^4}$.

Las condiciones anteriores nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{2}{e^2} \\ \frac{a}{e^2} = -\frac{1}{e^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{e^2} \\ b = \frac{4}{e^2} \end{cases}$$

Las gráficas de la funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{e^2}\ln x + \frac{4}{e^2}$ pueden verse a continuación.

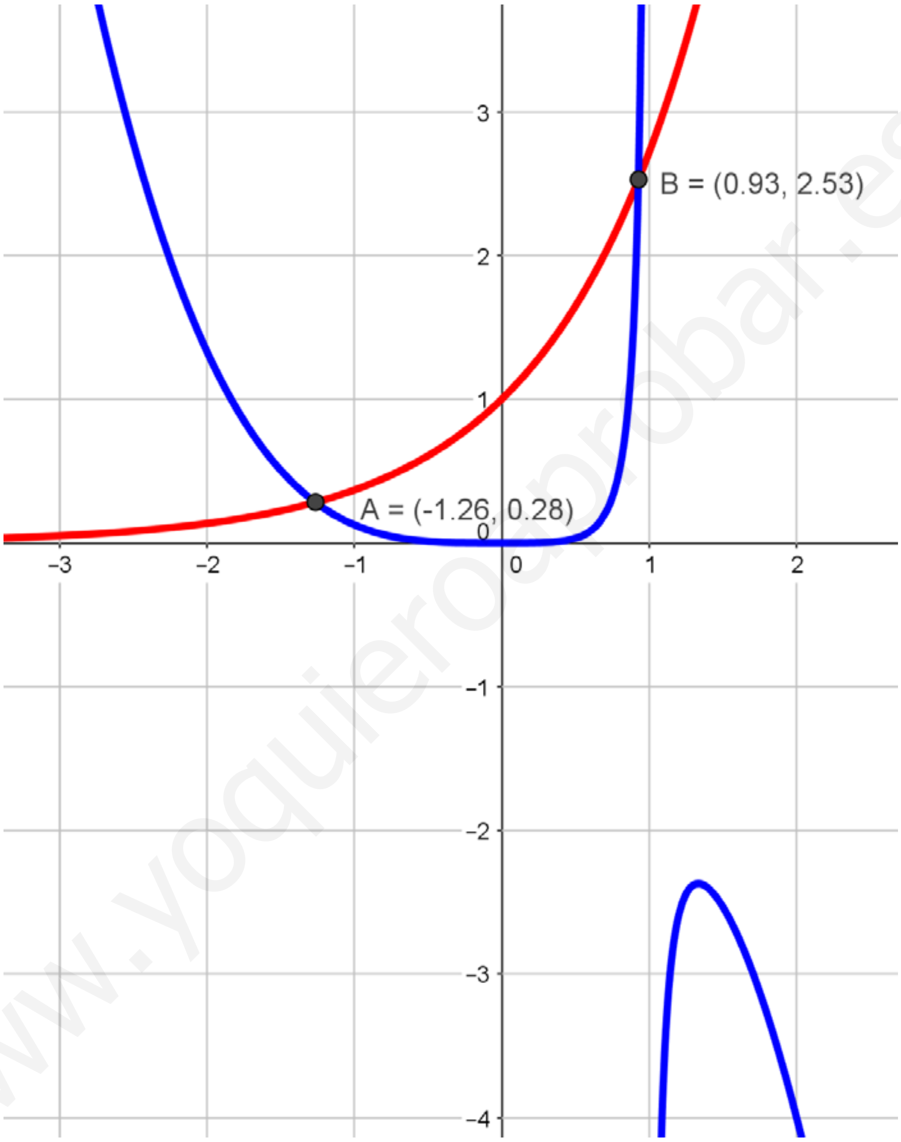



**10. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1)$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones f (x) = $e^x$ y $g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.**

La ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ se puede transformar en: $e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación serán los valores de las abscisas se loas puntos de intersección de las gráficas de las funciones f (x) = $e^x$ y $g\ (x) = \dfrac{-x^4}{4(x-1)}$.

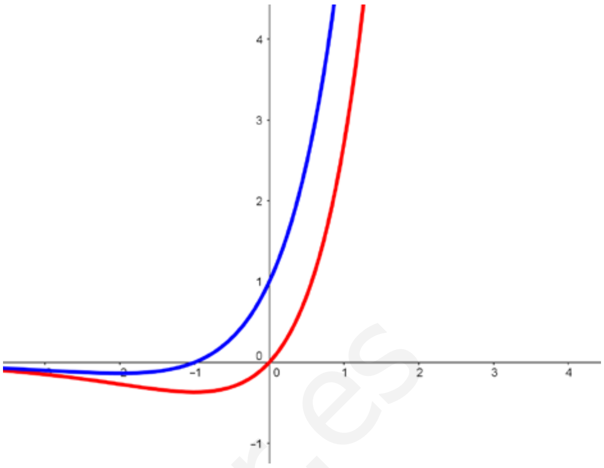
La representación gráfica de ambas funciones puede verse a continuación:




A partir de la representación gráfica observamos que las funciones y = f (x) e y = g (x) se cortan en dos puntos: uno de ellos en el intervalo (-2, - 1) [punto A = (- 1,26; 0,28)] y otro en el intervalo (0, 1) [punto B = (0,93; 2,53)].

**11. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones, la de la función f (x) = x e$^x$ y la de sus derivada f ´ (x).**

**Distingue una de la otra, justificando razonadamente el por qué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de y = f (x).**



La función y su función derivada son f (x) = x · e$^x$ y f ´ (x) = (x + 1) · e$^x$.

La gráfica de y = f (x) es la que pasa por el origen.

Las características pedidas para la función y = f (x) en el enunciado son:

● La función es estrictamente creciente en $(-1, +\infty)$.

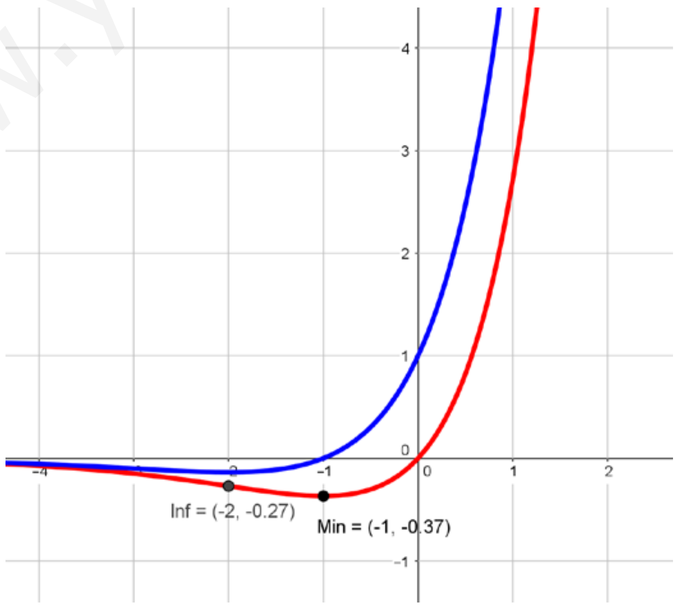
● La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$.

● La función tiene un mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right) = (-1, -0{,}37)$.

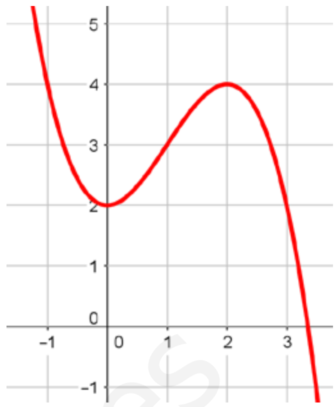
● La función es cóncava hacia las y positivas en $(-2, +\infty)$.

● La función es cóncava hacia las y negativas $(-\infty, -2)$.

● La función tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right) = (-2; -0{,}27)$.



**12. Determina los coeficientes a, b, c y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra el dibujo.**

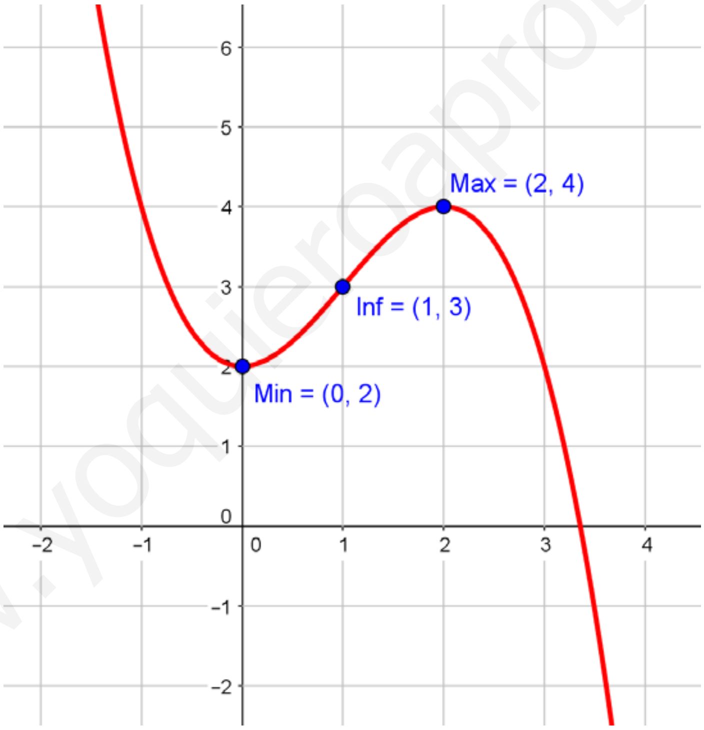


La función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un mínimo en el punto (0, 2) y un máximo en el punto (2, 4). La derivada primera es f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$.

Imponemos las condiciones f (0) = 2; f ´ (0) = 0; f (2) = 4 y f ´ (2) = 0 y obtenemos:

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

La función es $f\ (x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 2$ y su gráfica podemos verla en el dibujo.




**13. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty]$ medido en segundo, por la función:**

$$N\ (t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

**a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es la concentración?**

**b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?**

a) Para estudiar el crecimiento, utilizamos la derivada primera:

$$N'(t) = \frac{-60 \cdot (-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2} = \frac{120\, e^{-t}}{\left(1+2e^{-t}\right)^2} > 0$$ para todo t pues $e^{-t} > 0$.

Por tanto, la concentración de nitrógeno crece con el tiempo.

Como N (t) es creciente, la concentración será mínima para t = 0:

$$N\,(0) = \frac{60}{1+2e^0} = \frac{60}{1+2} = 20.$$

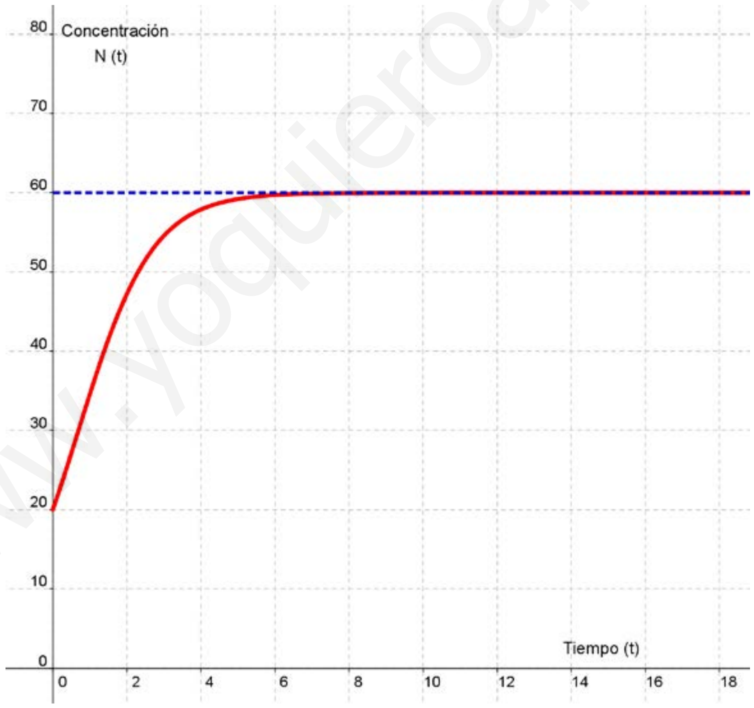
La concentración mínima será del 20%.

b) Hallamos el límite:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{60}{1+2e^{-t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{60}{1+\dfrac{2}{e^t}} = 60$$

Cuando el tiempo tiende a infinito la concentración tiende al 60%.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



## ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 298

**1. Dadas las funciones polinómicas f (x) = ax$^3$ + bx$^2$ + cx + d:**

**a) Halla aquellas cuya derivada segunda sea x – 1.**

**b) ¿Cuál o cuales de ellas tienen un mínimo relativo en el punto** $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$**?**

**c) Realiza su representación gráfica.**

a) Las dos primeras derivadas de la función f (x) = ax$^3$ + bx$^2$ + cx + d son:

$$f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ \text{ y } \ f\,''(x) = 6ax + 2b$$

Si identificamos los polinomios 6ax + 2b con x$^2$ – 1, obtenemos: $a = \frac{1}{6}$ y $b = -\frac{1}{2}$.

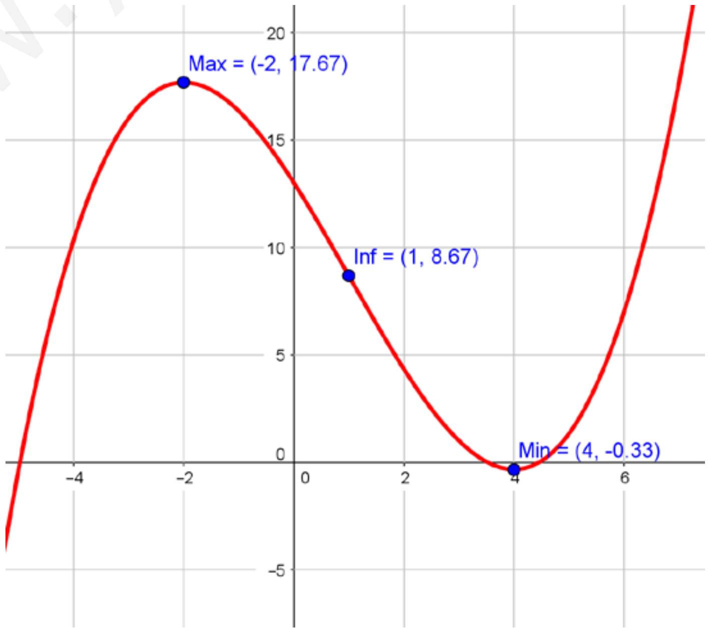
b) La función queda en la forma $f\ (x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ y sus dos primeras derivadas son:

$$f\,'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + c \ \text{ y } \ f\,''(x) = x - 1$$

Si imponemos que tiene un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$, obtenemos:

$$\begin{cases} f\ (4) = -\dfrac{1}{3} \\ f\,'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{6}\cdot 4^3 - \dfrac{1}{2}\cdot 4^2 + 4c + d = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2}\cdot 4^2 - 4 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4 \\ d = 13 \end{cases}$$

c) La función buscada es $f\ (x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$ y su representación gráfica puede verse en el dibujo.




**2. Se considera la función definida por**

$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$.

**a) Calcula a y b para que la gráfica pase por el punto (- 2, - 6) y admita en dicho punto una tangente horizontal.**

**b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.**

a) Imponiendo las condiciones f (- 2) = - 6 y f ´ (- 2) = 0 obtenemos:

$$\begin{cases} -2a + b - 4 = -6 \\ a - \frac{8}{(-2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a \quad\quad = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

b) La función resultante es $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} = \frac{2x^2 + 2x + 8}{x}$ y sus características son:

● Dominio: Dom f = R - {0}.

● Puntos de corte con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0 e y = 2x + 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

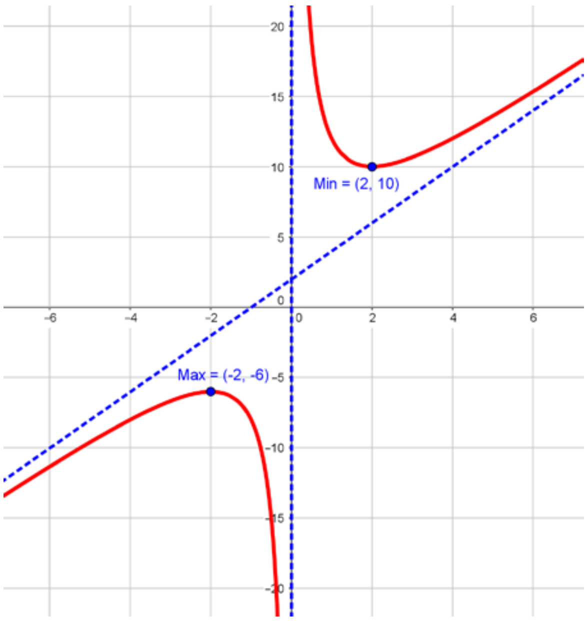
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-2, 2)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (- 2, - 6) y un mínimo relativo en (2, 10).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

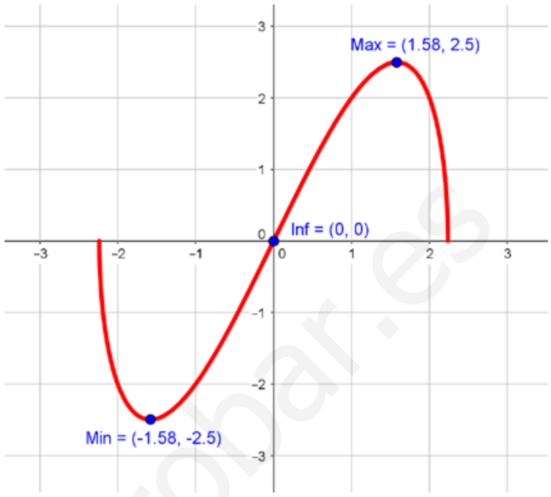
Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.




**3. Representa gráficamente las siguientes funciones:**

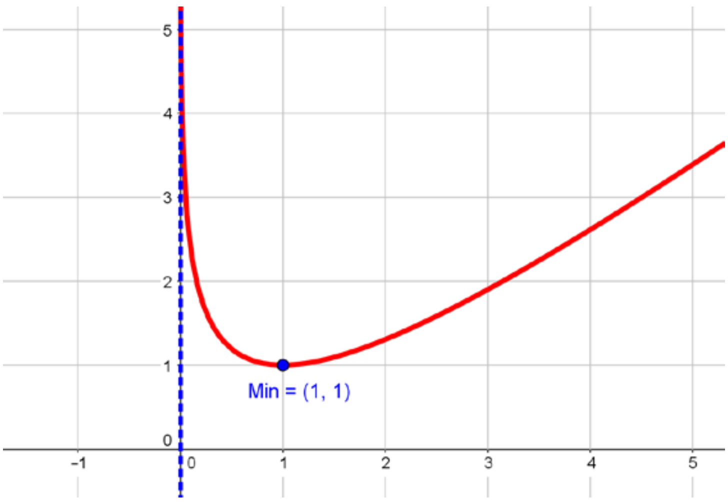
**a)** $f(x) = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$ **b) f (x) = x – ln x** **c)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) Las características de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$ son:




- Dominio: Dom f = $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$
- Puntos de corte con los ejes: $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$; (0, 0) y ($\sqrt{5}$, 0).
- Simetría: respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1{,}58; 1{,}58)$ y estrictamente decreciente en $\left(-\sqrt{5}, -1{,}58\right) \cup \left(1{,}58, \sqrt{5}\right)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1,58; 2,5) y un mínimo relativo en (- 1,58; - 2,5).
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en (-$\sqrt{5}$, 0) y cóncava hacia las y positivas en ($\sqrt{5}$, 0).
- Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

b) Las características de la función f (x) = x – ln x son:




- Dominio: Dom f = $(0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta x = 0.
- Ramas parabólicas: tiene una hacia más infinito.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1, 1).
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de la función $f\ (x) = e^{\frac{1}{x}}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {0}.

● Puntos de corte con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0 e y = 1.

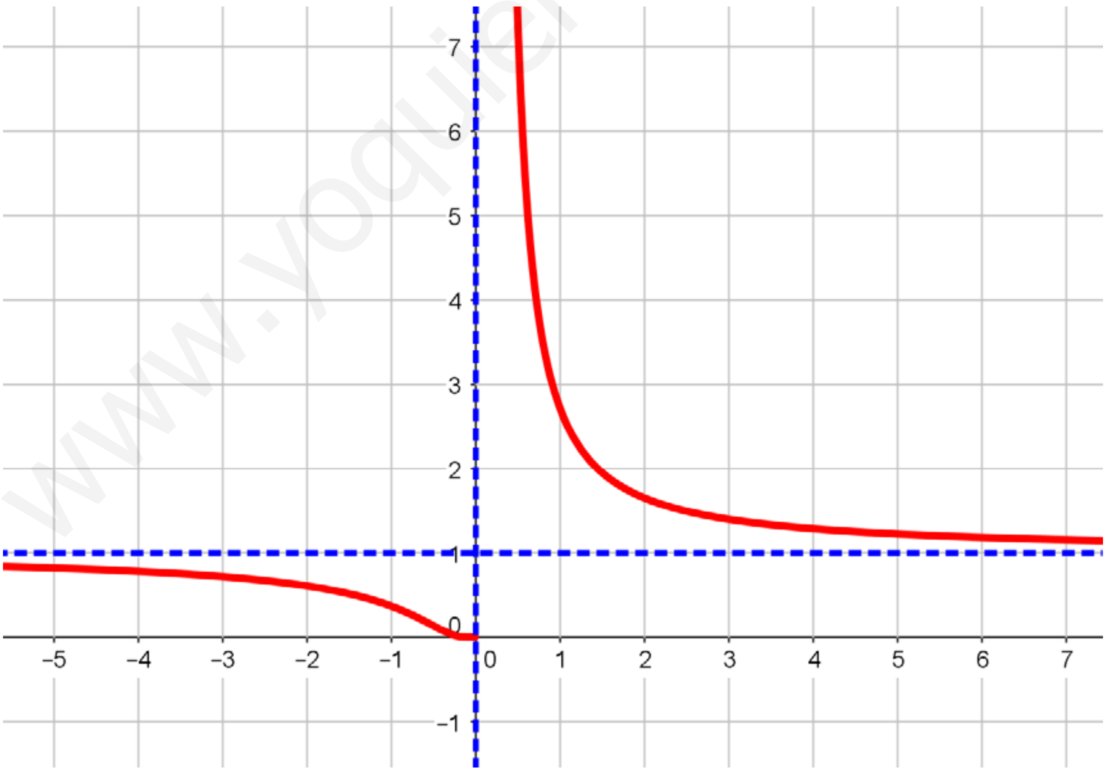
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {0}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0,\ +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



**4. Representa gráficamente la función $f\ (x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.**

Las características pedidas en el enunciado de la función $f\ (x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, 1).

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = 0.

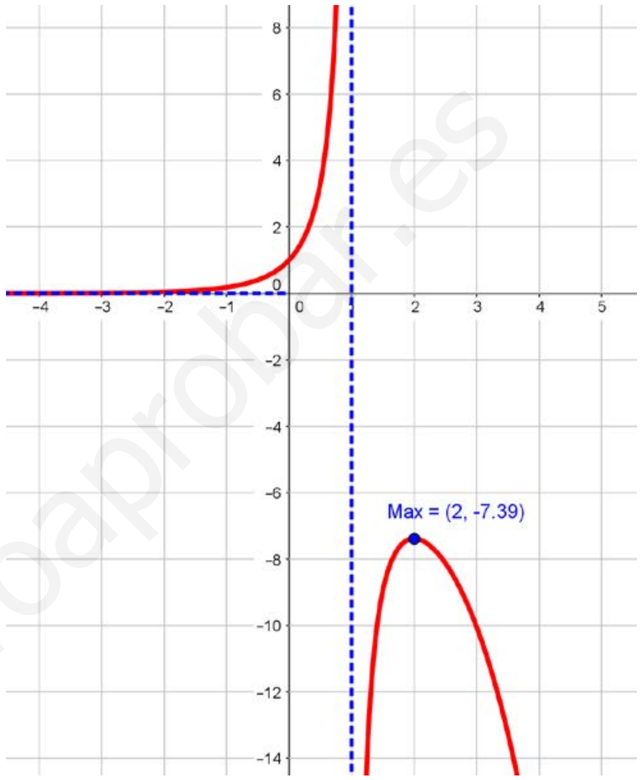
● Ramas parabólicas: tiene una a menos infinito.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en el punto (2; - 7,39).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$.

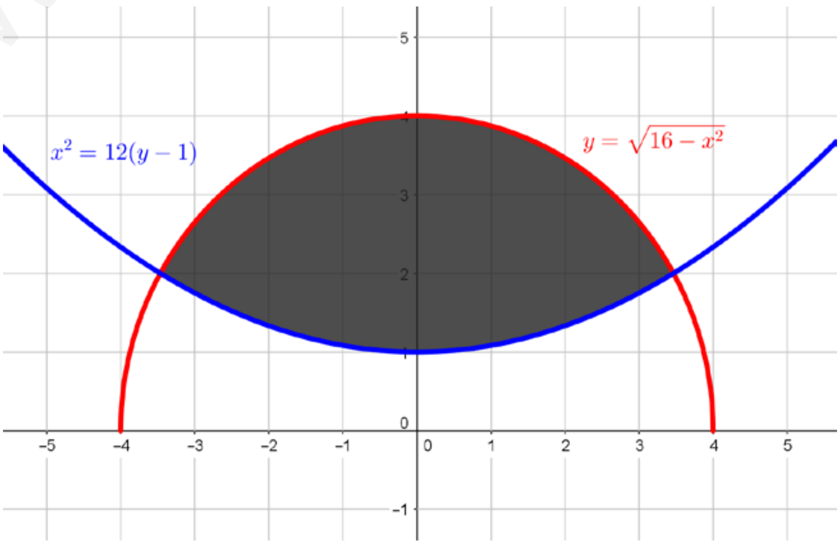
● Puntos de inflexión: no tiene.




**5. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:**

$y = \sqrt{16 - x^2}$ **$x^2 = 12\ (y – 1)$**

La región sombreada, comprendida entre una semicircunferencia (en rojo) y una parábola (en azul), puede verse en el dibujo.




**6. Una partícula se mueva a lo**

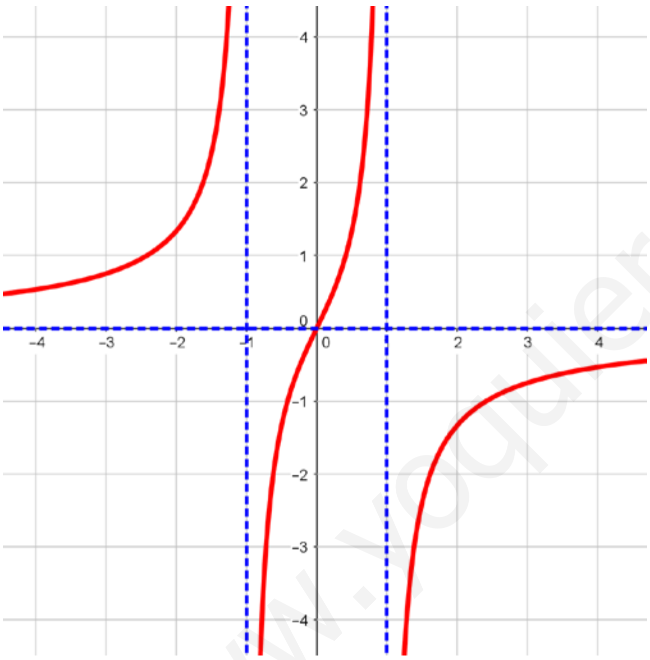
**largo de la gráfica de la función** $f\ (x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ **para x > 1. En el punto** $P\left(2,\ -\dfrac{4}{3}\right)$ **deja a la curva y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.**

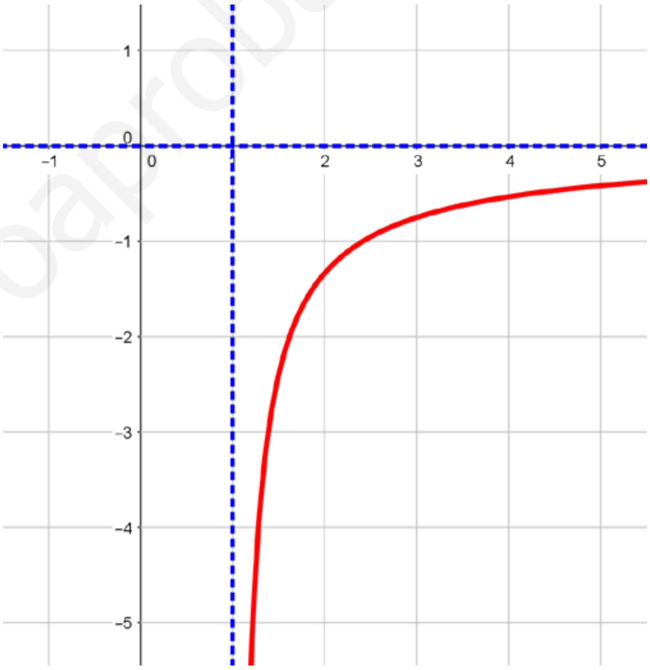
**a) Determina la ecuación de la tangente.**

**b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula se encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.**

**c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra las coordenadas del punto en el que la partícula encuentra al eje OX.**

Las gráficas de las funciones $f\ (x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ en todo su dominio de definición y de la función $f\ (x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ con x > 1 pueden verse a continuación.





a) La derivada de la función es $f\ ´\ (x) = \dfrac{2 + 2x^2}{\left(1 - x^2\right)^2}$ y su valor para x = 2 es $f\ ´\ (2) = \dfrac{10}{9}$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(2,\ -\dfrac{4}{3}\right)$ es:

$$y + \frac{4}{3} = \frac{10}{9} \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad 10x - 9y = 32 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

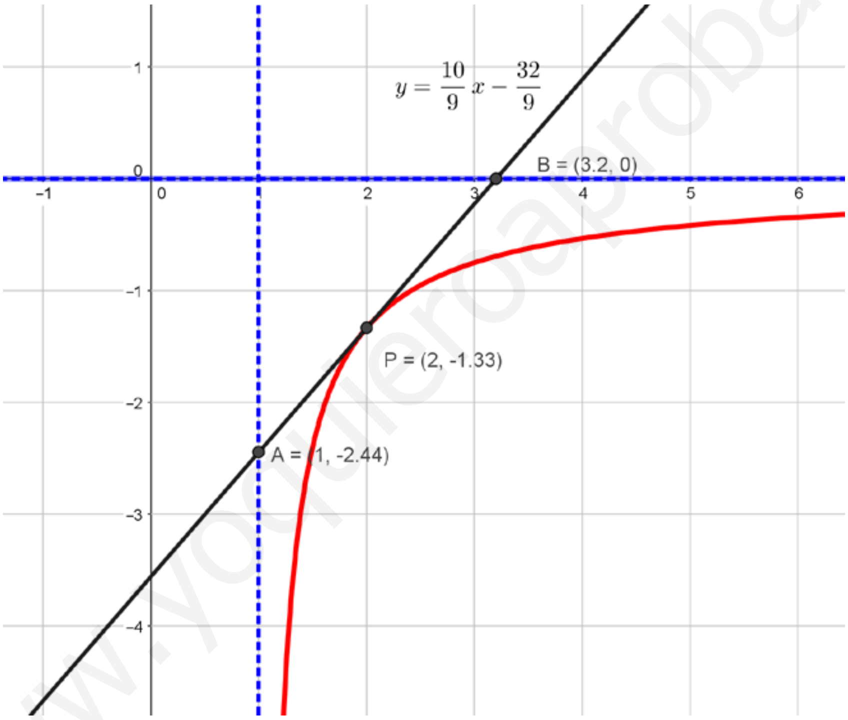
b) El punto, A, de corte entre la tangente y la asíntota x = 1 es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{22}{9} = -2{,}44 \end{cases} \Rightarrow A\,(1;\,-2{,}44)$$

b) El punto, B, de corte entre la tangente y el eje OX es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{32}{10} = 3{,}2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\,(3{,}2;\,0)$$

Todo lo anterior puede verse en el dibujo que sigue.




**7. Dada la función f (x) = x² · |x - 3|, halla:**

**a) Los puntos en los que f (x) no es derivable.**

**b) Sus máximos y mínimos relativos.**

**c) Su representación gráfica.**

a) La función $f(x) = x^2 \cdot |x - 3|$ puede expresarse de la forma siguiente:

$$f(x) = x^2 \cdot |x - 3| = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & si\ x \le 3 \\ x^3 - 3x^2 & si\ x > 3 \end{cases}$$

Las expresiones anteriores son funciones polinómicas y, por tanto, son continuas y derivable para cualquier valor de la variable. Veamos qué ocurre en x = 3, donde cambia la definición de la función. Hallamos las derivadas laterales para ese valor:

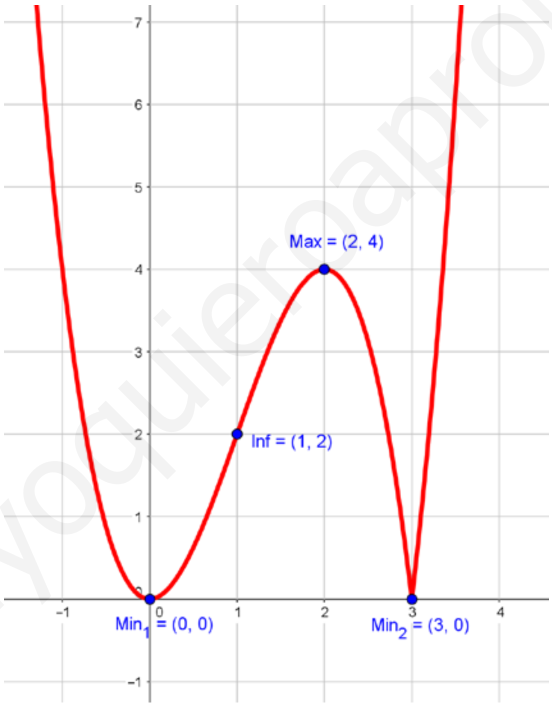
$$f'(3^-) = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^3 + 3x^2 - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 (x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3^-} (-x^2) = -9$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \to 3^{+-}} \frac{x^3 - 3x^2 - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^{+-}} \frac{x^2 (x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3^{+-}} (x^2) = 9$$

La función y = f (x) no es derivable en x = 3.

b) La función presenta un máximo relativo en el punto (2, 4) y dos mínimos relativos en los puntos (0, 0) y (3, 0).

c) La representación gráfica puede verse en el dibujo.




**8. Dada la función** $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$**, se pide:**

**a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.**

**b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

**c) Dibuja la gráfica de y = f (x).**

a) La función y = f (x) está definida para cualquier número real.

Las asíntotas de la gráfica de la función son las rectas y = - 1 e y = 1, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

Para hallar la posición de la curva respecto de las asíntotas evaluamos la diferencia de las ordenadas de la asíntota ($y_A$) con las ordenadas de la función ($y_F$).

Para x > 0, hallamos el signo de la diferencia de ordenadas:

$$y_A - y_F = 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

Por ejemplo, para x = 100, $y_A - y_F$ = - 0,009 < 0. Por tanto, para x > 0 la asíntota va por debajo de la curva.

Para x < 0, hallamos el signo de la diferencia de ordenadas:

$$y_A - y_F = -1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}+(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

Por ejemplo, para x = - 100, $y_A - y_F$ = - 0,010 < 0. Por tanto, para x < 0 la asíntota va por debajo de la curva.

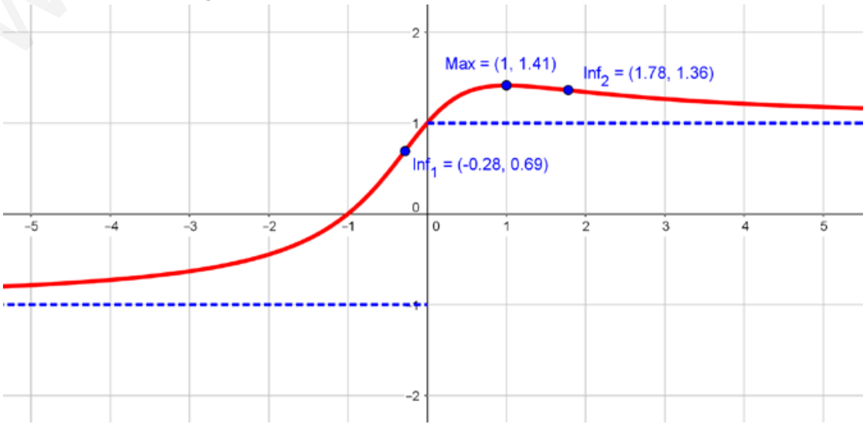
b) La primera derivada de la función y = f (x) es $f'(x) = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$.

Estudiando su signo obtenemos:
- La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
- La función es estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$.
- La función tiene un máximo en el punto $(1, \sqrt{2}) = (1; 1{,}41)$.

c) La segunda derivada de la función y = f (x) es $f''(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{(x^2+1)^5\cdot\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2(x+0{,}28)(x-1{,}78)}{(x^2+1)^5\sqrt{x^2+1}}$.

Estudiando su signo obtenemos:
- La función es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -0{,}28) \cup (1{,}78; +\infty)$.
- La función es cóncava hacia las y negativas en $(-0{,}28; 1{,}78)$.
- La función tiene dos puntos de inflexión en (- 0,28; 0,69) y (1,78; 1,36).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.




## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 299

**Modelos de crecimiento en Biología**

**Analizamos alguno de los modelos propuestos para el estudio del crecimiento de los seres vivos (humanos, animales, plantas, microorganismos…).**

**1. Modelo de Malthus.**

**Thomas R. Malthus (1766-1834) publicó en el *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) el modelo que lleva su nombre y que se caracteriza por el crecimiento continuo o exponencial. La expresión matemática es:**

$$y(t) = y_0 \cdot e^{rt}$$

**En la fórmula anterior, y (t) es el número de individuos presentes en el tiempo t, $y_0$ el tamaño inicial de la población y r un parámetro que expresa el nacimiento o incorporación de nuevos individuos en cantidad constante, generación tras generación.**

**Comprueba que se cumple la relación $y'(t) = r \cdot y(t)$. Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de $y_0$ y el parámetro r, y analiza las gráficas resultantes.**

**2. Modelo de Verhults o ley logística.**

**Pierre F. Verhults (1804-1849) modificó, en 1838, el modelo de maltusiano considerando el hecho de que debe haber una tamaño máximo de la población o valor k, ya que el espacio (o el agua o los alimentos o medio ambiente) es limitado. Obtuvo la siguiente expresión:**

$$y(t) = \frac{k \cdot y_0}{y_0 + (k - y_0) \cdot e^{-rt}}$$

**Comprueba que se cumple la relación $y'(t) = r \cdot y(t) \cdot (k - y(t))$. Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de las variables k, r e $y_0$, analiza las gráficas resultantes. Compara los resultados obtenidos con el modelo anterior.**

**3. Otros modelos.**

**Existen otros modelos que estudian el crecimiento en situaciones más restringidas. Son el modelo de Gompertz y el modelo de von Bertalanffy. Busca sus expresiones matemáticas, representa gráficamente las funciones resultantes y analiza las gráficas obtenidas.**

**Busca contextos distintos de la Biología donde se apliquen alguno de estos modelos.**

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre los modelos de crecimiento.

● AMELKIN, V. V. (2003). *Ecuaciones diferenciales en la práctica.* Editorial URSS. Moscú.

● LAHOZ-BELTRA, Rafael. (2010). *Las matemáticas de la vida.* RBA. Barcelona.

● MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid.

● STEWART, Ian. (2011). *Las matemáticas de la vida*. Crítica. Barcelona.

● http://www.ecologia.info/leyes.htm

- www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt