UNIDAD 10: Aplicaciones de las derivadas

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 248

1. Estudia la continuidad y derivabilidad, en el punto de abscisa x = 0, de las funciones:

a) f (x) = x + |x| **b)** $g\,(x) = \sqrt[3]{x^2}$

a) La función $f\,(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ 2x & si\ x > 0 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 0$ al cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f\,(x) = 0$$ y, además, f (0) = 0.

La función f (x) no es derivable en $x_0 = 0$ ya que sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f\,(x) - f\,(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{0}{x} = 0 \\ f\,'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f\,(x) - f\,(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{x} = 2 \end{array}\right\}$$

b) La función $g\,(x) = \sqrt[3]{x^2}$ es continua en toda la recta real, por tanto, es continua en $x_0 = 0$. Estudiemos su derivabilidad en $x_0 = 0$.

$$g\,'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g\,(0+h) - g\,(0)}{h} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

$$g\,'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g\,(0+h) - g\,(0)}{h} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

La función g (x) no es derivable en x = 0.

2. Demuestra que la función f (x) = 3^{-x} es estrictamente decreciente.

Veamos que para todo par de números reales x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ se cumple $3^{-x_1} > 3^{-x_2}$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{-(x_2 - x_1)} = \frac{1}{3^{x_2 - x_1}} > 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{1}{3^{x_2}}}{\dfrac{3^{x_1}}{3^{x_2}}} = \frac{3^{x_1}}{3^{x_2}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{3^{x_1}} = 3^{-x_1} > 3^{-x_2} = \frac{1}{3^{x_2}}$$

Otra forma de ver que la función dada es estrictamente decreciente:

La derivada de la función f (x) = 3^{-x} es f ´ (x) = - 3 · ln 3 · 3^{-x}.

La derivada anterior es siempre negativa, por tanto, la función es estrictamente decreciente.

3. Escribe el número 10 como suma de dos números naturales tales que la suma del cuadrado de uno y del doble del otro sea mínima.

Sean x y 10 – x los dos números buscados. La función que tenemos que hacer mínima es:

$$S(x) = x^2 + 2 \cdot (10 - x), \text{ es decir, } S(x) = x^2 - 2x + 20$$

Hallamos las dos primeras derivadas:

$$S'(x) = 2x - 2 \quad \text{y} \quad S''(x) = 2$$

El valor que anula la primera derivada es:

$$S'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Los números buscados son 1 y 9 y el valor de la suma mínima es $S(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 20 = 19$.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 265

1. Teoremas. A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

«La suma de dos números naturales impares es un número par»

La solución queda:

Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par.

Este resultado es verdadero: $(2n + 1) + (2m + 1) = 2 \cdot (n + m + 1)$ que es un número par.

Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares.

Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par.

Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

Contrarrecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares.

Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número imanar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. Desigualdad. Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$$

La solución es:

Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podríamos decir que $m = \sqrt{a}\ \ y\ n = \sqrt{b}$; así la desigualdad quedaría de la forma:

$$\frac{2}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}} \leq m \cdot n$$

Operando en esta desigualdad obtenemos $\frac{2m^2n^2}{m^2 + n^2} \leq m \cdot n$ o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que:

$$m \cdot n - \frac{2m^2n^2}{m^2 + n^2} \geq 0.$$

Operando convenientemente en la primera expresión, obtenemos:

$$m \cdot n \left[\frac{m^2 + n^2 - 2mn}{m^2 + n^2} \right] = m \cdot n \frac{(m-n)^2}{m^2 + n^2}$$

Y como m y n son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero, que es lo que queríamos demostrar.

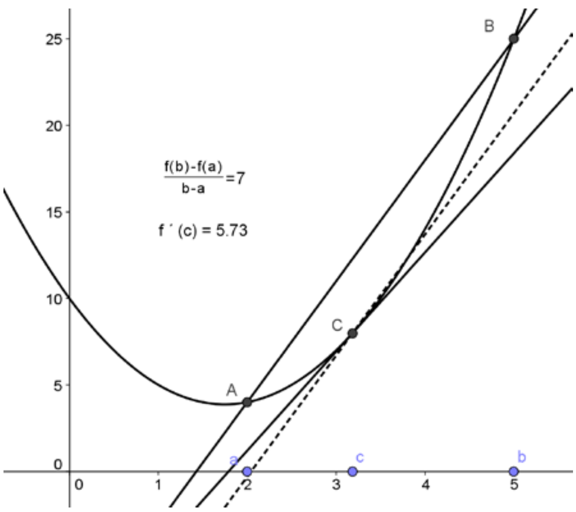
ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 267

1. Visualiza el teorema del valor medio para las funciones siguientes, en los intervalos que se indican, y encuentra el valor o valores cuya existencia garantiza el teorema.

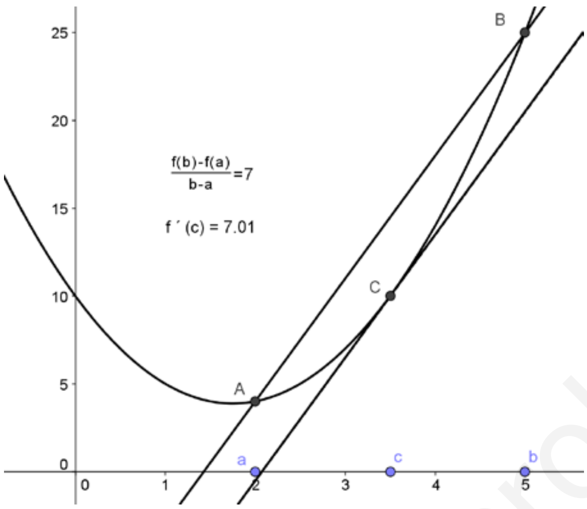
a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ **en [2, 5]**

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & si\ -2 \leq x \leq -1 \\ (x^2 - 3)/2 & si\ -1 < x \leq 0 \end{cases}$

a) Seguimos los pasos descritos en el epígrafe TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Adecuando los ejes coordenados con la herramienta **Desplazar Vista Gráfica** obtenemos una construcción como puede verse en la imagen.



El punto que garantiza el teorema, donde las pendientes de las rectas coinciden, es c = 3,5 $\in$ [2, 5], como puede verse en la imagen.



b) Seguimos los pasos descritos en el epígrafe TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

- Dibujamos la gráfica de la función tecleando en el **Campo de En**trada los comandos **Funcion[1/x,-2,-1]** y **Funcion[(x^2-3)/2,-1,0]**. Adecuamos los ejes coordenados con la herramienta **Desplazar Vista Gráfica**.

- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, sobre el eje OX, los puntos A (de abscisa x = - 2), B (de abscisa x = 0), C (de abscisa entre – 2 y - 1) y D (de abscisa entre -1 y 0). En el menú conceptual de cada punto los renombramos como a, b, c y d, respectivamente.

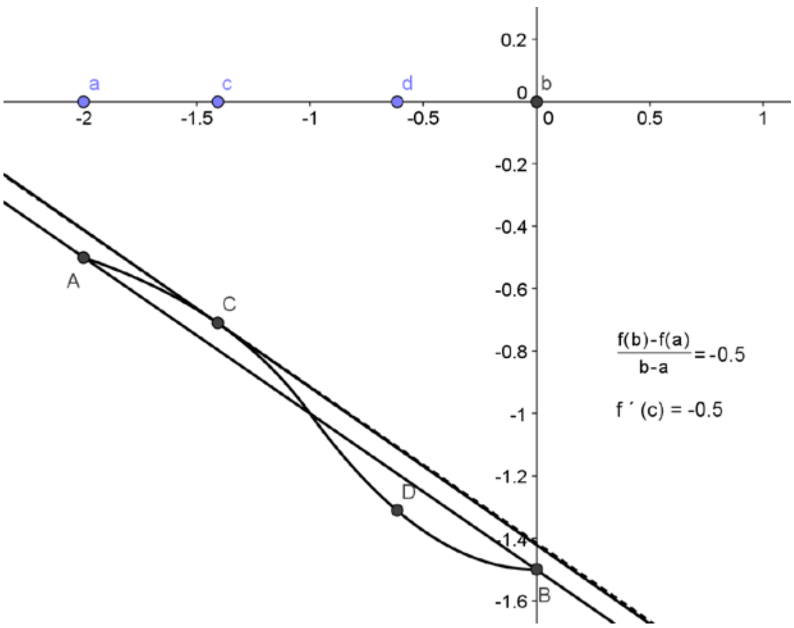
- Introducimos en el **Campo de Entrada** los puntos situados sobre la gráfica de la función A=(x(a),f(x(a))), B=(x(b),g(x(b))), C=(x(c),f(x(c))) y D=(x(d),g(x(d))).

- Dibujamos la recta que pasa por A y B con la herramienta **Recta que pasa por Dos Puntos**. Con la herramienta **Recta Paralela** dibujamos la recta que pasa por C y es paralela a la recta anterior (línea discontinua). Con el comando **Tangente[x(c),f]** trazamos la recta tangente a la gráfica en el punto C.

- Con la herramienta **Pendiente** determinamos y dibujamos las pendientes de las tres rectas anteriores y en el mismo orden en el que las hemos dibujado.

- Con **Inserta Texto** tecleamos "$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ =" +m y "f´(c) = " +m_2.

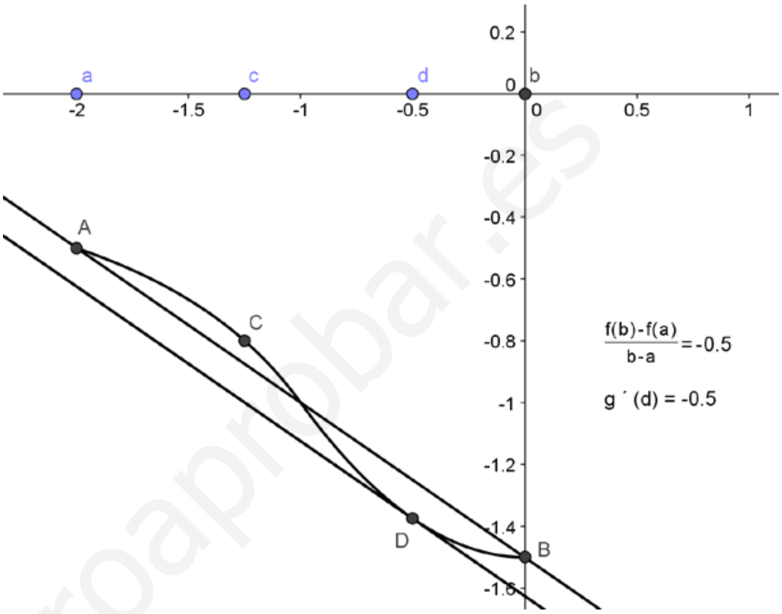
- Ocultamos las pendientes. Movemos el punto



c y observamos como la recta tangente en el punto C se aproxima a la línea discontinua y sus pendientes coinciden. El valor de la abscisa del punto c para el cual coinciden las pendientes es c = -1,41 $\in$ [- 2, 0].

- Ocultamos la recta paralela a la recta AB y que pasa por C y la tangente a la curva en el punto de abscisa c

- Con la herramienta **Recta Paralela** dibujamos la recta que pasa por D y es paralela a la recta que pasa por A y B (línea discontinua). Con el comando **Tangente[x(d),g]** trazamos la recta tangente a la gráfica en el punto D.



- Con la herramienta **Pendiente** determinamos y dibujamos las pendientes de las tres rectas anteriores y en el mismo orden en el que las hemos dibujado.

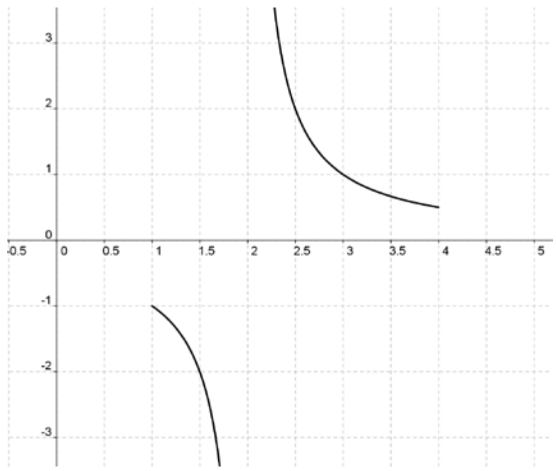
- Con **Inserta Texto** tecleamos “$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = ” +m y “g ´ (d) = “ +m_2.

- Ocultamos las pendientes. Movemos el punto d y observamos como la recta tangente en el punto D se aproxima a la línea discontinua y sus pendientes coinciden. El valor de la abscisa del punto d para el cual coinciden las pendientes es d = -0,5 $\in$ [- 1, 0].

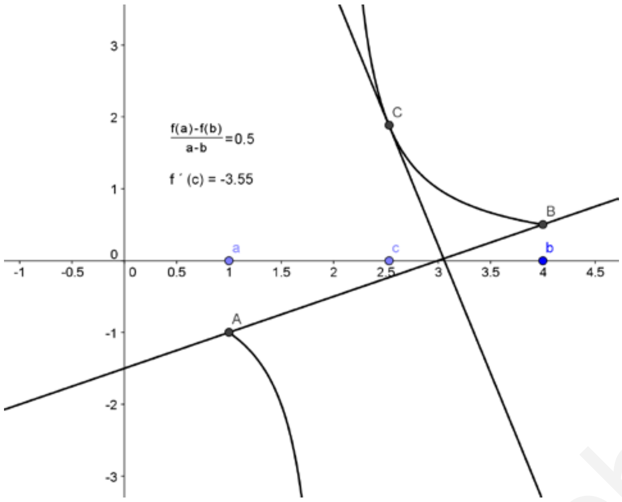
2. Prueba que para la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ no existe ningún valor del intervalo [1, 4] que cumple la tesis del teorema del valor medio. ¿Contradice esto el teorema? ¿Por qué?

Visualizamos la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ en el intervalo [1,4], tecleando el comando **Funcion[1/(x-4),1,4]**, y observamos que la función no es continua ni derivable en x = 2.

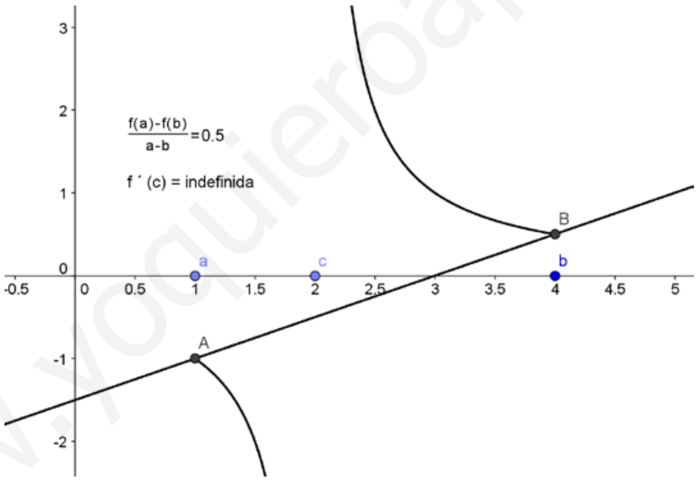
Al no cumplir las hipótesis del teorema del valor medio tampoco se cumple la tesis.



Siguiendo los pasos que se dan en el epígrafe TEOREMA DEL VALOR MEDIO del libro de texto, obtenemos situaciones como las que pueden verse en la imagen.



Para c = 2 $\in$ [1, 4] la construcción nos indica que **f ´ (c) = indefinida**, es decir, no existe la derivada de la función en el punto de abscisa x = 2.

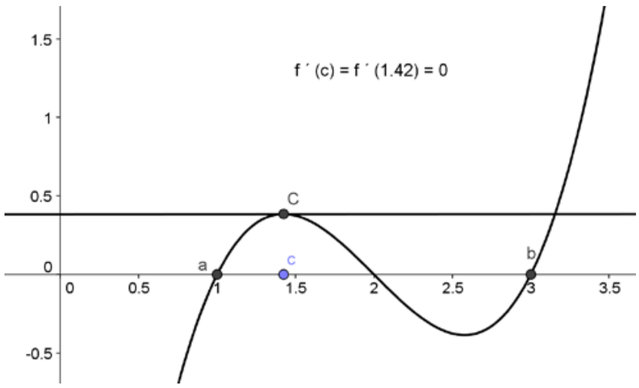


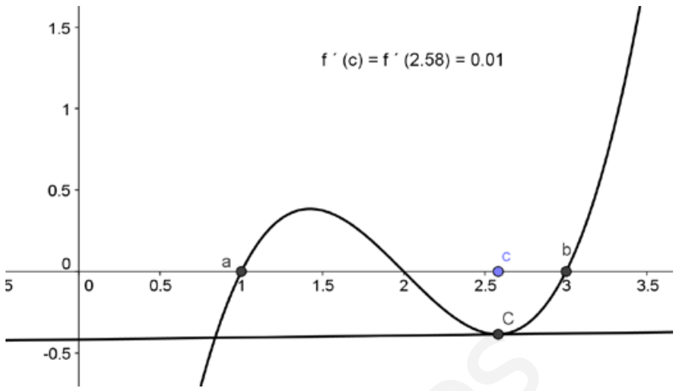
3. Visualiza el teorema de Rolle para las funciones siguientes, en los intervalos que se indican, y encuentra el valor o valores cuya existencia asegura el teorema.

a) f (x) = $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ en [1, 3] **b) f(x) = $x - \sqrt{x}$ en [0, 1]**

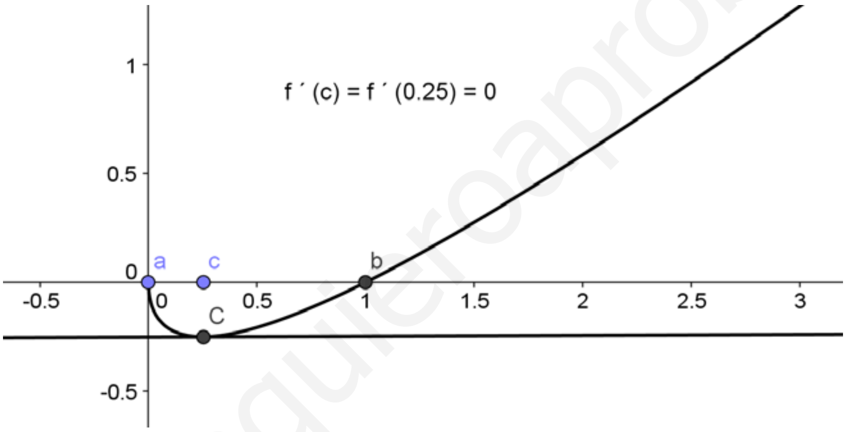
a) Siguiendo las indicaciones que se dan en el epígrafe TEOREMA DEL ROLLE del libro de texto, obtenemos que los valores, aproximados, en los que la derivada se anula son $c_1 = 1{,}42 \in [1, 3]$ y $c_2 = 2{,}58 \in [1, 3]$.

Ambos resultados pueden verse en las imágenes.





b) Procediendo como en el apartado anterior obtenemos c = 0,25 $\in$ [0, 1].



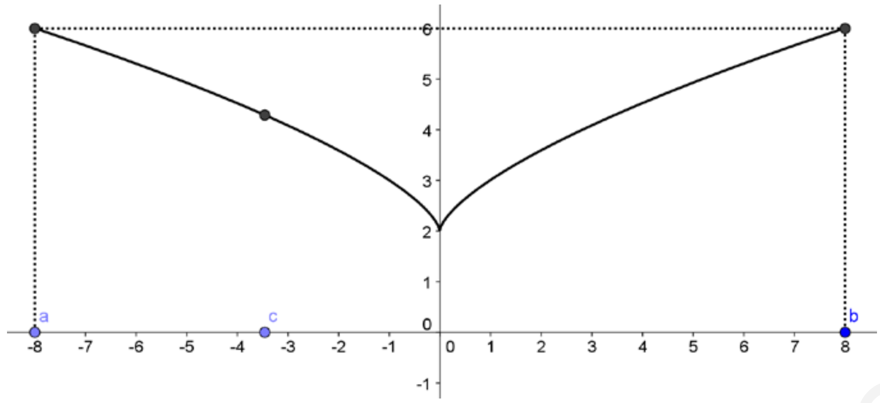
4. Para la función $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$, comprobamos que es continua en [- 8, 8] y que f (-8) = f (8) y, en cambio, su derivada no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

Para la función $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$, comprobamos que es continua en [- 8, 8] y que f (-8) = f (8) y, en cambio, su derivada no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

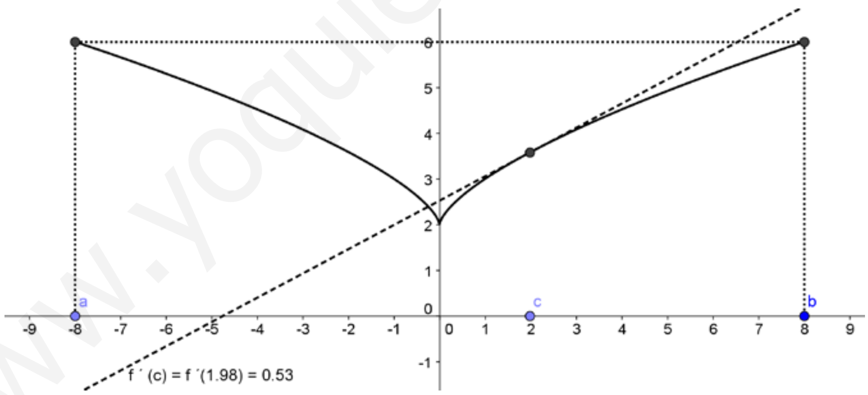
Introducimos la función con el comando **Funcion[2+Cbrt(x^2),-8,8]** y realizamos la construcción que se describe en el epígrafe TEOREMA DEL ROLLE del libro de texto.

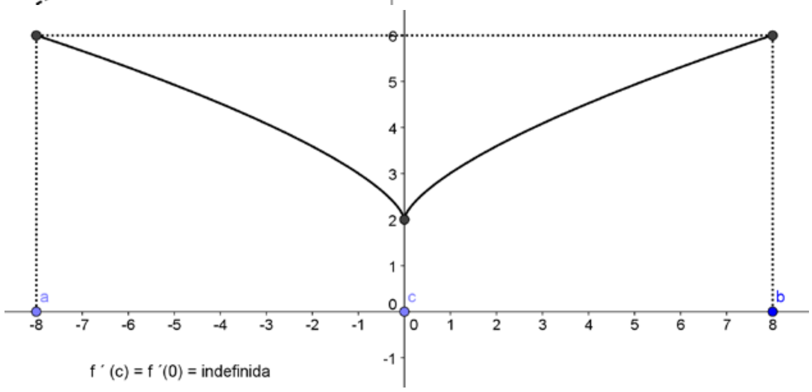
Observamos que $f(-8) = 2 + \sqrt[3]{(-8)^2} = 2 + 4 = 6 = 2 + \sqrt[3]{8^2} = f(8)$.

Además la función es continua en todos los puntos del intervalo [- 8, 8].



La función es derivable en todos los puntos del intervalo [- 8, 8], excepto para x = 0. Esto puede observarse en las imágenes que siguen.





ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 270

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 5$ **c)** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ **e)** $f(x) = e^{2x}$ **g)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = x^2 - 6x$ **d)** $f(x) = 3^{-x}$ **f)** $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

a) La función $f(x) = -3x + 5$ es estrictamente decreciente para cualquier número real.

b) La función $f(x) = x^2 - 6x$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 3)$ y estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.

c) La función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ es estrictamente decreciente en $(-2, 0)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

d) La función $f(x) = 3^{-x}$ es estrictamente decreciente para cualquier número real.

e) La función $f(x) = e^{2x}$ es estrictamente creciente en todo R.

f) La función $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ es estrictamente creciente en todo R.

g) La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$.

h) La función $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ es estrictamente decreciente en R – {3}.

2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$ **d)** $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ **g)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = x^2 \cdot (x+3)$ **e)** $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$ **f)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **i)** $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

Los extremos relativos de cada función pueden verse en la tabla.

Función	Máximo relativo	Mínimo relativo
a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$	(2, 5)	
b) $f(x) = x^2 \cdot (x+3)$	(- 2, 4)	(0, 0)
c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 12$	(3, - 15)	(2, - 16)
d) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$		$\left(e^{-1/2}, \dfrac{-e^{-1}}{2}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{3}{1 - x^2}$		(0, 3)
f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	(e, 1/e)	
g) f (x) = $x^2 \cdot e^{-x}$	$\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$	(0, 0)
h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$	$\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$	$\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$
i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{8x}$	$\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

3. Determina el valor o los valores de a para que sea creciente la función $f(x) = \dfrac{x - a}{x - 1}$**.**

La primera derivada de la función es: $f'(x) = \dfrac{a - 1}{(x - 1)^2}$

Como f ´ (x) ha de ser positiva, entonces a - 1 > 0. Concluimos que para todos los valores de a > 1 la función dada es creciente.

4. Halla b y c para que la función f (x) = x^2 + bx + c tenga un mínimo relativo en el punto (-2, -7).

La derivada de la función f (x) = x^2 + bx + c es f ´ (x) = 2x + b.

Las condiciones f (-2) = -7 y f ´ (-2) = 0 nos dan los valores b = 4 y c = -3.

5. Determina a, b y c de manera que la función f (x) = ax^2 + bx + c tenga un mínimo relativo en el punto (2, - 9/2) y se anule para x = 5.

La derivada de la función f (x) = ax^2 + bx + c es f ´(x) = 2ax + b.

Las condiciones f (2) = $-\dfrac{9}{2}$, f (5) = 0 y f ´ (2) = 0 se convierten en el sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -\dfrac{9}{2} \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 4a + b \qquad\; = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = \dfrac{1}{2},\ b = -2\ y\ c = -\dfrac{5}{2}$.

6. Obtén el valor de a, b, c y d sabiendo que la función f (x) = ax³ + bx² + cx + d tiene extremos relativos en los puntos (- 1, 6) y (2, - 21).

La derivada de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es f ´(x) = $3ax^2 + 2bx + c$.

Las condiciones f (- 1) = 6, f (2) = - 21, f ´ (- 1) = 0 y f ´ (2) = 0 se convierten en el sistema:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 6 \\ 8a + 4b + 2c + d = -21 \\ 3a + 4b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es a = 2, b = - 3, c = - 12 y d = - 1.

7. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ **c)** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$ **e)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$ **d)** $f(x) = (x^2 - 14) \cdot e^x$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

a) La función f (x) = $3x^2 - 2x^3$ es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) La función f (x) = $x^4 - 24x^2 + 80$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-2, 2)$. Tiene puntos de inflexión en (- 2, 0) y (2, 0).

c) La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$ es cóncava hacia las y positivas en $(-3, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3)$. No tiene puntos de inflexión.

d) La función f (x) = $(x^2 - 14) \cdot e^x$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-6, 2)$. Tiene puntos de inflexión en $(-6, 22 \cdot e^{-6})$ y $(2, -10 \cdot e^2)$

e) La función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ es cóncava hacia las y positivas en $\left(e^{3/2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(0, e^{3/2}\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$.

f) La función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ es cóncava hacia las y positivas en todo R y carece de puntos de inflexión.

8. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **b)** $g(x) = x \cdot \ln x - 2x$ **c)** h (x) = sen 2x

a) La función f (x) = x · e^{-x} tiene un máximo relativo en (1, e^{-1}) y un punto de inflexión en (2, 2 · e^{-2}).

b) La función g (x) = x · ln x – 2x tiene un mínimo relativo en (e, - e) y no tiene puntos de inflexión.

c) La function h (x) = sen 2x:

- Tiene máximos relativos en todos los puntos de abscisa $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ con\ k \in Z$.
- Tiene mínimos relativos en todos los puntos de abscisa $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi,\ con\ k \in Z$.
- Tiene puntos de inflexión en todos los puntos de abscisa:

$$x = 0 + k \cdot \pi,\ con\ k \in Z \text{ y } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ con\ k \in Z$$

9. Calcula a, b, c, d para que la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por el punto A (0, - 1) y en B (1, 3) tenga un punto de inflexión con tangente perpendicular a la recta de ecuación x + 2y = 3.

Las derivadas de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ son:
f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$ f ´´ (x) = 6ax + 2b

Las condiciones f (0) = - 1, f (1) = 3, f ´´ (1) = 0 y f ´ (1) = 2 se convierten en el sistema:

$$\begin{cases} d = -1 \\ a + b + c + d = 3 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

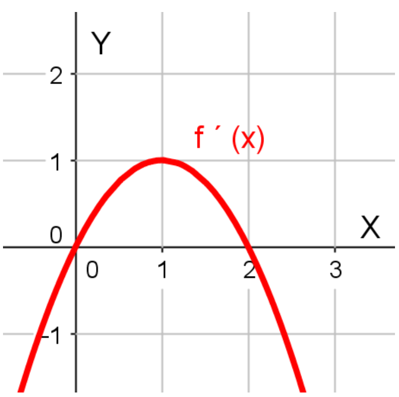
La solución del sistema es a = 2, b = - 6, c = 8 y d = - 1.

10. Los dibujos muestran las gráficas de las funciones derivadas de dos funciones f (x) y g(x). Determina a partir de las gráficas:

a) Los extremos relativos e intervalos de monotonía de la función f (x) y g(x).

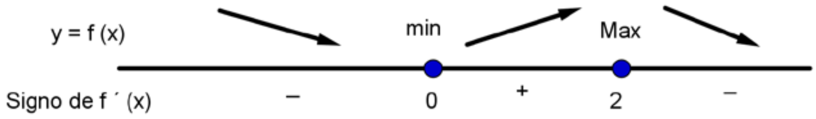
b) Los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura de la función f (x) y g(x).

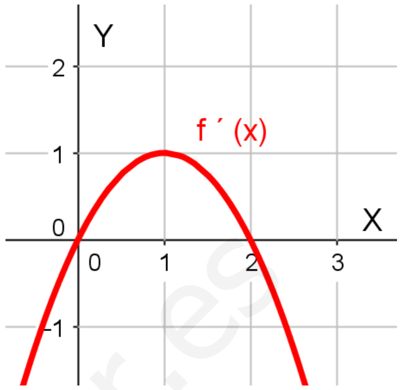
c) La gráfica aproximada de la función f (x) y g(x).



a) Los extremos relativos de y = f (x) se encuentran entre los ceros de f ´ (x) y los intervalos de monotonía coinciden con los intervalos de signo constante de f ´ (x).

Observando la gráfica obtenemos el esquema que sigue:





A la vista de lo anterior, tenemos que:

- La función y = f (x) es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

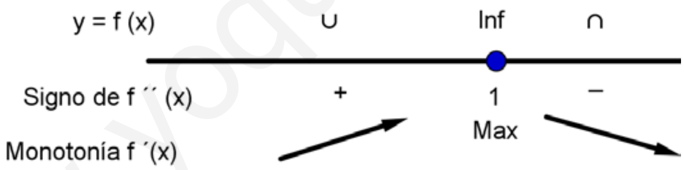
- La función y = f (x) es estrictamente creciente en (0, 2).

- La función y = f (x) tiene un mínimo relativo en x = 0 y un máximo relativo en x = 2.

b) Los puntos de inflexión de y = f (x) se hallan entre los ceros de f ´´ (x). El hecho f ´´ (a) = 0 equivale a (f ´) ´ (a) = 0 y, por tanto, los puntos de inflexión de y = f (x) se hallarán entre los puntos que anulen (f ´) ´ (extremos relativos y puntos de inflexión de f ´).

Razonando de manera similar, vemos que los intervalos de curvatura de y = f (x) coinciden con los de monotonía de f ´.

A partir de la observación de la gráfica de f ´, se tiene:



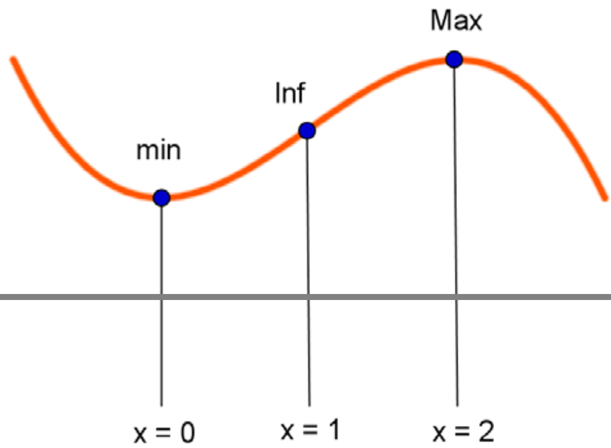
Obtenemos que:

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$.

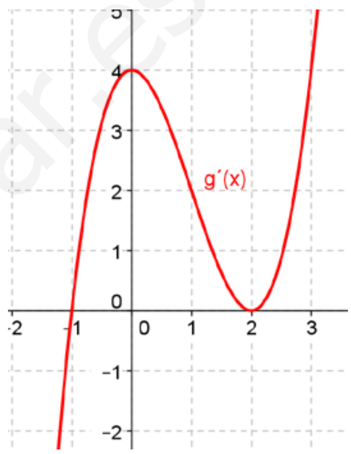
- La función y = f (x) es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$.

- La función y = f (x) tiene un punto de inflexión en x = 1.

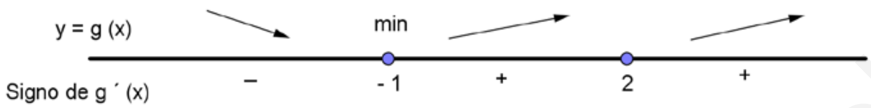
c) Con la información anterior, la forma aproximada de la gráfica de y = f (x) es:



a) Los extremos relativos de y = g(x) se encuentran entre los ceros de g ´ (x) y los intervalos de monotonía coinciden con los intervalos de signo constante de g´ (x).



Observando la gráfica obtenemos el esquema que sigue:



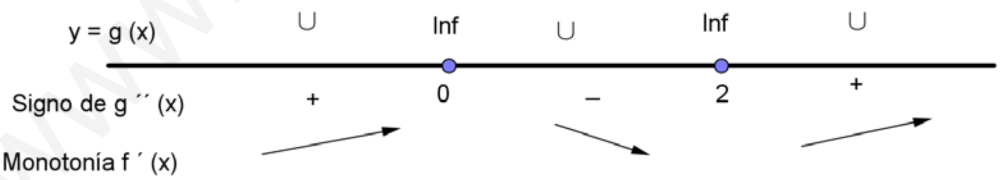
A la vista de lo anterior, tenemos que:

- La función y = g(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$.
- La función y = g (x) es estrictamente creciente en $(-1, +\infty)$.
- La función y = g (x) tiene un mínimo relativo en x = 1.

Los puntos de inflexión de y = g (x) se hallan entre los ceros de g ´´ (x). El hecho g ´´ (a) = 0 equivale a (g ´) ´ (a) = 0 y, por tanto, los puntos de inflexión de y = g (x) se hallarán entre los puntos que anulen (g ´) ´ (extremos relativos y puntos de inflexión de g ´).

Razonando de manera similar, vemos que los intervalos de curvatura de y = f (x9 coinciden con los de monotonía de f ´.

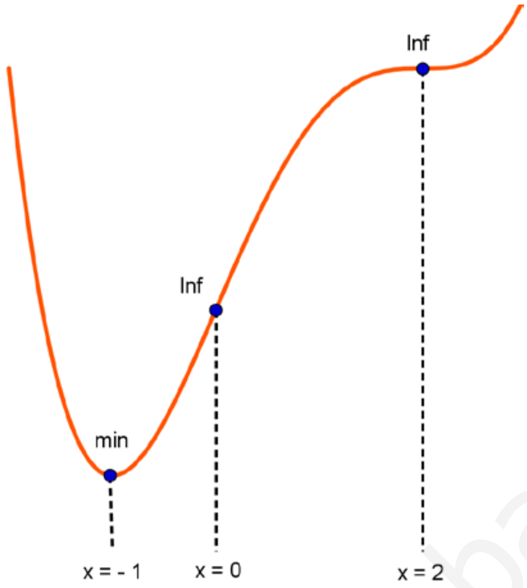
A partir de la observación de la gráfica de g ´, se tiene:



Obtenemos que:

- La función y = g (x) es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
- La función y = g (x) es cóncava hacia las y negativas en (0, 2).
- La función y = g (x) tiene puntos de inflexión en x = 0 y x = 2.

c) Con la información anterior, la forma aproximada de la gráfica de y = g (x) es:



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 271

11. Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble que el otro y que la suma de los cuadrados de los tres sea mínima.

Sean a, b y c los tres números. Se cumplirá:

$$\begin{cases} a + b + c = 14 \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow \; a + b + 2b = 14 \;\Rightarrow\; a + 3b = 14 \;\Rightarrow\; a = 14 - 3b$$

La función a minimizar es: $F(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$.

Sustituimos las condiciones anteriores en la función y obtenemos: $F(b) = (14 - 3b)^2 + b^2 + (2b)^2$.

Operando: $F(b) = 14b^2 - 84b + 196$.

Para obtener el mínimo, igualamos a cero la derivada primera:

$F'(b) = 28b - 84 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 3$.

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un mínimo:

$F''(b) = 28 > 0$.

Los número pedidos son a = 5, b = 3 y c = 6.

12. Sean x e y dos números cuyo producto es 16. ¿Puede ser la suma x + y menor que 7? Razona la contestación.

Sean x e y dos números positivos. Se cumplirá:

$$x \cdot y = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x}$$

La función a minimizar es: F (x, y) = x + y.

Sustituimos la condición anterior en la función y obtenemos: $F\ (x) = x + \frac{16}{x}$.

Para hallar los puntos críticos, derivamos e igualamos a cero:

$$F\,´\,(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\, 4\,.$$

El punto (4, 4) es crítico.

Con la derivada segunda, determinamos si es máximo o mínimo:

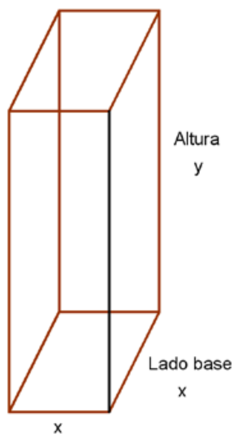
$$F\,´´\,(x) = \frac{32}{x^3} \quad \Rightarrow \quad F\,´´\,(4) > 0\,.$$

Por tanto (4, 4) es mínimo.

El valor f (4, 4) = 4 + 4 = 8 > 7.

La suma de x e y, como mínimo, vale 8. Por tanto, no puede ser menor que 7.

13. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 270 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 5 €/cm^2 y para la base un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.



Llamamos **x cm** a la medida del lado de la base cuadrada de la caja e **y cm** a la medida de la altura de la caja.

La superficie lateral de la caja es 4xy cm^2 y la superficie de la base y la tapa es x^2 cm^2.

La función coste, en euros, que tenemos que minimizar es:

$$C(x, y) = 5 \cdot (x^2 + 4xy) + 7{,}5 \cdot x^2$$

El volumen de la caja es el producto del área de la base por la altura, es decir, x^2y cm^3.

Como la capacidad es 270 cm^3, podemos escribir:

$$x^2y = 270 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{270}{x}$$

Sustituyendo en la función coste, obtenemos:

$$C(x) = 12{,}5x^2 + \frac{5400}{x}$$

Hallamos las dos primeras derivadas de la función anterior para obtener:

$$C\,'(x) = 25x - \frac{5400}{x^2} \qquad \text{y} \qquad C\,''(x) = 25 + \frac{10800}{x^3}$$

Resolvemos la ecuación C ´ (x) = 0 y obtenemos:

$$25x - \frac{5400}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 25x^3 - 5400 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Comprobamos en la segunda derivada que para x = 6 se obtiene un mínimo:

$$C\,''(6) = 25 + \frac{10800}{6^3} \; > \; 0$$

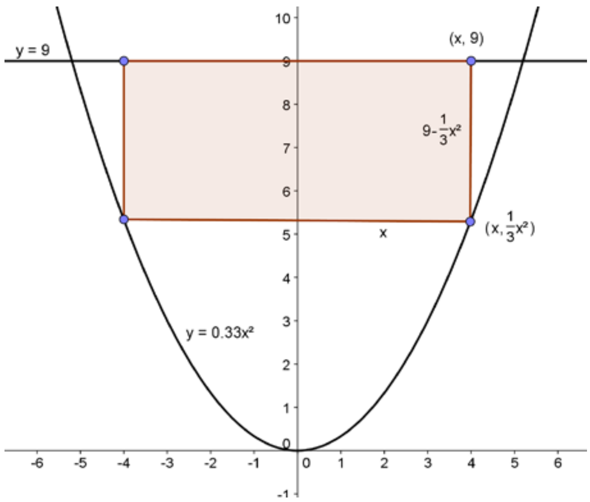
Si el lado de la base mide x = 6 cm, la altura medirá y = $\frac{270}{36} = 7{,}5$ cm.

En resumen, las dimensiones de la caja son 6 cm de lado de la base y 7,5 cm de altura.

El coste mínimo asciende a $C(6) = 12{,}5 \cdot 36 + \frac{5400}{6}$ = 1350 euros.

14. Dada la parábola $y = \frac{1}{3}x^2$, y la recta y = 9, halla las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima que tiene un lado en al recta y los otros dos vértices en la gráfica de la parábola.

Sea (x, $\frac{1}{3}x^2$) el punto de la parábola de abscisa x, y (x, 9) el punto de la recta de abscisa x.



Las dimensiones de los lados del rectángulo con las condiciones que aparecen en el enunciado, ver dibujo, son 2x y $9 - \frac{1}{3}x^2$.

La función que nos da el área del rectángulo, que tiene que ser máxima es:

$$A(x) = 2x \cdot \left(9 - \frac{1}{3}x^2\right)$$

Las dos primeras derivadas de la función A(x) = 18x - $\frac{2}{3}x^3$ son:

$$A'(x) = 18 - 2x^2 \quad \text{y} \quad A''(x) = -4x$$

La condición necesaria para la existencia de extremos es A ´ (x) = 0, es decir:

$$18 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

La condición suficiente para la existencia de máximo es A ´´ (3) = - 4 · 3 = - 12 < 0.

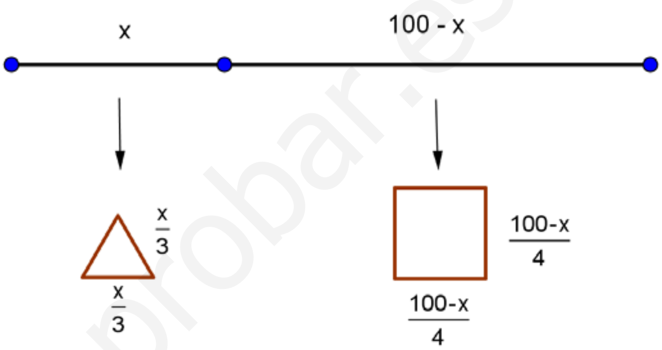
Por tanto, las dimensiones del rectángulo son base = 2 · 3 = 6 unidades lineales y altura = $9 - \frac{1}{3} \cdot 3^2$ = 6 unidades lineales.

El rectángulo es un cuadrado de lado 6 unidades lineales y área 36 unidades cuadradas.

15. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitud x y 100 – x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero, y con el otro un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas. ¿Para qué valor de x dicha suma es mínima?

Sabemos que el área de un cuadrado de lado L es L^2 y el área de un triángulo equilátero de lado L viene dada por la expresión:

$$A(L) = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 .$$



El área del cuadrado construido con el trozo de longitud 100 – x, de lado $\frac{100 - x}{4}$, es $\left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$.

El área del triángulo equilátero construido con el trozo de longitud x, de lado $\frac{x}{3}$, es:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2 .$$

La función suma de las áreas, que tiene que ser mínima, tiene por expresión:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2 + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4\sqrt{3} + 9}{144} x^2 - \frac{25}{2} x + 625 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 0{,}11x^2 - 12{,}5x + 625$$

Hallamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 0{,}22x - 12{,}5 \quad \text{y} \quad f''(x) = 0{,}22$$

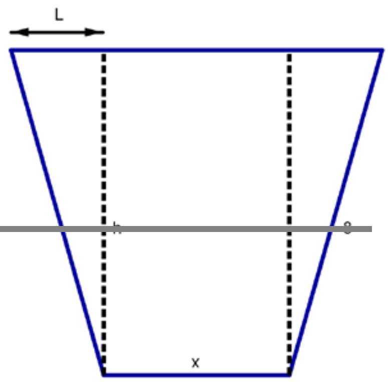
Anulamos la primera derivada:

$$f'(x) = 0{,}22x - 12{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12{,}5}{0{,}22} = 56{,}82$$

Para x = 56,82 la función tiene un mínimo al ser f ´´ (56,82) = 0,22 > 0.

Los trozos de la cuerda medirán 56,82 m y 100 – 56,82 = 43,18 m.

16. Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros (ver esquema de la sección en el dibujo).



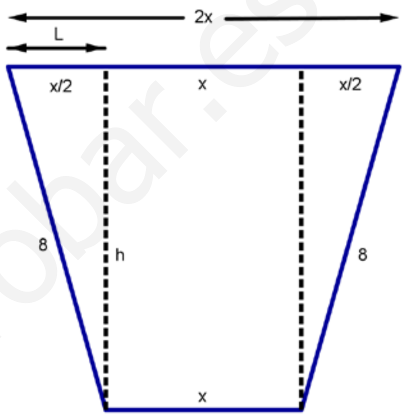
a) Encuentra el valor del segmento L del dibujo en función de la variable x (anchura inferior del canal) y teniendo en cuenta el área de un trapecio, comprueba que, en este caso, el área de la sección viene dada por:

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

b) Calcula el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima.

a) Teniendo en cuenta el dibujo, obtenemos que la relación entre la longitud del segmento L y la anchura inferior del canal, x, es:

$$L = \frac{x}{2}$$



El área, A, de un trapecio de bases B y b y altura h es:

$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

El área de la sección del canal, según los valores que aparecen en el dibujo, es:

$$A(x, h) = \left(\frac{2x + x}{2}\right) \cdot h = \frac{3x}{2} \cdot h$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en uno de los dos triángulos rectángulos de la figura:

$$8^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 64 - \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{256 - x^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}$$

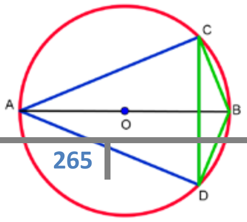
Sustituyendo en la expresión anterior: $A(x) = \dfrac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$.

b) Para obtener el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4} = \frac{3\sqrt{256x^2 - x^4}}{4}$$

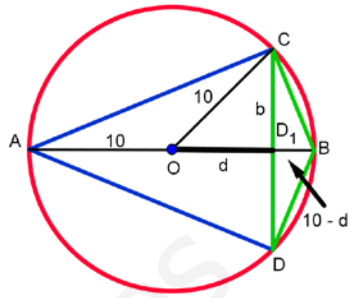
$$A'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{512x - 4x^3}{2\sqrt{256x^2 - x^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 128x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot (128 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \; m \; (mínimo) \\ x = -\sqrt{128} = -8\sqrt{2} \; m \; (\text{sin } sentido) \\ x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \; m \; (máximo) \end{cases}$$



17. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a dicho diámetro.

¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?



Si A_1 es el área del triángulo ADC y A_2 es el área del triángulo BCD, la función que se ha de maximizar es: F (b, d) = $A_1 - A_2$, es decir,

$$F\ (b,\ d) = \frac{2b\ (10 + d)}{2} - \frac{2b\ (10 - d)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F\ (b,\ d) = 10b + bd - 10b + bd \quad \Rightarrow \quad F\ (b,\ d) = 2bd$$

Aplicando el teorema de al triángulo OCD_1, obtenemos la condición:

$$d^2 + b^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{100 - d^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

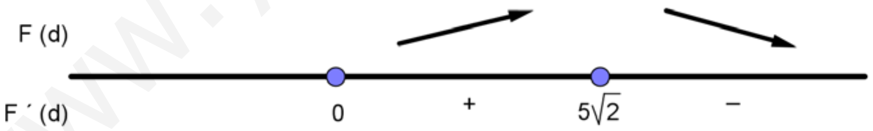
$$F\ (d) = 2d\sqrt{100 - d^2} = 2\sqrt{100d^2 - d^4}$$

Para obtener los posibles óptimos, igualamos a cero la primera derivada:

$$F\,´\,(d) = \frac{200d - 4d^3}{\sqrt{100d^2 - d^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 200d - 4d^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4d\,(50 - d^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \ \ (\textit{no válida}) \\ d = -\sqrt{50} = 5\sqrt{2}\ (\text{sin } \textit{sentido}) \\ d = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Estudiando el crecimiento de F, comprobamos que se trata de un máximo:

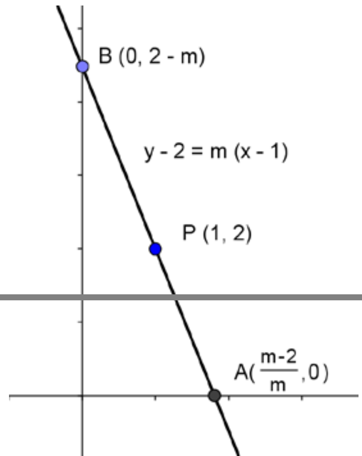


La cuerda CD ha de estar a $\sqrt{50}$ cn del centro de la circunferencia para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima.

18. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Calcula dicha área.

La ecuación del haz de rectas que pasan por el punto (1, 2) con pendiente m es: $y - 2 = m \cdot (x - 1)$

Los puntos de corte de la recta anterior con los ejes coordenados son:



$$OX: \begin{cases} y - 2 = m \cdot (x - 1) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m - 2}{m} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$OY: \begin{cases} y - 2 = m \cdot (x - 1) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - m \end{cases}$$

El área del triángulo en función de la pendiente m es:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m - 2}{m} \cdot (2 - m) \qquad \Rightarrow \qquad A(m) = -\frac{(m - 2)^2}{2m}$$

La primera y la segunda derivada son:

$$A'(m) = -\frac{2m \cdot 2 \cdot (m - 2) - 2 \cdot (m - 2)^2}{4m^2} = \frac{4 - m^2}{2m^2}$$

$$A''(m) = \frac{-2m^2 \cdot 2m - (4 - m^2) \cdot m}{4m^4} = -\frac{4}{m^3}$$

Los valores que anulan la primera derivada son:

$$A'(m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4 - m^2}{2m^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

En la segunda derivada tenemos:

$A''(-2) = -\dfrac{4}{(-2)^3} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} > 0$; por tanto, para m = - 2 la función alcanza un mínimo.

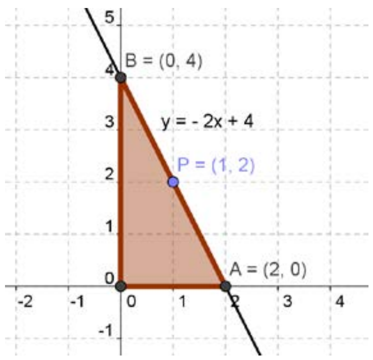
$A''(2) = -\dfrac{4}{(2)^3} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} < 0$; por tanto, para m = 2 la función alcanza un máximo.

La ecuación de la recta buscada es y – 2 = - 2 · (x – 1); es decir, y = - 2x + 4.

El área del triángulo resultante es:

$$A(-2) = -\frac{(-2 - 2)^2}{2 \cdot (-2)} = \frac{16}{4} = 4 \ unidades \ cuadradas.$$

La recta y el triángulo resultante pueden verse en el dibujo.

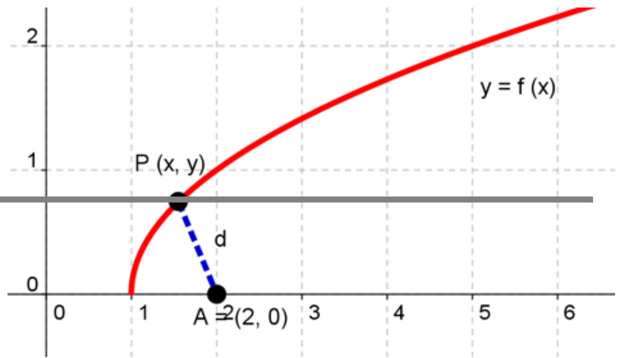


19. Sea $f: [1, +\infty) \rightarrow R$ la función definid por $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto A (2, 0). ¿Cuál es esa distancia?

Sea P (x, y) un punto de la gráfica de $y = \sqrt{x - 1}$.

La función a minimizar es:



$$d\ (x,\ y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

La relación entre las variables x e y es $y = \sqrt{x-1}$.

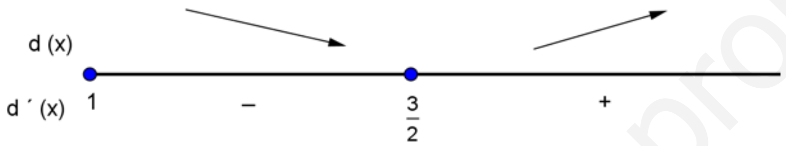
Sustituimos la condición en la función a minimizar:

$$d\ (x) = \sqrt{(x-2)^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$$

Para hallar el mínimo, igualamos a cero la derivada:

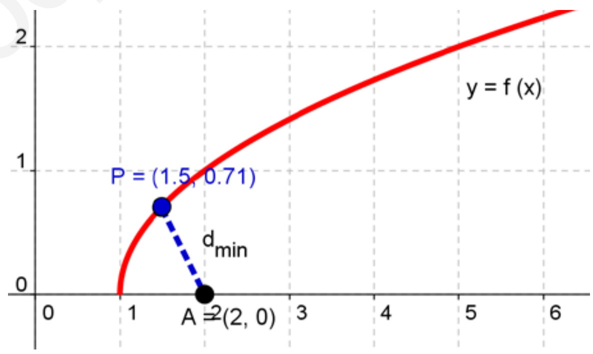
$$d\,'\ (x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Comprobamos que se trata de un mínimo:



La ordenada del punto es $f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

El punto pedido es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Puede verse en la gráfica.



20. La fabricación de un número x de tabletas gráficas supone un coste total dado por la función C (x) = 1 500x + 1 000 000. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función P (x) = 4 000 – x. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

Los ingresos, I (x), por vender x tabletas son I (x) = x · (4000 – x) = 4000x – x^2.

La función beneficio, B (x), es la diferencia entre las funciones de ingresos, I (x) y de costes, C (x), es decir:

B (x) = I (x) – C (x) = 4000x – x^2 – (1500x + 1000000) = - x^2 + 2500x – 1 000 000.

Para hallar el máximo igualamos a cero la primera derivada:

B ´(x) = - 2x + 2500 = 0 $\Rightarrow$ x=1250.

Con la derivada segunda comprobamos que es un máximo:

B ´´ (x) = - 2 < 0.

Para obtener el beneficio máximo hay que producir 1250 tabletas.

21. En cierto experimento, la cantidad de agua en estado líquido C (t), medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3} \quad t \in [1, 10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre t = 1 hora y t = 10 horas.

Calculamos los extremos relativos de C (t) igualando a cero la derivada:

$$C'(t) = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10t^4 - 10t^2 - 720 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 - t^2 - 72 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = +3 \\ t = -3 \ \ (no\ válida) \end{cases} \\ -8 \ \ (no\ válida) \end{cases}$$

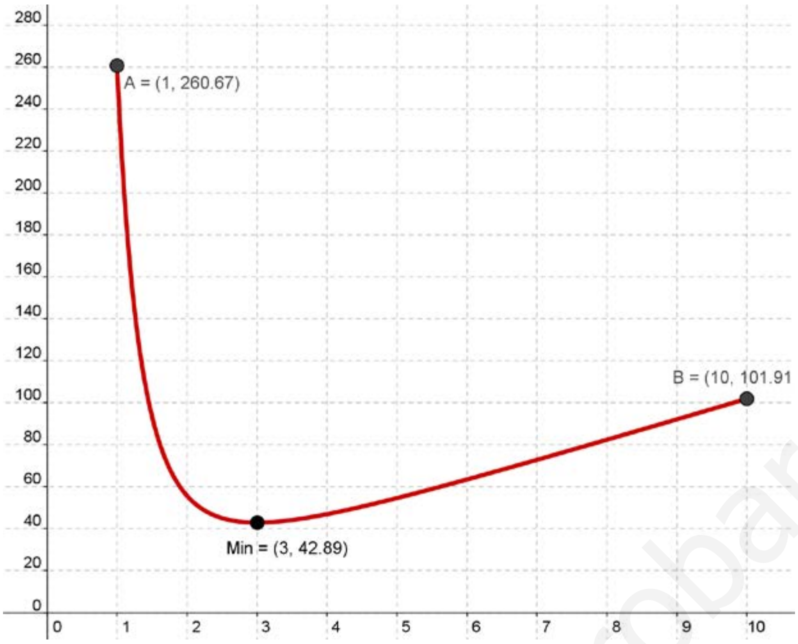
Con la derivada segunda, decidimos si es un máximo o un mínimo:

$C''(t) = \frac{20}{t^3} + \frac{2880}{t^5}$ y C ´´ (3) > 0, por tanto, mínimo relativo para t = 3.

La función C (t) es continua en el intervalo cerrado [1, 10]. Por tanto, alcanza su mínimo absoluto en los extremos del intervalo o en el mínimo relativo. Hallamos el valor de la función en estos tres puntos:

$$C(1) = \frac{782}{3} \approx 260{,}67 \qquad C(3) = \frac{386}{9} \approx 2{,}89 \qquad C(10) = \frac{7643}{75} \approx 101{,}91$$

La cantidad mínima en estado líquido es de 42,89 litros y se obtiene a las 3 horas (puede verse en el dibujo).



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 272

22. Comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función f (x) = 3 $\cos^2$ x en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Calcula también el valor al cual se refiere la tesis del teorema.

La función f (x) = 3 $\cos^2$ x es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. De hecho lo es en todo R.

Además:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad y \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Por el teorema de Rolle, existe un punto, c, entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, que verifica f ´ (c) = 0

La derivada de la función es f ´ (x) = - 6 · cos x · sen x = - 3 · sen 2x.

Los valores que anulan la derivada anterior son: x = k · π, con k $\in$Z.

Como debe estar en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, solo puede ser c = π.

Puede verse en el dibujo.

23. Prueba que cualquiera que sea la constante a la función f (x) = x^3 – $5x^2$ + 7x + a cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1, 3]. Calcula el punto del intervalo (1, 3) cuya existencia asegura el teorema.

La función f (x) es continua y derivable en todo R por ser polinómica, además se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f\ (1) = 3 + a \\ f\ (3) = 3 + a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f\ (1) = f\ (3) \text{ para todo a.}$$

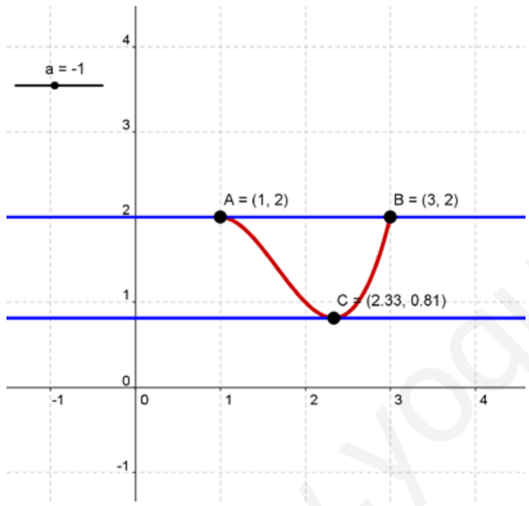
Derivando, obtenemos f ´ (x) = 3x^2 – 10x + 7.

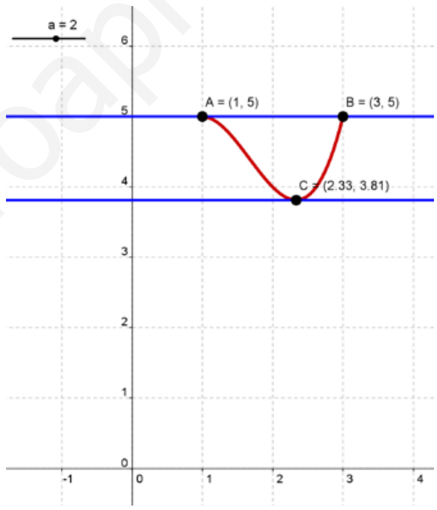
Los valores que anulan la derivada son:

$$f\ ´\ (x) = x^2 - 10x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{7}{3} \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

El valor $\alpha_1 = \frac{7}{3} \in (1, 3)$ es el punto cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

En las imágenes pueden verse los casos en los que los valores de a son – 1 y 2.





24. Consideramos la función $f\ (x) = \dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2} + \cos x}$.

a) Verifica que f (0) = f (π) = 0.

b) Comprueba que la ecuación f ´(x) = 0 no tiene ninguna solución en el intervalo (0, π).

c) Explica por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle en este caso.

a) Calculamos los valores:

$$f\ (0) = \frac{sen\ 0}{\frac{1}{2} + \cos 0} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 1} = 0 \ \text{ y } \ f\ (\pi) = \frac{sen\ \pi}{\frac{1}{2} + \cos \pi} = \frac{0}{\frac{1}{2} - 1} = 0$$

Por tanto, f (0) = f (π) = 0.

b) Hallamos la derivada de f (x):

$$f\,'(x)=\frac{\cos x\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)-sen\ x\cdot(-sen\ x)}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cos x+\cos^2 x+sen^2 x}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cos x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}$$

Anulamos la derivada anterior:

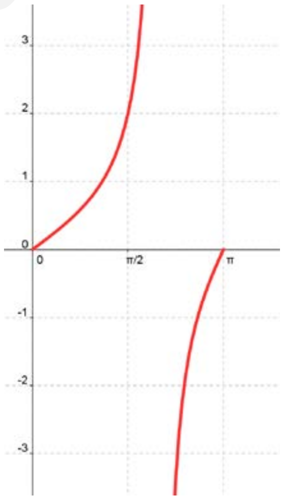
$$\frac{\frac{1}{2}\cos x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cos x+1=0\ \Rightarrow\ \cos x=-2$$

La igualdad cos x = - 2 es imposible, por tanto, f ´ (x) = 0 no tiene solución.

c) No se puede aplicar el teorema de Rolle porque f (x) no es continua en [0, π]:

$$\frac{1}{2}+\cos x=0\ \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{2\pi}{3}\in(0,\pi).$$

El denominador de f (x) se anula en el intervalo considerado. Puede verse en el dibujo.



25. Calcula los valores de a, b y c para que a la función f(x) pueda aplicársele el teorema de Rolle en el intervalo [- 1, 7], y encuentra el valor que predice el teorema:

$$f\ (x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 3 \\ bx+c & \text{si } x>3\end{cases}$$

Hemos de elegir los parámetros a, b y c para que se cumpla f (- 1) = f (7), f sea continua en [- 1, 7] y derivable en (- 1, 7).

Al ser f (- 1) = 1 - a y f (7) = 7b + c, entonces: 1 - a = 7b + c ⇔ a + 7b + c = 1.

Como se cumple que f (3) = 9 + 3a y $\lim\limits_{x\to 3^+} f\ (x)=3b+c$, ha de ser: 9 + 3a = 3b + c ⇔ 3a - 3b - c = - 9.

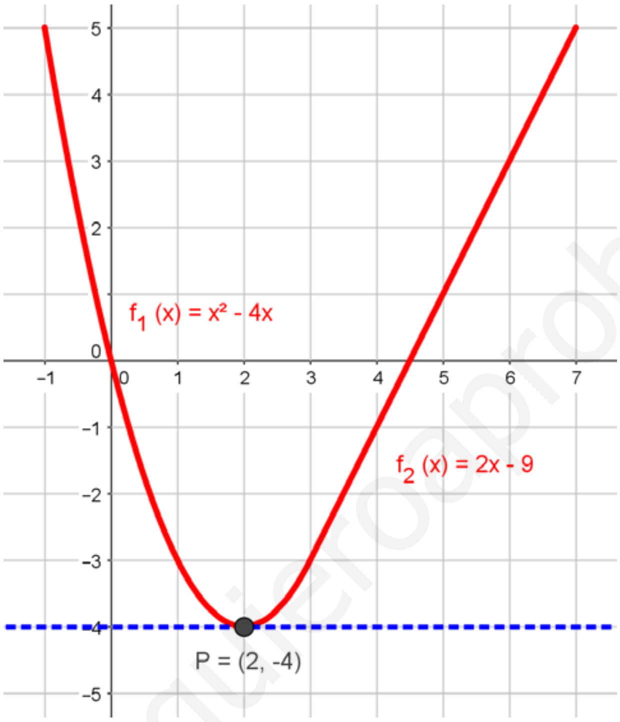
Por otra parte f ´ (3^-) = 6 + a y f ´ (3^+) = b ha de ser: 6 + a = b ⇔ a - b = - 6.

Los valores de a, b y c son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} a + 7b + c = 1 \\ 3a - 3b - c = -9 \\ a - b \quad = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = -4,\ b = 2 \text{ y } c = -9.$$

Para los valores de a, b y c anteriores, por el teorema de Rolle, existe un valor $c = 2 \in (-1, 7)$ tal que $f'(c) = 0$.

En la imagen puede verse todo lo anterior.



26. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función f (x) = x^3 + ax – 1 en el intervalo [0, 1]. Para este valor de a, calcula el punto c $\in$ (0, 1) en el que la recta tangente a la gráfica de f (x) sea paralela al eje OX.

● La función f (x) = x^3 + ax – 1 es continua y derivable en R por ser polinómica.

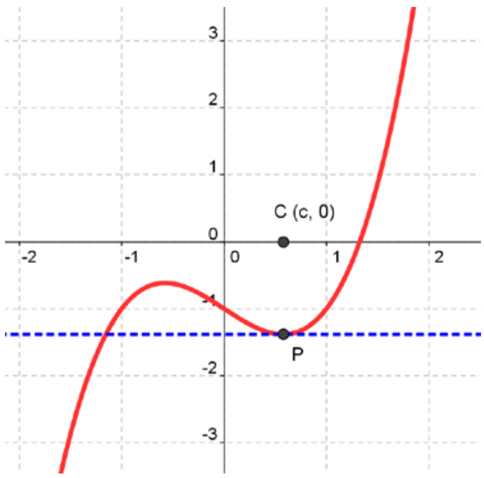
Se cumple f (0) = - 1 y f (1) = a; y como f (0) = f (1), entonces a = - 1.

● La derivada de la función f (x) = $x^3 - x - 1$ es $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Si la recta tangente es paralela al eje OX, es decir, horizontal, se cumplirá f ´ (x) = 0:

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$.



27. Sea la función $f\ (x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que f (1) = f (- 1) = 0, pero que f ´ (x) no es nunca cero en el intervalo [- 1, 1]. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

Veamos que se cumple f (1) = f (- 1) = 0:

$$f\ (1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - 1 = 0 \ \text{ y } \ f\ (-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - 1 = 0$$

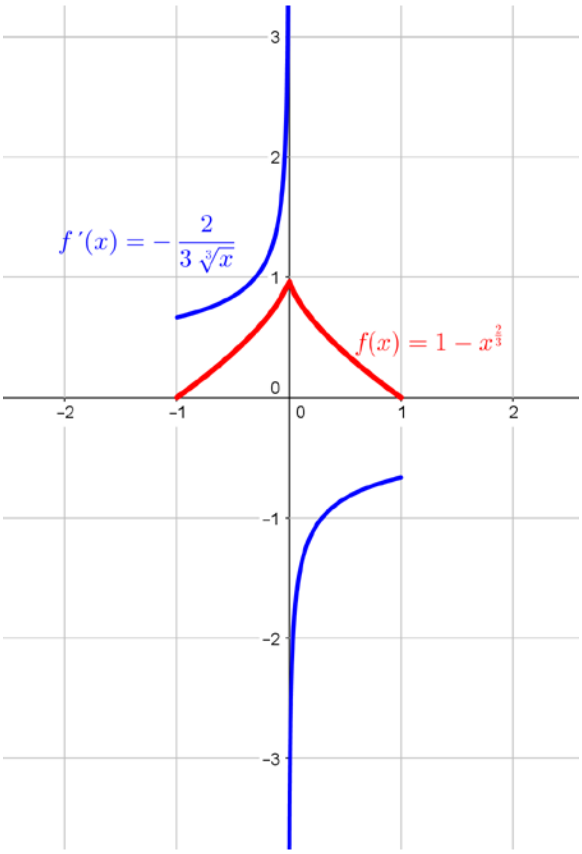
La derivada de $f\ (x) = 1 - x^{2/3}$ es $f\ ´(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Observamos que no se anula para ningún número real, por tanto, no se anula en el intervalo [- 1, 1].

Esta situación contradice aparentemente el teorema de Rolle, ya que no podemos aplicar su tesis al no cumplirse una de la s hipótesis, en este caso, la función $f\ (x) = 1 - x^{2/3}$ no es derivable en x = 0 y, por tanto, no es derivable en (- 1, 1) al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^{2/3}}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x^{-1/3} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^{2/3}}{x} = \lim_{x \to 0^{+-}} -x^{-1/3} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

En la imagen puede verse las gráficas de las funciones $f\ (x) = 1 - x^{2/3}$ (en color rojo) y de su función derivada $f\ ´(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (en color azul).



28. Aplica el teorema de Cauchy a las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) f (x) = $x^2 - 2x + 3$ y g (x) = $x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en [– 1, 1].

b) f (x) = e^{2x} y g (x) = $e^x + 2$ en [0, 2].

En cada caso:

a) Las funciones f (x) y g (x) verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en [- 1, 1], derivables en (- 1, 1) y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, tenemos que existe c $\in$ (- 1, 1) tal que:

$$\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)} = \frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)}, \text{ es decir, } \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20} = \frac{-2}{21}$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos c = 0, 26 $\in$ (- 1, 1).

b) Las funciones f (x) y g (x) verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en [0, 2], derivables en (0, 2) y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, tenemos que existe c $\in$ (0, 2) tal que:

$$\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)}, \text{ es decir, } \frac{2e^{2c}}{e^c} = \frac{e^4 - 1}{e^2 - 1}$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos c = 1,434 $\in$ (0, 2).

29. Estudia si el teorema de Cauchy se puede aplicar a las funciones f (x) = $x^3 + x$ y g (x) = x + 3 en el intervalo [0, 2]. En caso afirmativo, encuentra el punto que hace que se verifique el teorema.

Las funciones dadas son polinómicas, por tanto, son continuas y derivables en [0, 2].

Podemos aplicar el teorema de Cauchy:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} \text{ con } c \in (0, 2).$$

Operando obtenemos:

$$\frac{3c^2 + 1}{1} = \frac{10}{2}$$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos: $c = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1{,}1547$

Como c debe pertenecer al intervalo (0, 2), el único valor que sirve es $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547 \in (0,\ 2)$.

30. Analiza si se puede aplicar el teorema de Lagrange a las siguientes funciones en los intervalos dados y, cuando sea posible, halla el valor de c que da el teorema:

a) f (x) = 2x² – 7x + 10 en [2, 5]. **b)** $f\ (x) = \sqrt[5]{x^2} - 2$ **en [- 1, 1]**

a) La función f (x) verifica las hipótesis del teorema de Lagrange puesto que es continua en el intervalo dado y derivable en (2, 5). Por tanto:

$$\text{existe } c \in (2, 5) \text{ tal que } f\ ´(c) = \frac{f\ (5) - f\ (2)}{3}.$$

Operando y resolviendo, obtenemos c = 3,5 $\in$ (2, 5).

b) La función f (x) no verifica las hipótesis del teorema de Lagrange ya que no es derivable en x = 0, por tanto no es derivable en (- 1, 1).

31. Dada la función $f\ (x) = \begin{cases} 1/x & si\ -2 \le x \le -1 \\ (x^2 - 3/2) & si\ -1 < x \le 0 \end{cases}$**.**

a) Prueba que f (x) cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [- 2, 0].

b) Encuentra los puntos cuya existencia afirma el teorema.

a) La función es continua en el intervalo [- 2, 0] al estar formada por dos funciones polinómicas y cumplirse:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 3}{2} = -1.$$

La función es derivable en el intervalo (- 2, 0) al cumplirse: f ´ (- 1⁻) = f ´ (- 1⁺) = - 1.

b) Los puntos cuya existencia afirma el teorema son:

$$f\ ´(c) = \frac{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{0 - (-2)} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \pm\sqrt{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Los valores que están en el interior del intervalo (- 2, 0) son $c = -\sqrt{2}$ y $c = -\frac{1}{2}$.

32. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0, 1], el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función $f\ (x) = \frac{1}{2 - x}$**? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.**

Veamos que la función dada cumple las hipótesis del teorema de del valor medio o de Lagrange:

- $f\ (x) = \frac{1}{2 - x}$ es continua en R – {2}, por tanto es continua en [0, 1]

- $f\ ´(x) = \frac{1}{(2 - x)^2}$, f (x) es derivable en R – {2}, por tanto es derivable en (0, 1).

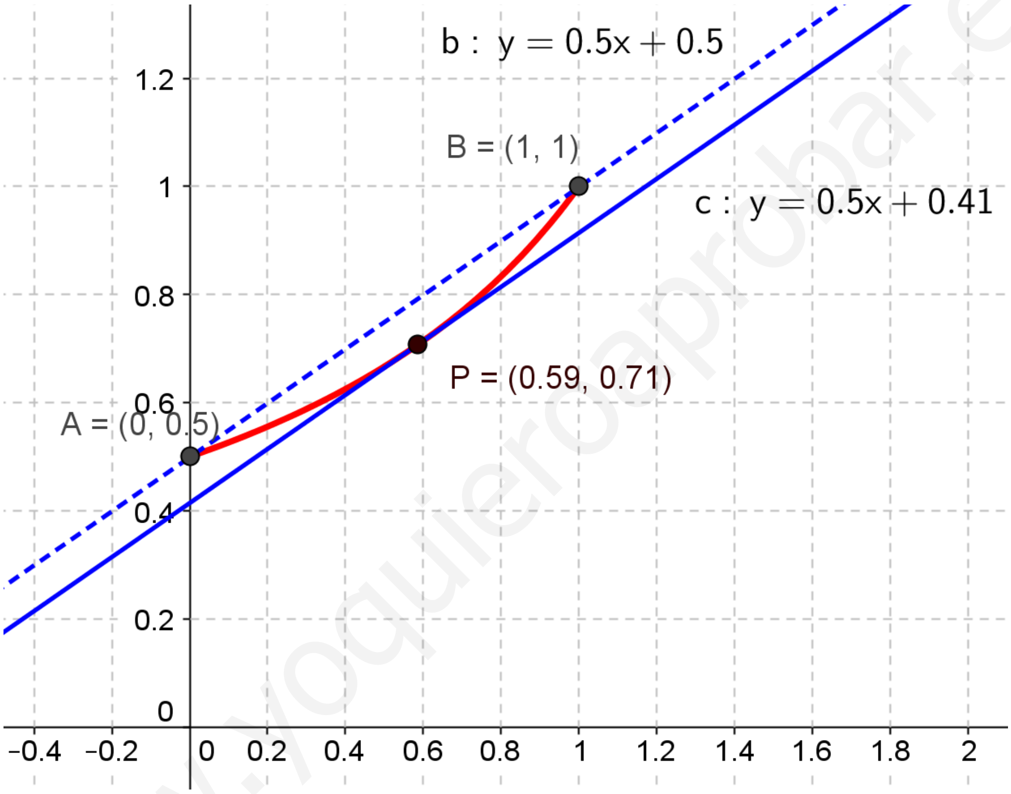
Según el teorema del valor medio existe c $\in$ (0, 1) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow \frac{1}{(2-c)^2}=1-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{(2-c)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow (2-c)^2=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-4c+c^2=2 \Rightarrow c^2-4c+2=0 \Rightarrow c=2\pm\sqrt{2}$$

Como c ∈ (0, 1) entonces $c=2-\sqrt{2}$.

Todo lo anterior puede verse en el dibujo.



33. Halla el punto de la gráfica de la función f (x) = ln x – 1 en el que la recta tangente sea paralela a la secante que pasa por los puntos A (1, - 1) y B (e, 0).

Se debe verificar $f'(c)=\frac{0-(-1)}{e-1}$, es decir: $\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1} \Rightarrow c=e-1$.

El punto buscado es (e – 1, ln (e – 1) – 1).

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 273

34. Utilizando el teorema del valor medio de Lagrange, demuestra que si f es una función real continua en un intervalo [a, b], derivable en (a, b) y tal que f ´ (x) > 0 para todo x $\in$ (a, b), entonces f es una función creciente en el intervalo [a, b].

Dadas las hipótesis del enunciado, el teorema del valor medio nos dice que existe un valor c $\in$ (a, b) al que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como f ´ (x) > 0 para todo x $\in$ (a, b), tenemos que:

signo [f (b) – f (a)] = signo (b – a)

que es la definición de crecimiento de una función.

35. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax & si\ x < -1 \\ \dfrac{x^2 - b}{2} & si\ x \geq -1 \end{cases}$

Averigua si existen valores de a y b para los que la función satisface las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [- 2, 2]. En caso afirmativo, halla el punto al que se refiere el teorema.

Calculamos a y b para que la función f (x) sea continua y derivable en [- 2, 2]:

Para que sea continua en el punto x = - 1, ha de ser $-a = \dfrac{1-b}{2}$, es decir, 2a – b = - 1.

Por otra parte, hay derivada en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, +\infty)$, y se tiene que:

$f'(-1^-) = a$; $f'(-1^+) = -1$

Para que la derivada exista, debe ser a = - 1.

Para el anterior valor de a tenemos que b = - 1.

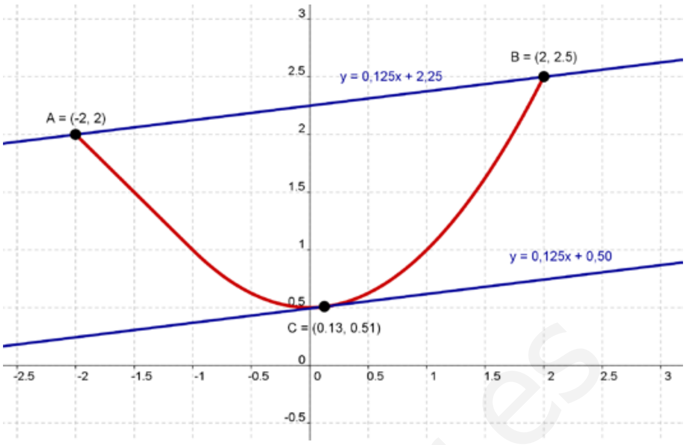
La función es $f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < -1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{2} & si\ x \geq -1 \end{cases}$

Ahora se tiene, por el teorema del valor medio: $\dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{\frac{5}{2} - 2}{2 - (-2)} = \dfrac{1}{8}$

Como $f'(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < -1 \\ x & si\ x \geq -1 \end{cases}$, resulta, efectivamente, que: $f'\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{8} = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$

Por lo que c = $\dfrac{1}{8} \in (-2, 2)$

El resultado anterior puede verse en la imagen.



36. Dada la función $f(x) = x^{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$ tal que f ´ (α) = 4. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Estudiamos el signo de $x^2 - 4x + 7$:

$$x^2 - 4x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$, no tiene solución real.

Como $x^2 - 4x + 7 > 0$ para todo R, por tanto, la función f (x) es positiva y continua en [1, 3].

Hallamos la derivada de f (x) tomando logaritmos: $\ln y = \sqrt{x^2 - 4x + 7} \cdot \ln x$

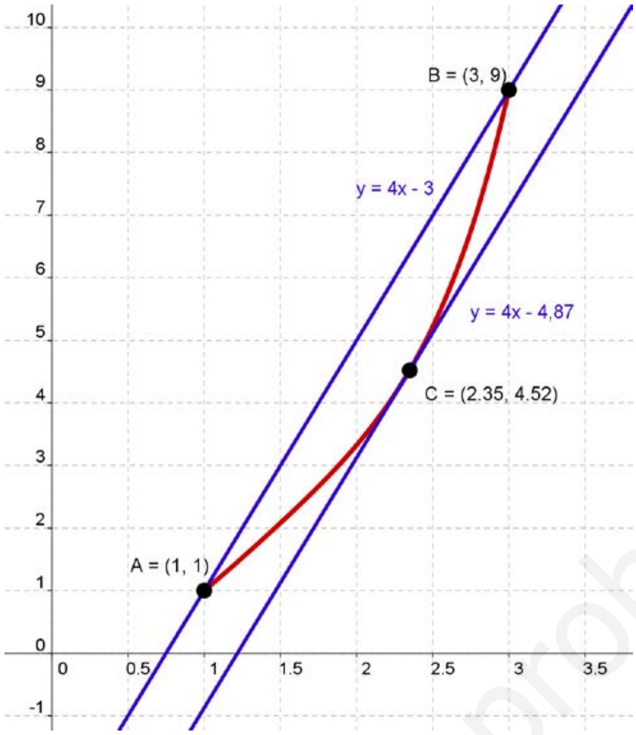
$$\frac{y'}{y} = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 7}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 7}} \ln x + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}{x} \right) \cdot x^{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$$

Observamos que f ´ (x) existe en (1, 3); es decir, f (x) es derivable en (1, 3). Por tanto, por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$.

Como f (3) = 9 y f (1) = 1, tenemos que $f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$.

En el dibujo puede verse el resultado anterior.



37. De una función f : [2, 5] → R, se sabe que es derivable y que los valores mínimo y máximo de su función derivada f ´ son 7 y 9, respectivamente. Justifica, mediante el teorema del valor medio, cuál o cuáles de los siguientes casos no pueden darse:

I) f (2) = 6 y f (5) = 8. **II) f (2) = 6 y f (5) = 30.** **III) f (2) = 6 y f (5) = 300.**

Teniendo en cuenta el teorema del valor medio, existe, al menos un punto c perteneciente al abierto (a, b) de modo que en el se verifica:

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En el caso I) se cumple $f\,'(c) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{8 - 6}{5 - 2} = \dfrac{2}{3}$. Como f ´ (c) está entre 7 y 9, este caso no puede darse.

Análogamente para el caso III): $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{300 - 6}{5 - 2} = \dfrac{294}{3} = 98$.

Para el caso II) se tiene: $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{30 - 6}{5 - 2} = \dfrac{24}{3} = 8 \in (7, 9)$.

Por tanto, este segundo caso sí puede darse.

38. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\ x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)\ sen\ x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - 2x\right)^{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x \cdot sen\ (x)}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + 3sen\ x\right)^{\frac{2}{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln\left(2 - e^x\right)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot \ln(x+1)}{x^2 + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\ x}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x - b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ **, a > 1 y b > 1**

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}\right) \ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + x\right)^{\frac{2}{sen\ x}}$

Los límites quedan:

a) Es una indeterminación 0/0. Aplicamos la regla de L´Hôpital de forma reiterada y obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

b) Es una indeterminación 0/0. Aplicamos la regla de L´Hôpital de forma reiterada y obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)\ sen\ x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2\ x + \cos x\ (1 - \cos x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\ sen\ x \cos x - sen\ x\ (1 - \cos x)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

c) Es una indeterminación 0/0. Aplicamos la regla de L´Hôpital de forma reiterada y obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x \cdot sen\ (x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\ sen\ (2x) + e^{-x} - 1}{sen\ x + x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4 \cdot \cos 2x - e^{-x}}{\cos x + \cos x - x \cdot sen\ x} = -\frac{5}{2}$$

d) Es una indeterminación ∞ / ∞. Aplicando la regla de L´Hôpital dos veces, obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln(x+1)}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} = \frac{\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

e) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla, realizamos la diferencia y en las igualdades (*) aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1-2\ln x}{(x^2-1)\ln x}\right)\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{2}{x}}{2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{2x^2\ln x+x^2-1}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+\frac{2x^2}{2}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+4x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x\ln x+4x}=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{4x(\ln x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1$$

f) Sea $L=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$. Tomamos logaritmos y calculamos el límite resultante.

$$\ln L=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=3$$

Sí ln L = 3, entonces el límite pedido es L = e^3.

En la igualdad (*) hemos aplicado la regla de L´Hôpital.

g) Es una indeterminación ∞ - ∞. En las igualdades (*) aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

h) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$. En la igualdad (*) aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+3sen\,x\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}(\cos x+3sen\,x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x+6sen\,x-2}{x}x}\overset{(*)}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2sen\,x+6\cos x}{1}}=e^6$$

i) Se trata de una indeterminación del tipo ∞^0. Tomamos logaritmos neperianos y aplicamos la regla de L´Hôpital en las igualdades $\overset{(*)}{=}$.

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=\lim_{x\to 0^+}tg\,x\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}tg\,x\,(\ln 1-2\ln x)=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{tg\ x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 \ln x}{ctg\ x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{sen^2\ x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sen^2\ x}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2\, sen\ x \cos x}{1} = 0$$

Si ln L = 0, entonces L = 1

j) Es una indeterminación ∞ · 0. Operamos y en la igualdad (*) aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+3}\right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left[\ln (x+5) - \ln (x-1\right]}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (x+5) - \ln (x-1)}{\frac{x+3}{x^2}} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-1}}{\frac{x^2 - (x+3) \cdot 2x}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-6}{x^2 + 4x - 5}}{\frac{-x-6}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x^3}{-x^3 - 10x^2 + 19x + 30} = \frac{-6}{-1} = 6$$

k) Es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Operamos y en la igualdad (*) aplicamosla regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to +\infty} x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\, sen \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\ sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{x}\right) = 2$$

l) Es una indeterminación 0^0. Llamamos L = $\lim_{x \to 0} \left(x^2 - 2x\right)^{x^2}$, tomamos logaritmos, operamos, aplicamos la regla de L´Hôpital , en (*), volvemos a operar y obtenemos:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0} \left(x^2 - 2x\right)^{x^2}\right] = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \ln\left(x^2 - 2x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x^2 - 2x\right)}{\frac{1}{x^2}} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x-2}{x^2 - 2x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \cdot (x-1) \cdot x^3}{2x \cdot (x-2)} = 0$$

Por tanto, si ln L = 0, entonces el límite L = 1

m) Es una indeterminación 0^0. Procedemos como en el caso anterior.

L = $\lim_{x \to 0^+} x^{\ln\left(2 - e^x\right)}$, entonces:

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}\right] = \lim_{x\to 0^+} \ln(2-e^x)\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(2-e^x)}} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-e^x)\ln^2(2-e^x)}{x\cdot e^x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x\cdot \ln^2(2-e^x) - 2e^x\ln(2-e^x)}{e^x + x\cdot e^x} = 0$$

Por tanto, si ln L = 0, entonces el límite L = 1

n) Es una indeterminación $1^{+\infty}$. Utilizamos la expresión del número e y, posteriormente, la regla de L´Hôpital y obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a + b^x\cdot \ln b}{2}} =$$

$$= e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{a\cdot b}$$

ñ) El límite buscado será $\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{sen\, x}} = e^L$, siendo:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos x + x - 1)}{sen\, x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(-sen\, x + 1)}{\cos x} = 2$$

Por tanto, el límite pedido vale e^2.

39. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x + b\, sen\, x}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Sea L el valor del límite, entonces:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x + b\, sen\, x}{x^3} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\, sen\, x + b\cos x}{3x^2} = \frac{1+b}{0}$$

Para que $L = \frac{1+b}{0}$ sea finito, es necesario que 1 + b = 0, es decir, b = - 1.

Hallamos L para b = - 1:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - sen\, x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\, sen\, x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen\, x}{3x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3} = -\frac{1}{3}$$

En las igualdades (*) hemos aplicado la regla de L´Hôpital.

40. Calcula, en cada caso, el valor de los parámetros para que se cumplan las igualdades:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen\, x} = 2$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen\,(x^2)} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2ax + b - 2e^{2x}}{2x \cos x^2} = \dfrac{b-2}{0} = 1 \;\Rightarrow\; b - 2 = 0 \;\Rightarrow\; b = 2.$

Sustituimos b = 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + 2x + 1 - e^{2x}}{sen\,(x^2)} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2ax + 2 - 2e^{2x}}{2x \cos x^2} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2a - 4e^{2x}}{2 \cos x^2 - 2x \cdot 2x\, sen\, x^2} = \frac{2a-4}{2}$$

I
gualamos la última expresión con el valor de límite y obtenemos:

$$\frac{2a-4}{2} = 1 \;\Rightarrow\; 2a - 4 = 2 \;\Rightarrow\; a = 3$$

En las igualdades (*) hemos aplicado la regla de L´Hôpital.

b) Aplicando la regla de L´Hôpital en las igualdades señaladas con (*), obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen\, x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} + k}{1 - \cos x}$$

Como el denominador es 0 cero, para que el límite no sea infinito ha de verificarse que el numerador también es cero. Por tanto:

$$1 + 1 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = -2$$

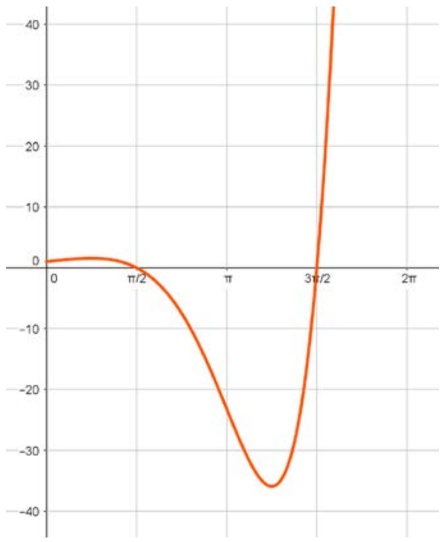
Comprobamos que para k = - 2, el límite vale 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

41. Halla los valores de x $\in$ [0, 2π] en los que la función f (x) = e^x · cos x presenta extremos relativos y/o puntos de inflexión.

Esta función tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{\pi}{4}$, un mínimo relativo en $x = \dfrac{5\pi}{4}$ y un punto de inflexión en x = π.

Pueden verse en la gráfica del dibujo.



42. Demuestra que $e^x \geq 1 + x$ con $x \geq 0$.

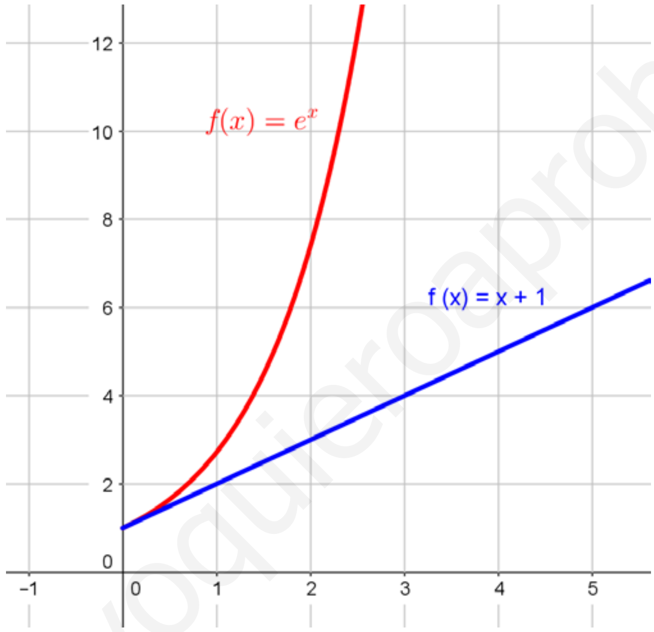
Aplicamos el teorema de Lagrange a la función f (x) = e^x en el intervalo (0, x). Esta función es continua en el intervalo [0, x] y derivable en (0, x), por tanto, existe c $\in$ (0, x) que cumple:

$$e^c = \frac{e^x - 1}{x}$$

Como c > 0, $e^c > 1$ de donde $\frac{e^x - 1}{x} > 1$.

Por tanto, de aquí deducimos que $e^x > x + 1$ para x > 0. La igualdad es evidente que se cumple para x = 0.

Lo anterior podemos verlo en el dibujo.



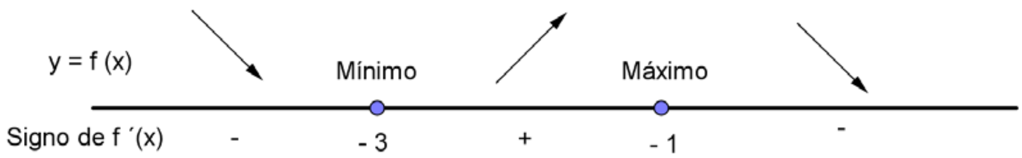
ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 274

1. Dada la función $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$ determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

Hallamos las dos primeras derivadas para estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función:

$$f\,'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{e^x} = -\frac{(x+1)(x+3)}{e^x} \quad \text{y} \quad f\,''(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{e^x}$$

El estudio del signo de la primera derivada f ´ podemos verlo en el esquema que sigue:



Por tanto:

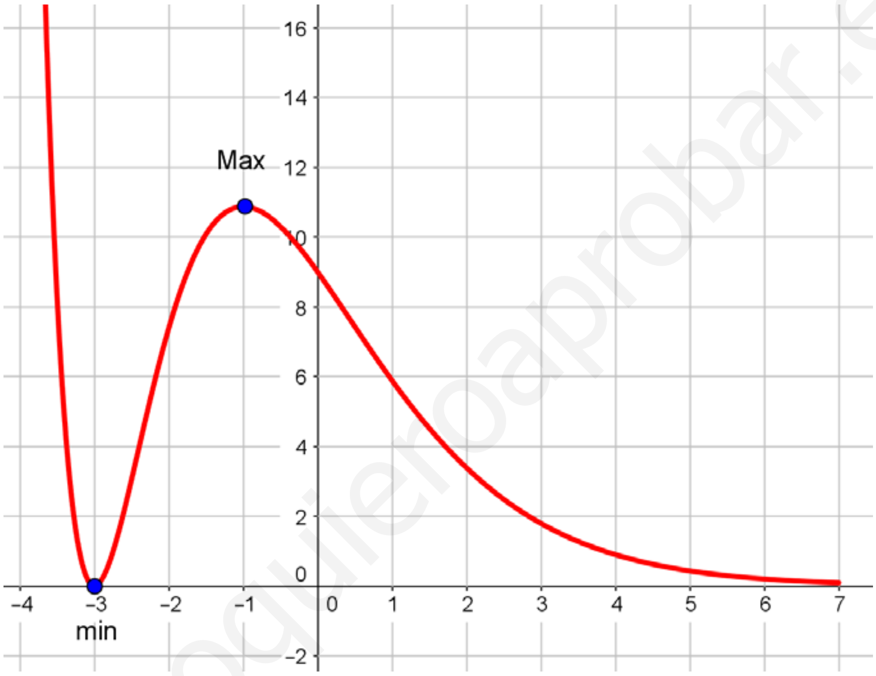
- La función es estrictamente creciente en el intervalo (- 3, - 1).

- La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.

- La función tiene un mínimo relativo en el punto (- 3, 0), al ser $f''(-3) > 0$.

- La función tiene un máximo relativo en el punto (- 1, 4e), al ser $f''(-1) < 0$.

Todo lo anterior puede verse en el dibujo adjunto.



2. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál es esa producción?

Sea x el número de árboles a plantar a partir de 24. La información del enunciado la recogemos en la tabla que sigue.

Número de árboles	**Frutos por árbol**
24	600
24 + x	600 – 15x

La función producción es:

$y = (24 + x) \cdot (600 – 15x) = - 15x^2 + 240x + 14\,400$

Para hallar el máximo igualamos a cero la derivada primera:

$y'(x) = – 30x + 240 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8$

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un máximo:

$y''(x) = - 30 < 0$

Para que la producción sea máxima hay que plantar 24 + 8 = 32 árboles.

La producción máxima asciende a y (32) = (24 + 8) · (600 – 15 · 8) = 15 360 frutos.

3. Determina, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.

Primer procedimiento.
Para un triángulo de lados a, b y c; el área, en función de los lados, viene expresada, según la fórmula de Herón, en la forma:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \text{ siendo } p = \frac{a + b + c}{2}$$

Consideramos un triángulo equilátero de perímetro 6 metros y lados x, y, y como puede apreciarse en el dibujo.

En nuestro caso el valor del semiperímetro p es 6/2= 3 metros.

La expresión de la función, en las variables x e y, que da el área del triángulo es:

$$A(x, y) = \sqrt{3 \cdot (3 - x) \cdot (3 - y) \cdot (3 - y)}$$

La relación entre las variables x e y es x + 2y = 6 o x = 6 – 2y. Sustituyendo esta última relación en la fórmula anterior, obtenemos:

$$A(y) = \sqrt{3 \cdot (2y - 3) \cdot (3 - y) \cdot (3 - y)} \quad \Rightarrow \quad A(y) = \sqrt{6y^3 - 45y^2 + 108y - 81}$$

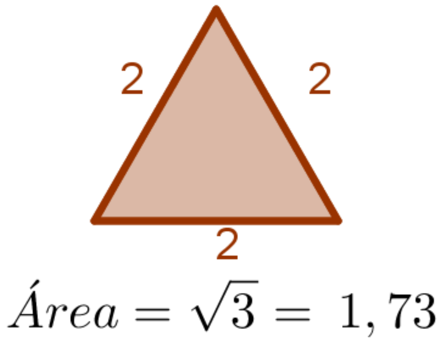
Para encontrar el valor de y que hace la función máxima, es decir, el área máxima, derivamos la función y encontramos el valor o valores que anula la primera derivada.

$$A'(y) = \frac{1}{2\sqrt{6y^3 - 45y^2 + 108y - 81}} \cdot (18y^2 - 90y + 108)$$

$$A'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 18y^2 - 90y + 108 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 5y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

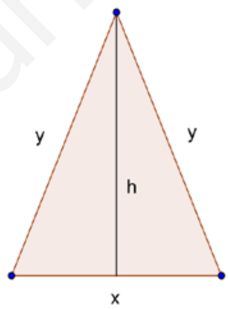
Si y = 3, el valor de x es 0 y el área del triángulo sería 0, lo que da lugar a un mínimo.

Si y = 2, el valor de x = 2 y el triángulo, además de ser isósceles, es equilátero. Este es el triángulo de área máxima de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.



Segundo procedimiento.
Para un triángulo de base b y altura h, el área vale:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



Consideramos un triángulo equilátero de perímetro 6 metros, de altura h y lados x, y, y como puede apreciarse en el dibujo.

La relación entre x, h e y (teorema de Pitágoras) es:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{4y^2 - x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2}$$

La expresión de la función, en las variables x e y, que da el área del triángulo es:

$$A\,(x,\ y) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{4y^2 - x^2}$$

La relación entre las variables x e y es x + 2y = 6 o $y = 3 - \frac{x}{2}$. Sustituyendo esta última relación en la fórmula anterior, obtenemos:

$$A\,(x) = \frac{1}{4}\, x \sqrt{4\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad A\,(x) = \frac{1}{4}\, x\, \sqrt{36 - 12x} \quad \Rightarrow \quad A\,(x) = \frac{1}{4}\sqrt{36x^2 - 12x^3}$$

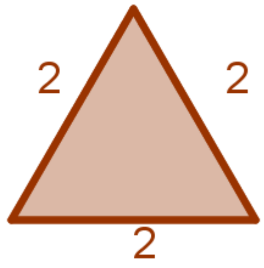
Para encontrar el valor de x que hace la función máxima, es decir, el área máxima, derivamos la función y encontramos el valor o valores que anula la primera derivada.

$$A\,'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{36x^2 - 12x^3}} \cdot (72x - 36x^2)$$

$$A\,'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 72x - 36x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 36x\,(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Si x = 0, el valor de y es 3 y el área del triángulo sería 0, lo que da lugar a un mínimo.

Si x = 2, el valor de y = 2 y el triángulo, además de ser isósceles, es equilátero. Este es el triángulo de área máxima de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.



$$\acute{A}rea = \sqrt{3} = 1,73$$

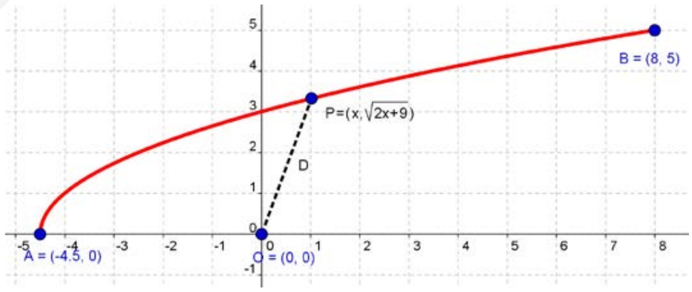
4. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4,5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto (0, 0). Obtén razonadamente:

a) La distancia del meteorito al Sol desde el punto P de su trayectoria cuya abscisa es x.

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. Calcula esta distancia mínima.

a) Sea $P\left(x, \sqrt{2x+9}\right)$ un punto cualquiera de la gráfica de la función $y = \sqrt{2x+9}$.

La distancia, D (x), desde el punto P de la trayectoria hasta el Sol, situado en el punto O (0, 0) es:

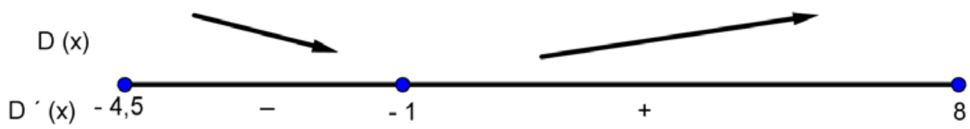


$$D(x) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$$

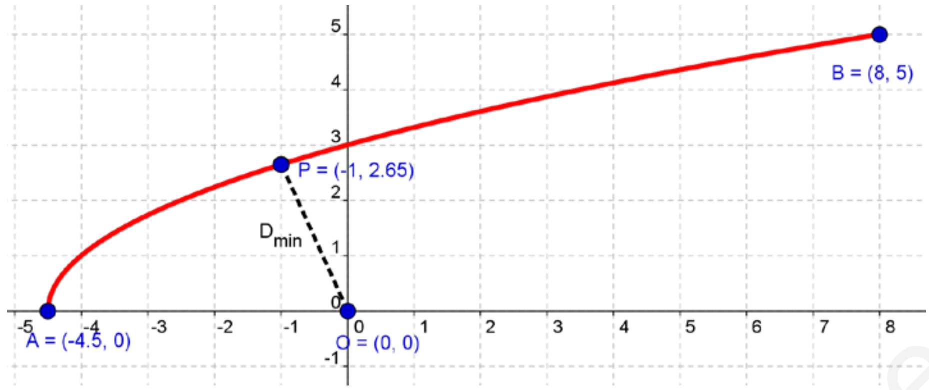
b) Para obtener la distancia mínima, igualamos a cero la derivada primera:

$$D'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad P\left(-1, \sqrt{7}\right)$$

Estudiando el crecimiento de la distancia, comprobamos que se trata de un mínimo:

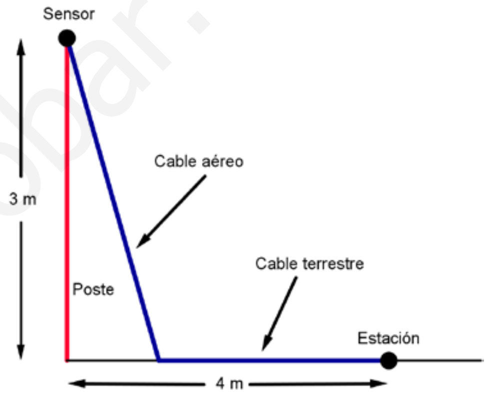


Si x = - 1, la distancia mínima es $D_{\min}(-1) = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8}$. Puede verse en el dibujo.



5. Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge los datos meteorológicos. Dichos datos deben trasmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento que está situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (ver dibujo).

El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?

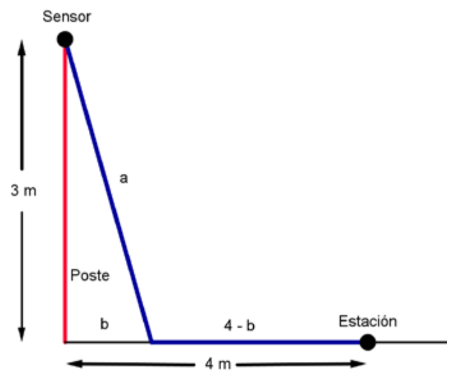


Llamamos **a** a la longitud del cable aéreo y **b** a la longitud entre la base del poste y el punto donde comienza el cable terrestre, por tanto el cable terrestre medirá **4 - b**.

La función minimizar es C (a, b) = 3000a + 1000 · (4 – b).

Observamos el triángulo rectángulo que se forma en el dibujo y aplicamos el teorema de Pitágoras, lo que nos da la relación entre las variables **a** y **b**:

$$a^2 = b^2 + 9$$



Despejamos en la condición anterior y sustituimos en la función que queremos minimizar:

$$a = \sqrt{b^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad C\,(b) = 3000 \cdot \sqrt{b^2 + 9} + 1000 \cdot (4 - b)$$

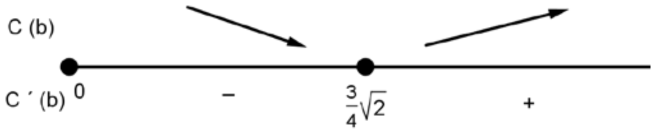
Para obtener los puntos críticos, igualamos a cero la primera derivada:

$$C\,'\,(b) = \frac{3000 \cdot 2b}{2\,\sqrt{b^2 + 9}} - 1000 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3b - \sqrt{b^2 + 9} = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 9 = 9b^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{\frac{9}{8}} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Consideramos la solución positiva, $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$, por tratarse de una distancia.

Estudiamos el signo de C ´ (b):



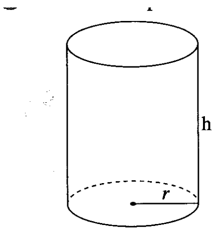
Por tanto, en $b = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ se alcanza el mínimo.

Se necesitan:

$4 - b = 4 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ metros de cable terrestre y

$a = \sqrt{b^2 + 9} = \dfrac{9}{4}\sqrt{2}$ metros de cable aéreo.

6. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que este tenga volumen máximo.



Sea un cilindro de radio de la base r y altura h.

La función a maximizar es V (r, h) = $\pi r^2 h$.

La condición entre las variables r y h es: A = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 54$.

Despejamos la variable h en la condición y sustituimos en la función a optimizar:

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{27 - \pi r^2}{\pi r}\right) \quad \Rightarrow \quad V(r) = 27r - \pi r^3$$

Para hallar los extremos relativos, derivamos e igualamos a cero:

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{9}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

Con la derivada segunda, comprobamos que se trata de un mínimo:

$$V''(r) = -6r\pi \quad \Rightarrow \quad V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0$$

Sustituimos r en la expresión de h para hallar la altura:

$$h = \frac{27 - \pi\left(\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi\left(\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\right)} = \frac{27 - 9}{\dfrac{3\pi}{\sqrt{\pi}}} = \frac{18}{3\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\ m.$$

7. Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si\ x\le 0\\ x^2+ax & si\ x>0\end{cases}$ **verifique el teorema de Rolle en el intervalo** $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$**. Calcula el valor** $c\in\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$ **tal que f ´ (c) = 0.**

Las funciones parciales que forman f (x) son continuas en el intervalo en que están definidas.

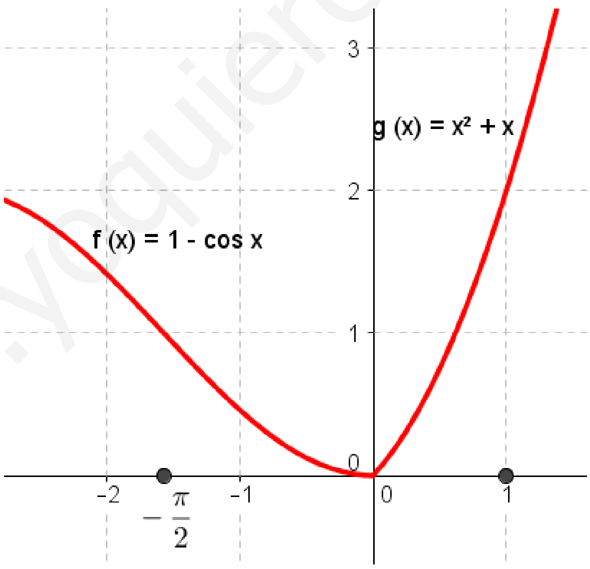
Como $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax)=0$ para todo a $\in$ R, f (x) es continua en $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$.

Se tiene que $f\,'(x)=\begin{cases}sen\ x & si\ x\le 0\\ 2x+a & si\ x>0\end{cases}$. Para que f (x) sea derivable en x = 0, entonces:

$$f\,'(0^-)=f\,'(0^+)\quad\Rightarrow\quad 0=a$$

Además: $\begin{cases}f\left(-\pi/2\right)=1-\cos\left(\pi/2\right)=1\\ f(1)=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f\left(-\pi/2\right)=f(1)$

Si $c\in\left(-\frac{\pi}{2},1\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}sen\ c=0 & \Rightarrow\ c=0\\ 2c=0 & \Rightarrow\ c=0\end{cases}$



8. Encuentra los ceros de la primera derivada de la función f (x) = x^3 – 12x + a. Prueba que, con independencia del valor de a, la ecuación x^3 – 12x + a = 0 no tiene dos soluciones distintas en el intervalo [- 2, 2].

● La derivada de la función f (x) = x^3 – 12x + a es f ´ (x) = $3x^2$ – 12. Los valores que anulan la derivada anterior son:

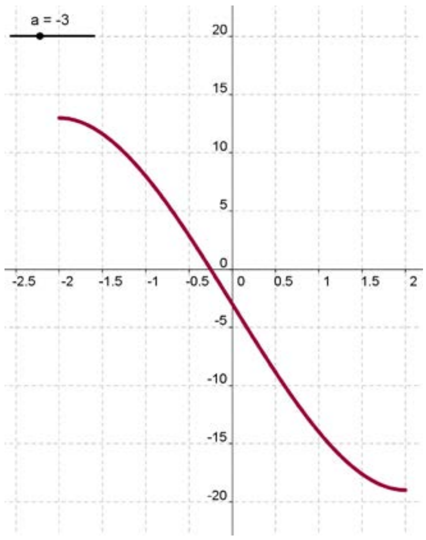
$$3x^2-12=0\quad\Rightarrow\quad x^2=4\quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$

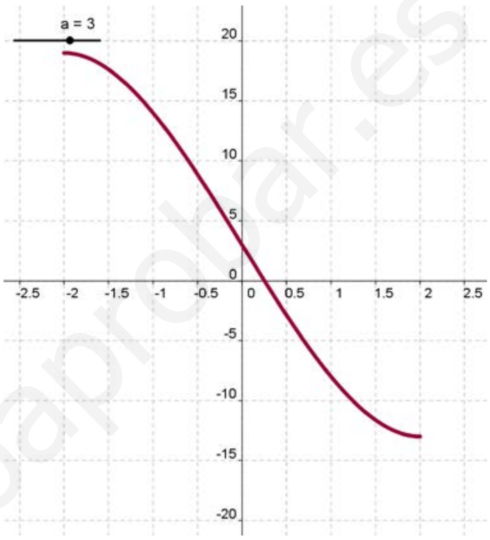
● La función f (x) es continua y derivable en R por ser polinómica.

Si $x^3 - 12x + a = 0$ tuviera dos soluciones distintas, x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo [- 2, 2], por el teorema de Rolle, existiría $c \in (c_1, c_2) \subset (-2, 2)$ con f ´ (c) = 0.

Pero esto es absurdo pues f ´(x) solo se anula para x = $\pm$ 2, con independencia del valor de a. Por tanto, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no tiene dos soluciones distintas en [- 2, 2].

En las gráficas pueden verse los casos particulares a = - 3 y a =3.





9. Considera la función f : [0, 2π] → R definida por f (x) = 2x + sen x. Comprueba si cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange y, en caso afirmativo, encuentra todos los puntos a los que hace referencia el teorema.

9. Se tiene que la función f (x) es continua en [0, 2π] y derivable en (0, 2π).

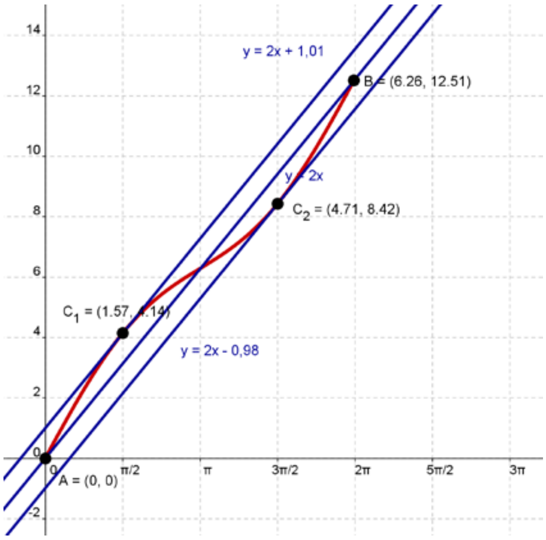
La derivada de f (x) es f ´ (x) = 2 + cos x.

Además, f (0) = 0 y f (2π) = 4π.

Según el teorema de Lagrange:

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{4\pi - 0}{2\pi - 0} = 2 = 2 + \cos c\,,$$

siendo c $\in$ (0, 2π). Claramente, cos c = 0.



Así, $c_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y $c_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ son los dos puntos en [0, 2π] a los que hace referencia la tesis del teorema.

En la imagen pueden verse los resultados anteriores.

10. Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \cdot \text{sen } x - x e^x}{x^2}$ **es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.**

Aplicando la regla de L´Hôpital en las igualdades señaladas con (*), obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \,\text{sen } x - x\, e^x}{x^2} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{a \cos x - \left[e^x + x\, e^x\right]}{2x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\,\text{sen } x - e^x - \left[e^x + x\, e^x\right]}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

El parámetro a debe valer 1 para que el límite sea finito.

11. Prueba que si x > 0, se cumple: $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

Aplicamos el teorema de Lagrange a la función f (x) = ln (x + 1) en el intervalo (0, x). Esta función es continua en el intervalo [0, x] y derivable en (0, x), por tanto, existe c $\in$ (0, x) que cumple:

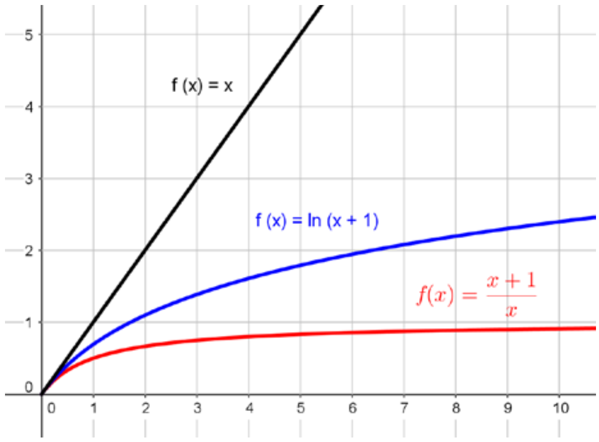
$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Como c > 0, 1 + c > 1 y $\dfrac{1}{1+c<1}$, de donde $\dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1$, es decir, ln (z + 1) < x.

Por otro lado, c < x, entonces 1 + c < 1 + x y $\dfrac{1}{1+c} > \dfrac{1}{1+x}$, de donde $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, es decir, que $\ln(x+1) > \dfrac{x}{1+x}$.

De este modo tenemos demostrada la desigualdad para x > 0.

Lo anterior podemos verlo en el gráfico.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 275

PUNTOS DE INFLEXIÓN

1. Utilizando medios tecnológicos (calculadora gráfica o programa informático) obtén la gráfica de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

a) Determina los puntos singulares: máximo, mínimo y punto de inflexión. ¿La recta determinada por los extremos relativos, pasa por el punto de inflexión?

b) Si llamamos M al máximo, P al mínimo e I al punto de inflexión, halla la razón de las longitudes de los segmentos MI e IP.

c) ¿Ocurre lo mismo para cualquier función cúbica con tres puntos singulares? ¿Podrías probarlo?

2. Dibuja la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$.

a) Halla las coordenadas de los puntos de inflexión, llamándolos B y C. Determina los puntos A y D, donde la recta determinada por B y C corta de nuevo a la gráfica anterior.

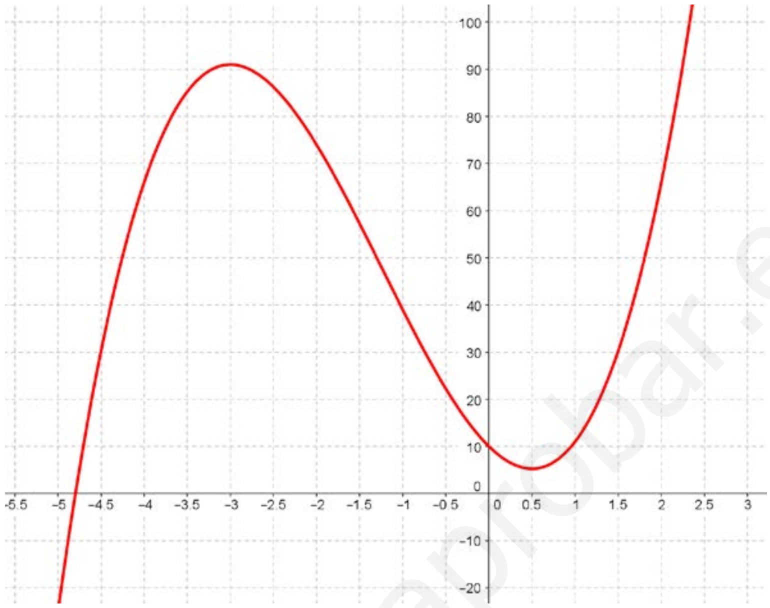
b) Calcula la longitud de los segmentos AB, BC y CD, y determina el valor de las razones: $\dfrac{AB}{CD}$ y $\dfrac{BC}{CD}$.

c) Elige otras funciones de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que la gráfica anterior y estudia las mismas razones.

d) Los resultados que has obtenido, ¿se mantienen para cualquier función de cuarto grado con dos puntos de inflexión? ¿Podrías probarlo?

La parte gráfica de estas actividades está resuelta con el programa GeoGebra.

1. La gráfica de la función puede verse en la imagen, después de ajustar adecuadamente la Vista gráfica.



a) Para determinar los puntos singulares hallamos las derivadas de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ y obtenemos:

$f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$ $\quad$ $f''(x) = 24x + 30$ $\quad$ $f'''(x) = 24$

Los valores que anulan la primera derivada son x = - 3 y x = 0,5. El valor que anula la segunda derivada es x = - 1,25.

Los puntos singulares de la función son:

Máximo: M (- 3, 91), Mínimo: P (0,5; 5,25) Punto de inflexión: I (-1,25; 48,125)

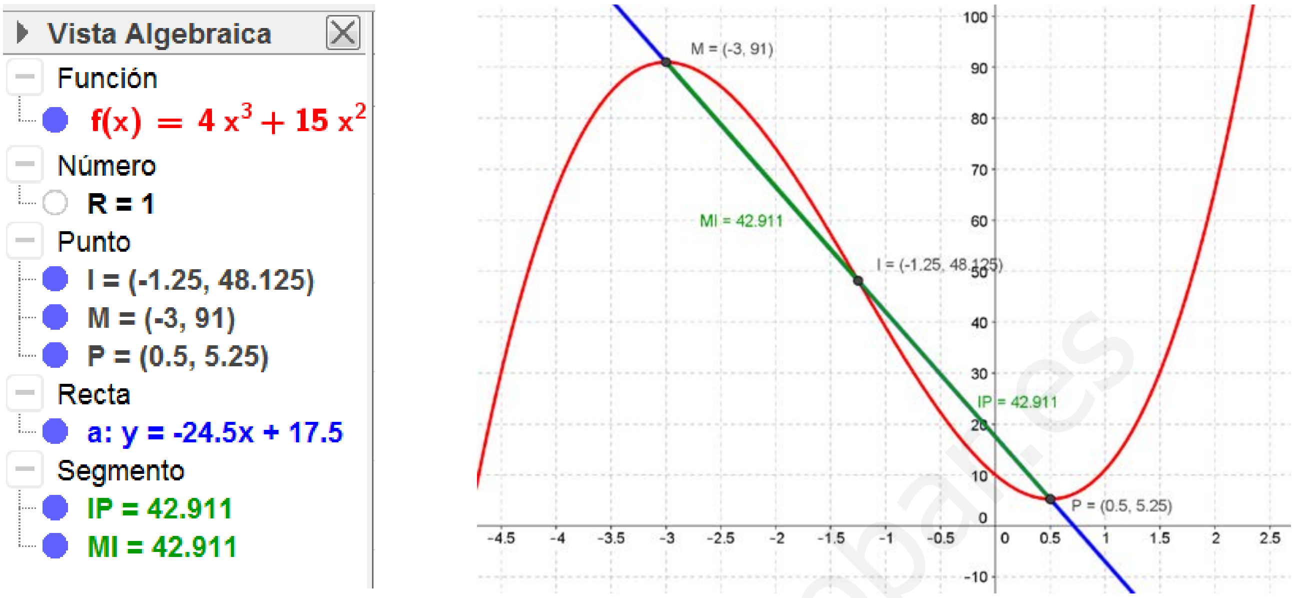
La recta determinada por los extremos relativos, M (- 3, 19) y P (0,5; 5,25), tiene por ecuación:

$$y = - 24,5x + 17,5.$$

Comprobamos que la recta citada pasa por el punto de inflexión I (-1,25; 48,125):

$$y(- 1,25) = - 24,5 \cdot (- 1,25) + 17,5 = 48,125$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



b) Siendo los puntos: M (- 3, 91), P (0,5; 5,25) e I (-1,25; 48,125), los segmentos MI e IP miden:

$$MI = \sqrt{(-3+1{,}25)^2 + (91-48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

$$IP = \sqrt{(0{,}5+1{,}25)^2 + (5{,}25-48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

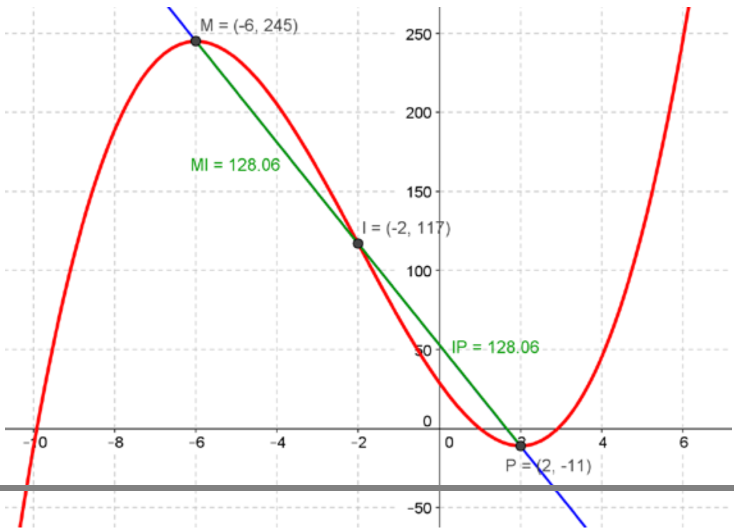
Como los segmentos tienen la misma longitud, el valor de la razón pedida es 1.

c) Probamos con la función f (x) = $x^3 + 6x^2 - 36x + 29$.

En la imagen puede verse que, en este caso, los puntos son:
Máximo: M (- 6, 245), Mínimo: P (2, - 11) Punto de inflexión: I (- 2, 117)

Las longitudes de los segmentos MI e IP son:

$$MI = \sqrt{(-6+2)^2 + (245-117)^2} = \sqrt{16 + 16384} = 128{,}06$$
$$IP = \sqrt{(2+2)^2 + (-11-117)^2} = \sqrt{16 + 16384} = 128{,}06$$



Vamos a probar que los resultados

obtenidos en las dos funciones anteriores son válidos para cualquier función cúbica con tres puntos singulares, es decir, el punto de inflexión (I) es el punto medio del segmento cuyos extremos son el máximo (M) y el mínimo relativo (P), por tanto, los tres puntos están alineados y los segmentos MI e IP tienen la misma longitud.

Sea la función cúbica f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$.

Anulamos la primera derivada f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$ y obtenemos las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P):

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = \begin{cases} x_P = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ x_M = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \end{cases}$$

Anulamos la segunda derivada f ´´ (x) = 6ax + 2b y obtenemos la abscisa del punto de inflexión (x_I):

$$x_I = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Comprobamos que la media aritmética de las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P) coincide con la abscisa del punto de inflexión (x_I).

Teniendo en cuenta la relación de Cardano, correspondiente a la ecuación $3ax^2$ 2bx + c = 0, obtenemos:

$$\frac{x_M + x_P}{2} = \frac{-\dfrac{2b}{3a}}{2} = -\frac{b}{3a} = x_I$$

También puede comprobarse que la media aritmética de las ordenadas del máximo [y_M = f (x_M)] y del mínimo [y_P = f (x_P)] coincide con la ordenada del punto de inflexión [y_I = f (x_I)].

Las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$f\ (x_m) = a\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) + d$$

$$f\ (x_P) = a\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) + d$$

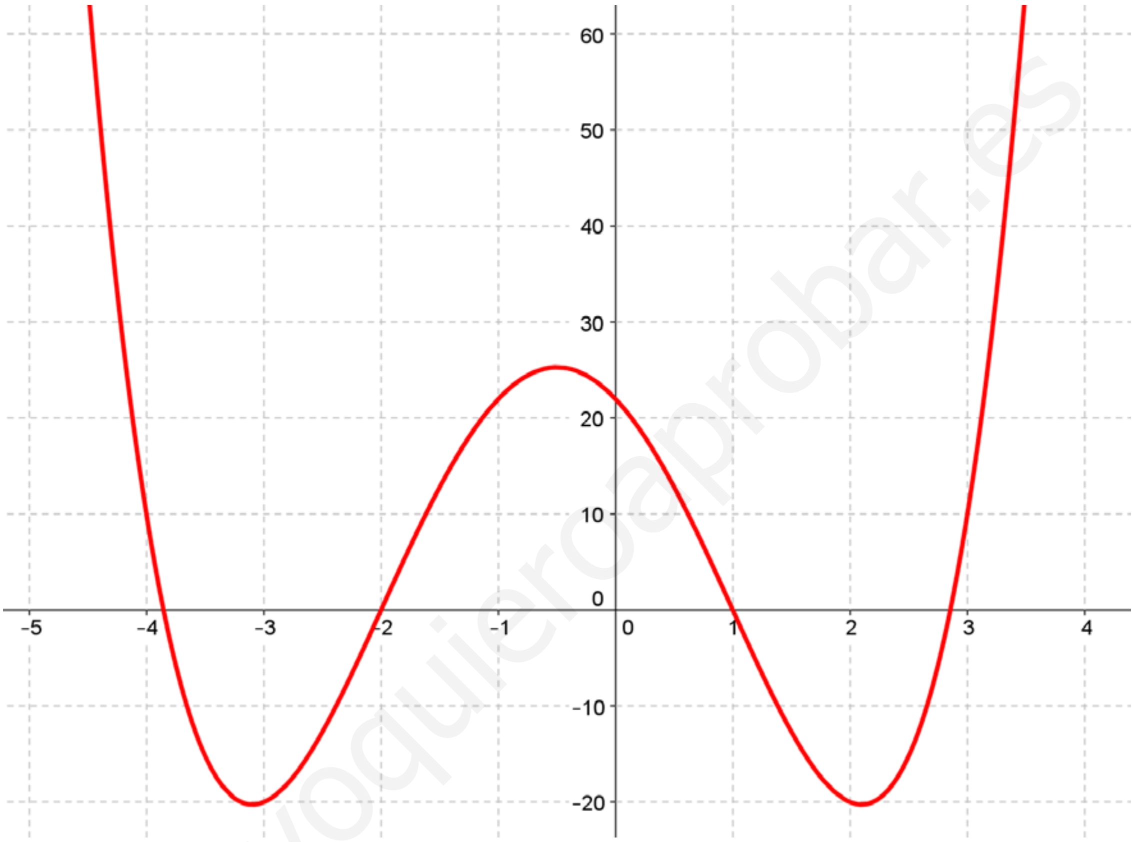
Operando y simplificando obtenemos que la media aritmética de las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$\frac{f\ (x_M) + f\ (x_P)}{2} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

La ordenada del punto de inflexión es:

$$f\ (x_I) = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \ldots = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

2. Ajustando la Ventana gráfica obtenemos la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$ que puede verse en el dibujo.



a) Para hallar los puntos de inflexión de la función f (x) obtenemos las derivadas:

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 13$ $\qquad$ $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$ $\qquad$ $f'''(x) = 24x + 12$

Anulamos la segunda derivada y obtenemos:

$$12\ (x^2 + x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_B = -2 \\ x_C = 1 \end{cases}$$

Los puntos de inflexión son:

$x_B = -2$; $\quad y_B = f(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 12\cdot(-2)^2 - 13\cdot(-2) + 22 = 0 \quad \Rightarrow$ B (- 2, 0)

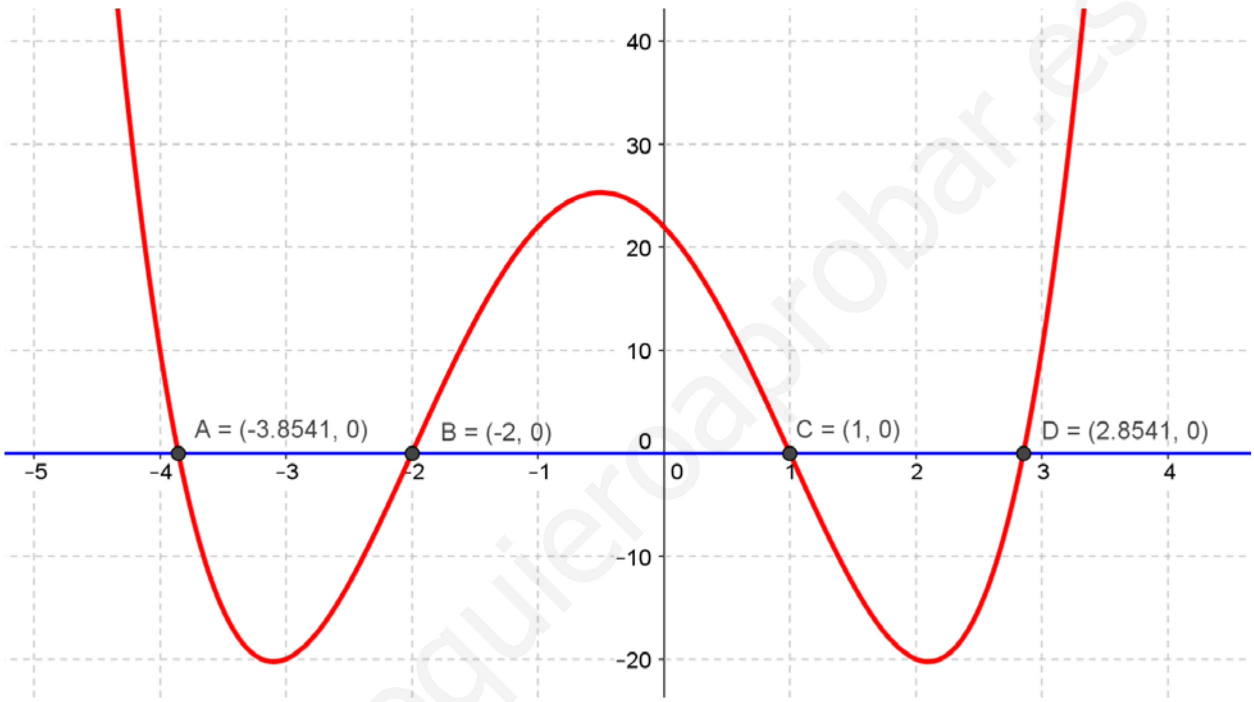
$x_B = 1$; $\quad y_B = f(1) = (1)^4 + 2\cdot(1)^3 - 12\cdot(1)^2 - 13\cdot(1) + 22 = 0 \quad \Rightarrow$ C (1, 0)

La recta determinada por B y C es y = 0 y los puntos A y D, donde la recta anterior corta a la gráfica son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos los puntos: A (- 3,8541; 0) y D (2,8541; 0).

Los puntos anteriores pueden verse en la gráfica que sigue.



b) Calculamos la longitud de los segmentos AB, BC y CD:

AB = (- 2) – (- 3,8541) = 1,8541   BC = 1 – (- 2) = 3   CD = 2,8541 – 1 = 1,8541

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1{,}8541}{1{,}8541} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{3}{1{,}8541} = 1{,}6180$$

c) Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 - 6x + 1$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, 1) y C (1, - 9).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 5x – 4.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; 7,1803) y D (2,2361; - 15,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(-1-(-2{,}2361))^2 + (1-7{,}1803)^2} = 6{,}3027$$

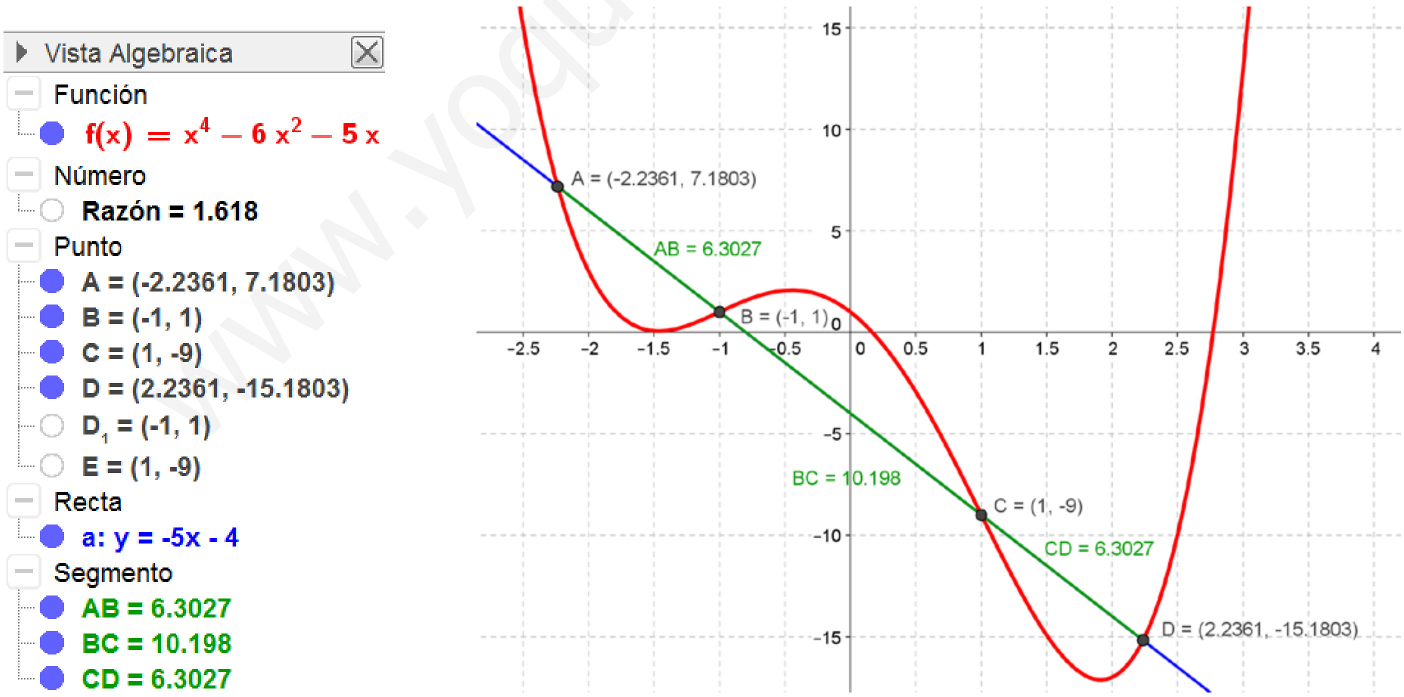
$$BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-9-1)^2} = 10{,}1980$$

$$CD = \sqrt{(2{,}2361-1)^2 + (-15{,}1803+9)^2} = 6{,}3027$$

El valor de las razones: $\dfrac{AB}{CD}$ y $\dfrac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6{,}3027}{6{,}3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10{,}1980}{6{,}3027} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 + 5x$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, - 10) y C (1, 0).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = 5x – 5.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; - 16,1803) y D (2,2361; 6,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(-1-(-2{,}2361))^2 + (-10-(-16{,}1803))^2} = 6{,}3027$$

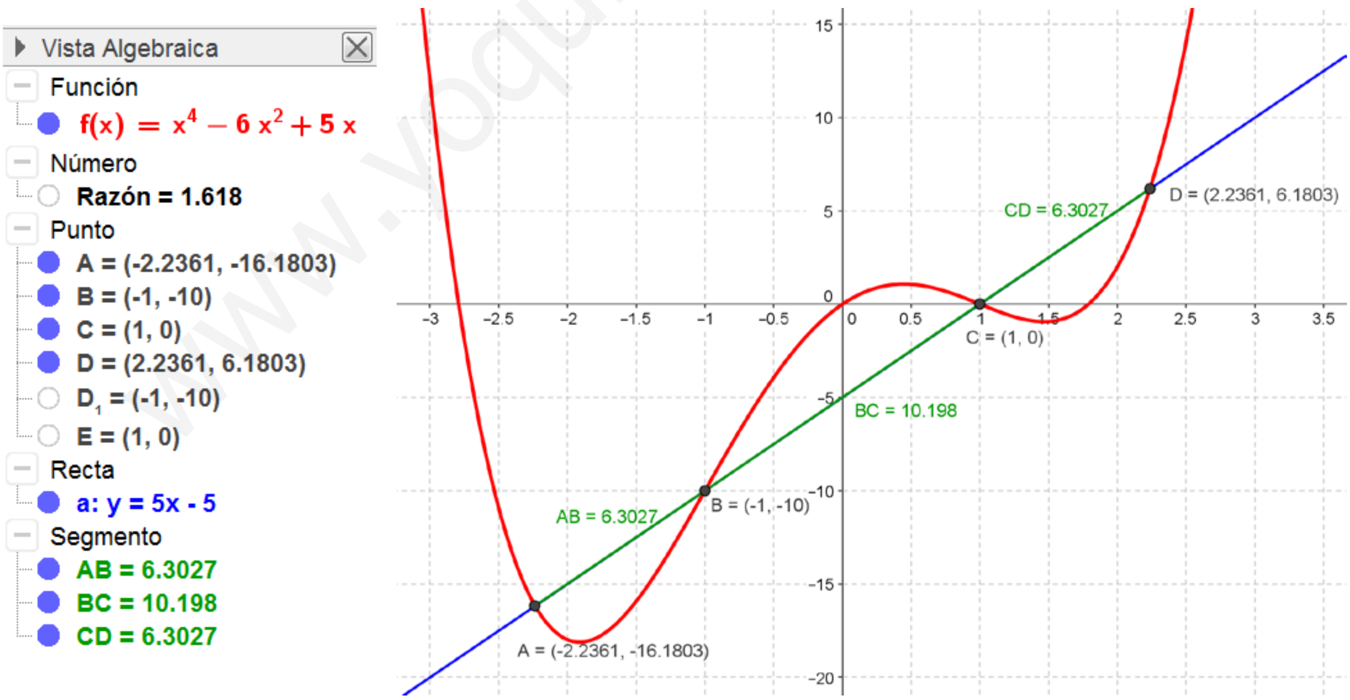
$$BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-(-10))^2} = 10{,}1980$$

$$CD = \sqrt{(2{,}2361-1)^2 + (6{,}1803-0+9)^2} = 6{,}3027$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6{,}3027}{6{,}3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10{,}1980}{6{,}3027} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Para la función f (x) = $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12x + 24$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (1, 23) y C (3, 15).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 4x + 27.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 0,2361; 27,9443) y D (4,2361; 10,0557).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(1-(-0{,}2361))^2 + (23-27{,}9443)^2} = 5{,}0964$$

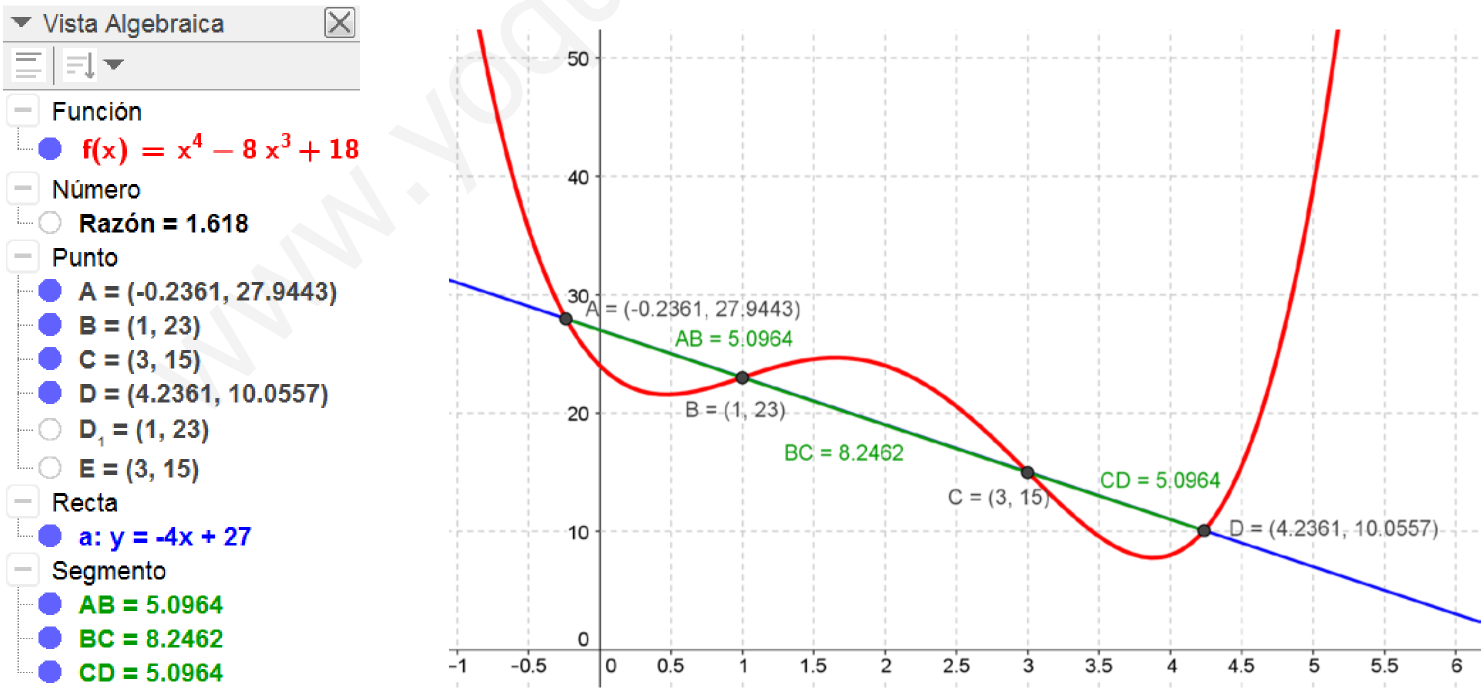
$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (15-23)^2} = 8{,}2462$$

$$CD = \sqrt{(4{,}2361-3)^2 + (10{,}0557-15)^2} = 5{,}0964$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5{,}0964}{5{,}0964} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{8{,}2462}{5{,}0964} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Vamos a probar que las razones anteriores se mantienen para cualquier función polinómica de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que las estudiadas con anterioridad.

Para simplificar los cálculos hacemos que la recta que une los cuatro puntos de corte con la gráfica, ABCD, sea el eje OX (y = 0). Tomamos los puntos de inflexión B (0, 0) y C (a, 0), con a > 0. El valor de las razones anteriores se mantendrá, sólo cambiará el valor de los segmentos AB, BC y CD.

Sea y = f (x) la función buscada, con B (0, 0) y C (a, 0) los puntos de inflexión, entonces:

$$f''(x)\ x \cdot (x - a) = x^2 - ax$$

Integrando, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + b$$

$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + bx + c$, con b y c constantes reales.

Calculamos las constantes b y c haciendo que los puntos B (0, 0) y C (a, 0) pertenezcan a la gráfica de la función y = f (x), obtenemos:

$$b = \frac{a^3}{12} \text{ y } c = 0.$$

La función es: $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^3x}{12}$, es decir, $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x$

Hallamos los puntos de corte de de y = f (x) con la recta ABCD (y = 0):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La factorización del polinomio $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x$ es:

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x = \frac{1}{12}x \cdot (x - a)\ (x^2 - ax - a^2)$$

Las soluciones del sistema son:

$$A: \begin{cases} x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad C: \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad D: \begin{cases} x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

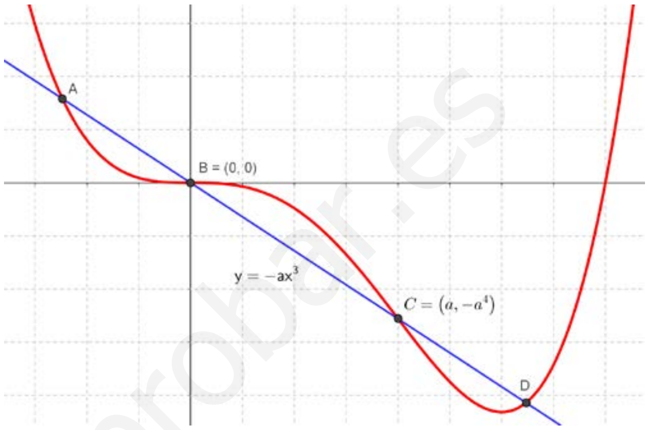
$$AB = \left| \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \right| \qquad BC = a \qquad CD = \left| \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \right|$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD}=1 \qquad \frac{BC}{CD}=\frac{a}{\left|\frac{-a+a\sqrt{5}}{2}\right|}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180$$

d) Consideramos una función polinómica de grado 4 que no tenga la forma de las anteriores, por ejemplo, la función que tiene como raíces a 0 (triple) y a 2a, con a positivo. Esta función es:

f (x) = $x^3 \cdot (x - 2a)$, es decir, f (x) = $x^4 - 2ax^3$



Hallamos sus puntos de inflexión:

f ´ (x) = $4x^3 - 6ax^2$

f ´´ (x) = $12x^2 - 12ax = 12x\,(x - a)$

Los puntos de inflexión son B (0, 0) y C (a, - a^4)

La ecuación de la recta determinada por los puntos B y C es y = - a^3x.

Hallamos los puntos A y D resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 - 2ax^3 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2ax^3 + a^3x = 0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot(x-a)\cdot(x^2 - ax - a^2) = 0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 0, \quad x_C = a, \quad x_A = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2}, \quad x_D = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = -a^3x \end{cases}$$

Los puntos de intersección de la recta y la función son:

$$A\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}\right), \quad \text{B (0, 0)} \quad \text{C (a, - }a^4) \quad D\left(\frac{a+a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4-a^4\sqrt{5}}{2}\right)$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^8\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\sqrt{a^2+a^8}$$

$$BC=\sqrt{a^2+(-a^4)^2}=\sqrt{a^2+a^8}$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{a-a\sqrt{5}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{-a^4+a^4\sqrt{5}}{2}+a^4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-a+a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{a^4-a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$= \sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a^8 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \sqrt{a^2 + a^8}$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 + a^8}}{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \sqrt{a^2 + a^8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180$$

Concluimos que en todas las funciones polinómicas de grado 4 con dos puntos de inflexión, de los tres segmentos que se forman al cortar la gráfica con la recta que pasa por los dos puntos de inflexión, dos son iguales y la razón del tercero con los anteriores es el número áureo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180.$$