UNIDAD 9: Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 220

1. Dada la función $f\ (x) = \sqrt{2x - 3}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x + h) - f\ (x)}{h}$$

El límite buscado es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x + h) - f\ (x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x + h) - 3} - \sqrt{2x - 3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2\ (x + h) - 3} - \sqrt{2x - 3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2\ (x + h) - 3} + \sqrt{2x - 3}}{\sqrt{2\ (x + h) - 3} + \sqrt{2x - 3}} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h \cdot \left(\sqrt{2(x + h) - 3} + \sqrt{2x - 3}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2(x + h) - 3} + \sqrt{2x - 3}\right)} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

2. Dada la función $f\ (x) = |3x - 6|$, calcula:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f\ (2 + h) - f\ (2)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f\ (2 + h) - f\ (2)}{h}$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f\ (2 + h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3\ (2 + h) + 6 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f\ (2 + h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3\ (2 + h) - 6 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2x^2 - 10x + 15$ en el punto de abscisa 3.

El valor de la pendiente de la recta tangente es f ´ (3) = 2.

La ecuación de la recta tangente en el punto de la parábola (3, 3) es:

$$y - 3 = 2 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 3$$

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 239

1. Número impares. Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número impar.

Se puede decir:

Los números de la forma 2n + 1 y 2n + 3 son números impares. Su suma es:

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4 \cdot (n + 1).$$

2. Números cuadrados. Demuestra que si a, b, c y d son números naturales, tales que:

$$\mathbf{P = a^2 + b^2 \quad y \quad Q = c^2 + d^2}$$

entonces el producto PQ es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

Queda del siguiente modo:

$$P \cdot Q = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac + bd)^2 + (ad – bc)^2$$

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 241

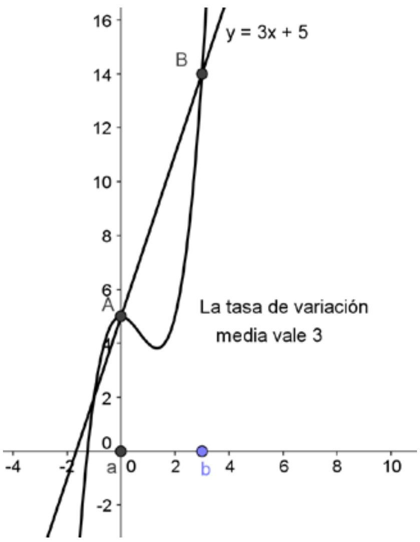
1. Halla la tasa de variación media de las funciones que siguen en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 – 2x^2 + 5$ **en [0, 3]** **b)** $f(x) = \sqrt{x+5}$ **en [4, 11]**

En ambos apartados procedemos de la misma forma.

a) Seguimos los pasos siguientes:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-2x^2+5** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.



- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 0 y el punto B de abscisa x = 3. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [0, 3].

- En este caso, la tasa de variación media vale 3.

b) Seguimos los pasos siguientes:

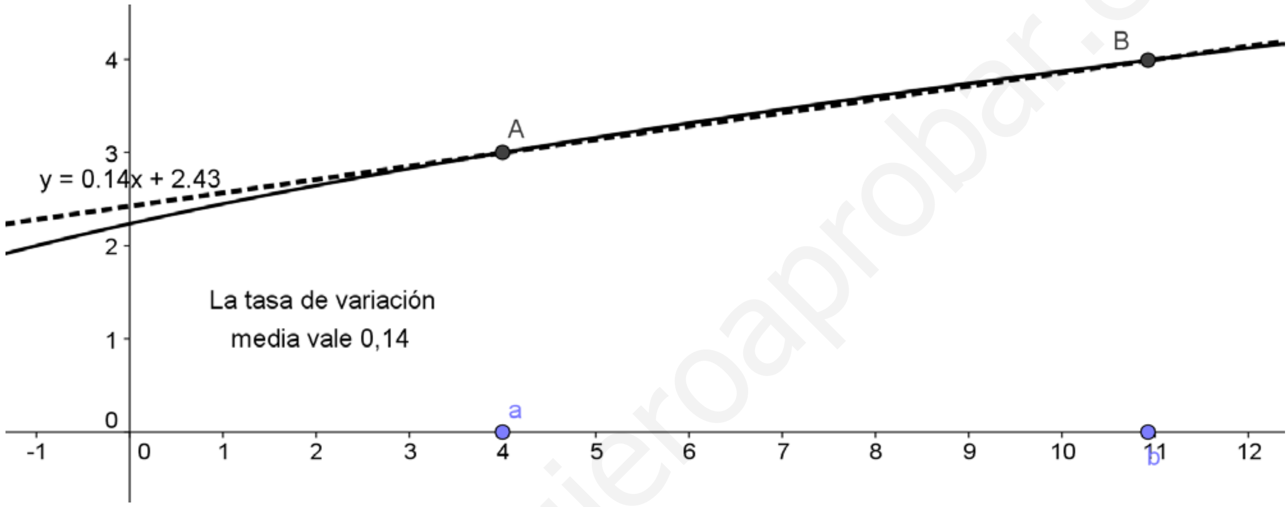
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=sqrt(x+5)** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 4 y el punto B de abscisa x = 11. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [4, 11].

- En este caso, la tasa de variación media vale 0,14.



2. Calcula f ´ (1) y f ´ (2) en la gráfica de la función f(x) = 6x^2 – 2x^3. Dibuja las tangentes a la gráfica de la función anterior en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2.

Para calcular f ´ (1) seguimos los pasos:

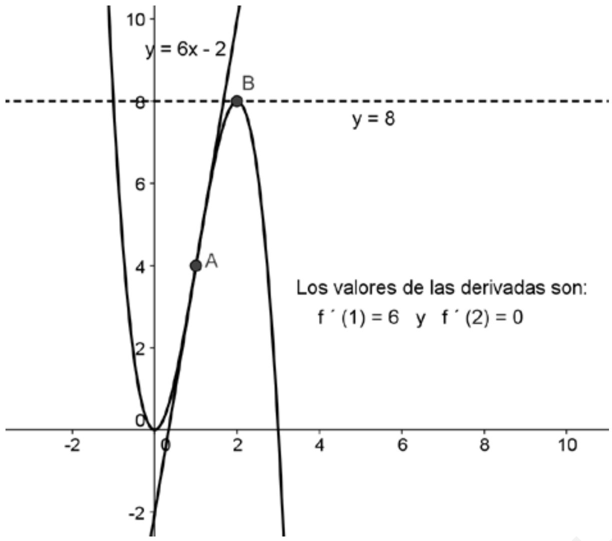
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=6x^2-2x^3** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Tangente [1, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 1. Determinamos el punto de tangencia A con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la gráfica y la recta tangente. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 6x – 2, a la gráfica en el punto A, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 1. Tenemos que f ´ (1) = 6.

Para calcular f ´ (2) seguimos los pasos:

- Con el comando **Tangente [2, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 2. Determinamos el punto de tangencia B con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la recta tangente y la gráfica. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 8, a la gráfica en el punto B, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 2. Tenemos que f ´ (2) = 0.

Todo lo anterior puede verse en la imagen.



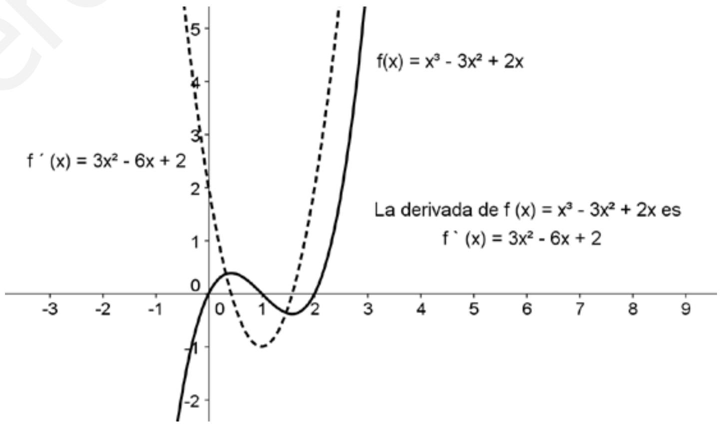
3. Estudia y representa las funciones siguientes y sus derivadas:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ **b) $f(x) = e^{-2x}$** **c) $f(x) = \ln(x - 2)$**

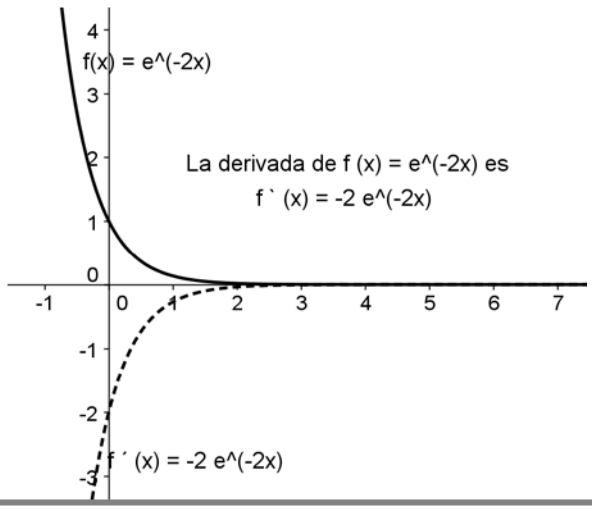
Seguimos los pasos:

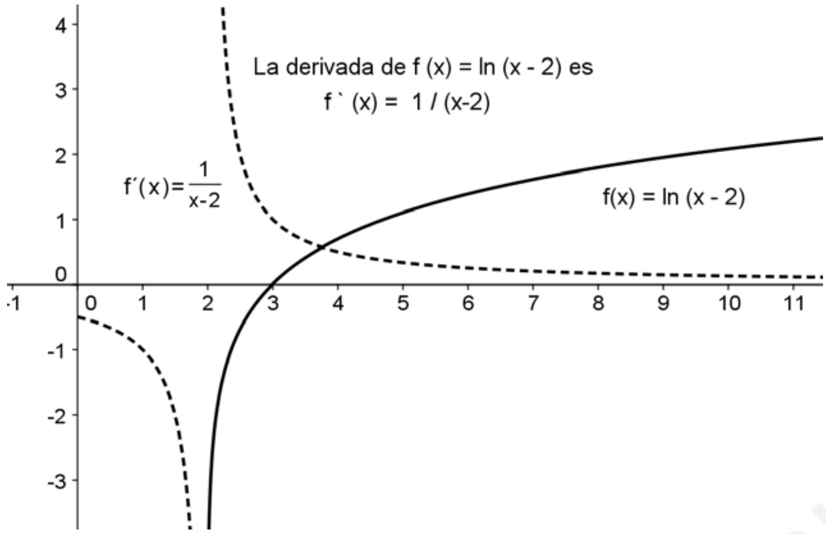
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-3x^2+2x** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Derivada [f]** calculamos la derivada de la función, que podemos ver en la Ventana algebraica, y la representación gráfica. Todo ello puede verse en el gráfico, que va acompañado de un texto estático.



- Para las otras funciones procedemos de manera análoga y obtenemos los resultados que pueden verse en las imágenes.





4. Estudia las derivadas sucesivas de las familias de funciones:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ **b) $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx + c)$**

a) Para la function $f(x) = ax^2 + bx + c$ seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

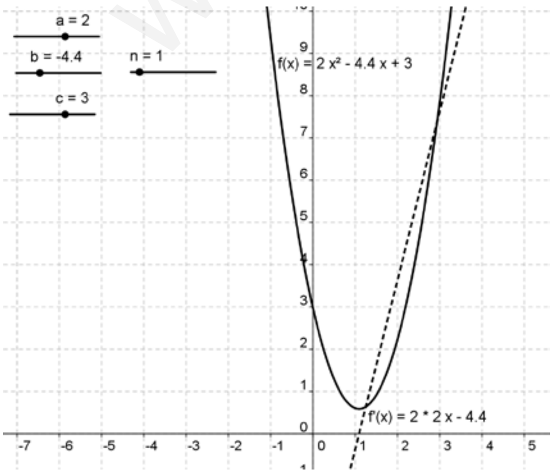
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

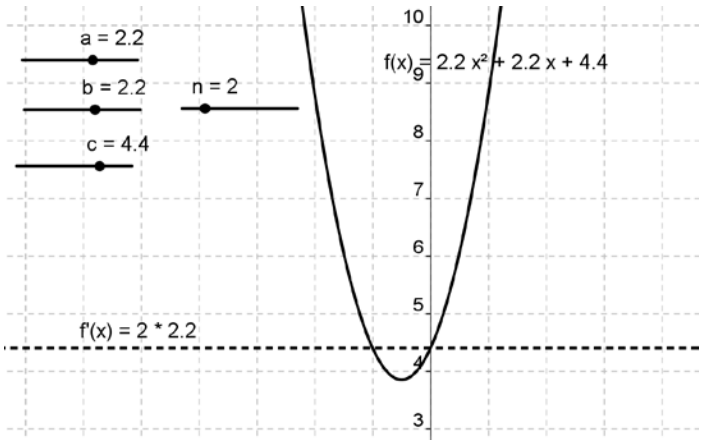
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*x^2+b*x+c** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

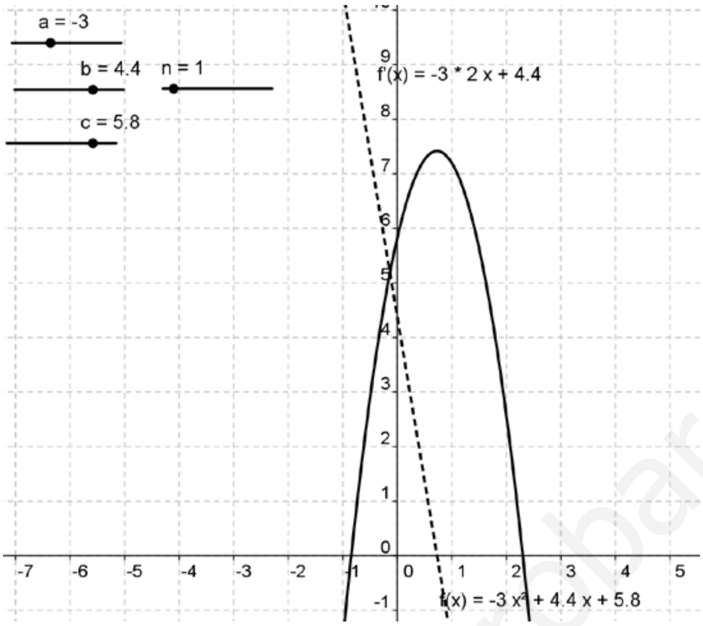
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







b) Para la function f(x) = a · sen (bx + c) seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

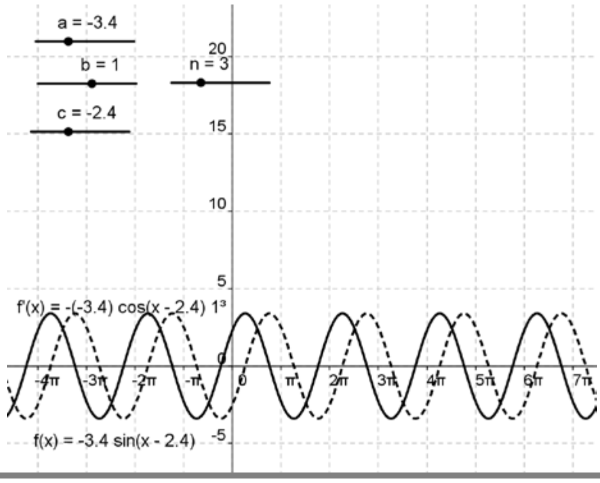
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

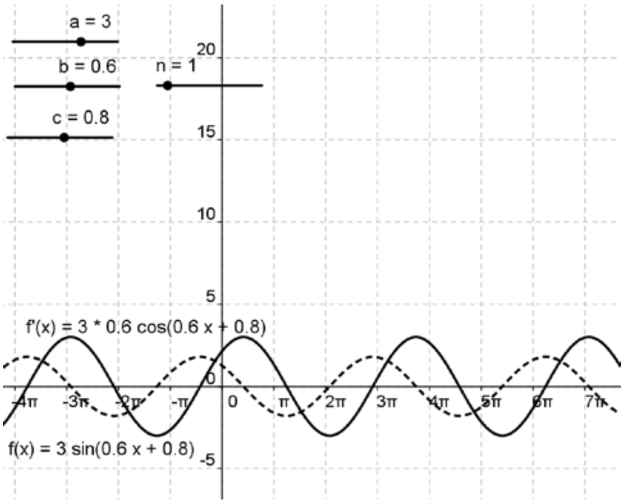
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*sin(b*x+c)** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

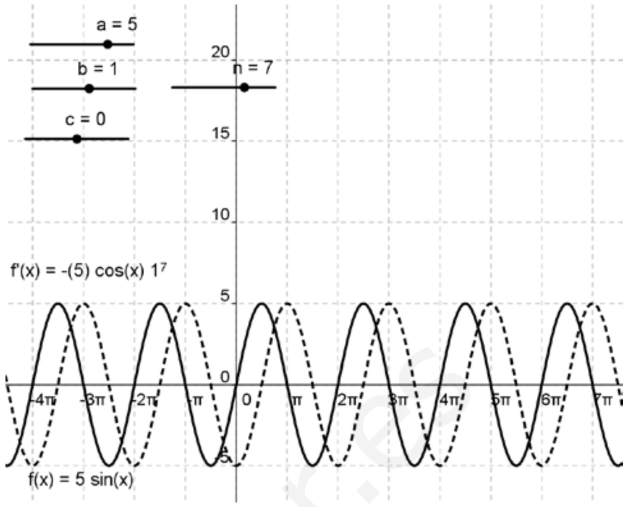
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 244

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

a) **(x) = x^2 – 1** **b)** $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $k(x) = \sqrt{x+5}$

Las tasas pedidas son:

a) $t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{15-3}{2} = 6$

b) $t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{g(4) - g(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{2} = \dfrac{1}{6} \approx 0,1667$

c) $t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{h(4) - h(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{5}{17} - \frac{3}{5}}{2} = -\dfrac{13}{85} \approx -0{,}1529$

d) $t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{k(4) - k(2)}{4-2} = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \approx 0,1771$

2. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = 2x – x^2; D [f (1)] **b)** $f(x) = \sqrt{x-3};\ f\,'(7)$ **c)** $f(x) = \dfrac{2}{x+1};\ D\left[f(3)\right]$

Las derivadas son:

a) $D\left[f(1)\right] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(1+h) - (1+h)^2 - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h^2}{h} = 0$

b) $f'(7) = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim\limits_{x \to 70} \dfrac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7} \cdot \dfrac{\sqrt{x-3} + 2}{\sqrt{x-3} + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 70} \dfrac{x - 7}{(x - 7) \cdot \left(\sqrt{x-3} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{\sqrt{x-3} + 2} = \dfrac{1}{4}$

c) $D\left[f(3)\right] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h+4} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{2h(h+4)} = -\dfrac{1}{8}$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x = 0:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si\ x \le 0 \\ x - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \le 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 0 \\ sen\ x & si\ x > 0 \end{cases}$

3. Hallamos las derivadas laterales en x = 0 y obtenemos:

a) $f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(-2h - 1) - (-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-2h}{h} = -2$

$f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(h - 1) - (-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

La función f (x) no es derivable en x = 0, sus derivadas laterales son distintas.

b) $f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(1 - h^2) - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2}{h} = 0$

$f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{0}{h} = 0$

La función f (x) es derivable en x = 0.

c) $f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h}{h} = 1$

$f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{sen\ h - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{sen\ h}{h} = 1$

La función f (x) es derivable en x = 0.

4. ¿Para qué valores de a y b cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + a & si\ x \le 1 \\ -x^2 + bx & si\ x > 1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x \le 0 \\ ax + b & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Para que la función sea continua en x = 2 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(ax^2 + 3x\right) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - bx - 4\right) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 6 = 2b \quad \Rightarrow 2a + b = -3$$

Para que la función sea derivable en x = 2 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-) = 4a + 3 \\ f\,'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + 3 = 2 \end{cases}$, obtenemos: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$

b) Para que la función sea continua en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 5x + a\right) = a - 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-x^2 + bx\right) = -1 + b \end{array}\right\} \Rightarrow a - 4 = -1 + b \quad \Rightarrow a - b = 3$$

Para que la función sea derivable en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-) = -3 \\ f\,'(1^+) = -2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + b = -3$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a - b = 3 \\ -2 + b = -3 \end{cases}$, obtenemos: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

c) Para que la función sea continua en x = 0 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^3 - x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(ax + b\right) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$$

Para que la función sea derivable en x = 0 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-) = -1 \\ f\,'(0^+) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1$$

Los valores buscados son a == - 1 y b = 0.

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos cuyas abscisas se indican:

a) $y = 2x^3 + x$; $x_0 = 0$ **b)** $y = \sqrt{25 - x^2}$; $x_0 = 3$ **c)** $y = \frac{3x}{1 - x}$; $x_0 = 2$

a) El punto de tangencia es (0, 0). La pendiente de la recta tangente es f ´ (0) = 1.

La ecuación de la tangente es y – 0 = 1 · (x – 0), es decir, x – y = 0.

La ecuación de la normal es y – 0 = - 1 · (x – 0), es decir, x + y = 0.

b) El punto de tangencia es (3, 4). La pendiente de la recta tangente es f ´ (3) = $-\frac{3}{4}$.

La ecuación de la tangente es: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, es decir, 3x + 4y = 25.

La ecuación de la normal es $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3)$, es decir, 4x – 3y = 0.

c) El punto de tangencia es (2, - 6). La pendiente de la recta tangente es f ´ (2) = 3.

La ecuación de la tangente es: y + 6 = 3 · (x – 2), es decir, 3x - y = 12.

La ecuación de la normal es $y + 6 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, es decir, x+3y=-16.

6. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta 5x + y – 3 = 0?

Las pendientes de las tangentes a la parábola son f ´ (x) = 2x – 7.

La pendiente de la recta dada 5x + y – 3 = 0 es – 5.

Por tanto, 2x – 7 = - 5, es decir, x = 1.

El punto buscado será (1, f (1)) = (1, - 3).

7. Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$ sabiendo que la recta tangente en el punto x = 1 es la recta y = - 2x.

Para x = 1 se cumple que y = a + b + 2. Además, para x = 1 la ordenada del punto de tangencia que pertenezca a la parábola y a la tangente es y = - 2.

La derivada de $y = ax^2 + bx + 2$ es y ´ = 2ax + b. En x = 1 el valor de la derivada es y ´ (1) = 2a + b.

La ecuación de la tangente a la parábola $y = ax^2 + bx + 2$ en el punto (1, a + b + 2) es:

$$y - (a + b + 2) = (2a + b) \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = (2a + b)\, x - a + 2.$$

Si la ecuación anterior ha de coincidir con la ecuación y = -2x, se ha de verificar:

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

8. Dada la función $y = x^2 - 3x + 4$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella sea paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = 6$.

La recta secante que pasa por los puntos (2, 2) y (6, 22) es $y = 5x - 8$.

Su pendiente vale 5, luego la pendiente de la tangente vale 1 al ser rectas paralelas, por tanto, $f'(x_0) = 5$.

Operando:

$$f'(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 2x_0 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 4$$

El punto pedido es (4, 8).

9. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en un punto cualquiera $x = a$. Halla el valor de a para que dicha recta pase por el origen de coordenadas (exterior a la curva).

La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = e^{3x}$ en $x = a$ es: $y - e^{3a} = 3 \cdot e^{3a} \cdot (x - a)$.

Si esta recta pasa por el origen de coordenadas (0, 0) se cumple:

$$-e^{3a} = -2a \cdot e^{3a} \quad \Rightarrow \quad e^{3a} \cdot (3a - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{3a} = 0, \ \textit{no tiene solución} \\ 3a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

10. Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

a) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x + 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$

a) Los puntos de corte son:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1; \ y_1 = 1 \\ x_2 = 2; \ y_2 = 4 \end{cases}$$

● La recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto (2, 4):

$$y - 4 = f'(2) \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 4 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 4$$

La recta tangente a $g(x) = x + 2$ en el punto (2, 4):

$$y - 4 = g'(2) \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 1 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

Los ángulos que forman las tangentes con el eje OX son:

$\text{tg}\ \alpha_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 75º\ 57'\ 50''$ $\qquad \text{tg}\ \alpha_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 45º$

El ángulo que forman las curvas f (x) y g (x) en el punto (2, 4) vale $\alpha_1 - \alpha_2$ = 30º 57´ 50´´.

● La recta tangente a f (x) = x^2 en el punto (- 1, 1):

$$y - 1 = f\,'(-1) \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -2x - 1$$

La recta tangente a g (x) = x + 2 en el punto (- 1, 1):

$$y - 1 = g\,'(-1) \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 1 \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

Los ángulos que forman las tangentes con el eje OX son:

tg α_1 = - 2 $\Rightarrow$ α_1 = 116º 33´ 54´´ tg α_2 = 1 $\Rightarrow$ α_2 = 45º

El ángulo que forman las curvas f (x) y g (x) en el punto (- 1, 1) vale $\alpha_1 - \alpha_2$ = 71º 33´ 54´´.

b) Los puntos de corte son:

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^3 + x^2 = x + 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1;\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1;\ y_2 = 2 \end{cases}$$

● La recta tangente a f (x) = $x^3 + x^2$ en el punto (1, 2):

$$y - 2 = f\,'(1) \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 5 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 3$$

La recta tangente a g (x) = x + 1 en el punto (1, 2):

$$y - 2 = g\,'(1) \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

Los ángulos que forman las tangentes con el eje OX son:

tg α_1 = 5 $\Rightarrow$ α_1 = 78º 41´ 24´´ tg α_2 = 1 $\Rightarrow$ α_2 = 45º

El ángulo que forman las curvas f (x) y g (x) en el punto (1, 2) vale $\alpha_1 - \alpha_2$ = 33º 41 24´´.

● La recta tangente a f (x) = $x^3 + x^2$ en el punto (- 1, 2):

$$y - 2 = f\,'(-1) \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 1 \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 3$$

La recta tangente a g (x) = x + 1 en el punto (- 1, 2):

$$y - 2 = g\,'(-1) \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 1 \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 3$$

Los ángulos que forman las tangentes con el eje OX son:

tg α_1 = 1 $\Rightarrow$ α_1 = 45º ´ tg α_2 = 1 $\Rightarrow$ α_2 = 45º

El ángulo que forman las curvas f (x) y g (x) en el punto (- 1, 2) vale $\alpha_1 - \alpha_2$ = 0º.

11. Calcula el ángulo que forman las hipérbolas xy = 2 y $x^2 - y^2 = 3$ en el punto de corte que tiene abscisa positiva.

Los puntos de corte son:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2;\ y_1 = -1 \\ x_2 = 2;\ y_2 = 1 \end{cases}$$

● La recta tangente a xy = 2 en el punto (2, 1):

$$y-1=y'(2)\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-1=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+2$$

La recta tangente a $x^2-y^2=3$ en el punto (2, 1):

$$y-1=y'(2)\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-1=2\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=2x-3$$

Los ángulos que forman las tangentes con el eje OX son:

$\operatorname{tg}\alpha_1=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=153º\ 26'\ 6''$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha_2=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2=63º\ 26'\ 6''$

El ángulo que forman las hipérbolas en el punto (2, 1) vale $\alpha_1-\alpha_2=90º$. Puede observarse que las pendientes de las tangentes son opuestas e inversas.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 245

12. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D\left[x^5\right]$

b) $D\left[x^4\cdot x^3\right]$

c) $D\left[\left(x^3-2\right)^5\right]$

d) $D\left[(4x)^{1/4}\right]$

e) $D\left[x^3\cdot 3^x\right]$

f) $D\left[(x+1)^2\cdot(x-1)^3\right]$

g) $D\left[2^x\cdot\ln x\right]$

h) $D\left[(e^{3x}+2)^4\right]$

i) $D\left[\ln(3-2x^2)^5\right]$

j) $D\left[\frac{4}{(x^2+2x^3)^5}\right]$

k) $D\left[\frac{3}{\sqrt{5-4x^3}}\right]$

l) $D\left[(2x+4)\cdot\sqrt{2x-4}\right]$

m) $D\left[\frac{e^x}{x^2}\right]$

n) $D\left[\frac{x^3}{e^x}\right]$

ñ) $D\left[x^2\cdot 2^x\cdot a^{2x}\right]$

o) $D\left[\cos(4x)\right]$

p) $D\left[sen^4(2x)\right]$

q) $D\left[\cos(x^4)\right]$

Las derivadas son:

a) $D\left[x^5\right]=5x^4$

b) $D\left[x^4\cdot x^3\right]=D\left[x^7\right]=7x^6$

c) $D\left[\left(x^3-2\right)^5\right]=15x^2\,(x^3-2)^4$

d) $D\left[(4x)^{1/4}\right]=\frac{1}{\sqrt[4]{(4x)^3}}$

e) $D\left[x^3\cdot 3^x\right]=3^x\cdot\left(3x^2+\ln 3\cdot x^3\right)$

f) $D\left[(x+1)^2\cdot(x-1)^3\right]=(x+1)\cdot(x-1)^2\cdot(5x+1)$

g) $D\left[2^x \cdot \ln x\right] = 2^x \cdot \left(\ln 2 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

h) $D\left[(e^{3x} + 2)^4\right] = 12 e^{3x} \cdot (e^{3x} + 2)^3$

i) $D\left[\ln (3 - 2x^2)^5\right] = -\dfrac{20x}{3 - 2x^2}$

j) $D\left[\dfrac{4}{(x^2 + 2x^3)^5}\right] = -\dfrac{40\,(x + 3x^2)}{(x^2 + 2x^3)^6}$

k) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{5 - 4x^3}}\right] = \dfrac{18x^2}{(5 - 4x^3)\sqrt{5 - 4x^3}}$

l) $D\left[(2x + 4) \cdot \sqrt{2x - 4}\right] = \dfrac{6x - 4}{\sqrt{2x - 4}}$

m) $D\left[\dfrac{e^x}{x^2}\right] = \dfrac{e^x\,(x - 2)}{x^3}$

n) $D\left[\dfrac{x^3}{e^x}\right] = \dfrac{3x^2 - x^3}{e^x}$

ñ) $D\left[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}\right] = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot a^{2x} + x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x} \cdot \ln a \cdot 2$

o) $D\left[\cos (4x)\right] = -4\,sen\,(4x)$

p) $D\left[sen^4\,(2x)\right] = 8 \cdot sen^3\,(2x) \cdot \cos (2x)$

q) $D\left[\cos (x^4)\right] = -4x^3 \cdot sen\,(x^4)$

13. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D\left[\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)^3\right]$

b) $D\left[\dfrac{sen\,(x - 1)}{sen\,(x + 1)}\right]$

c) $D\left[\ln tg^3\,x\right]$

i) $D\left[\cos^2\,(x^3)\right]$

j) $D\left[x^3 + \cos (x^2)\right]$

k) $D\left[\ln^3\,(\ln x)\right]$

p) $D\left[arcsen\,\sqrt{x}\right]$

q) $D\left[\sqrt{\dfrac{1 - 5x}{1 + 5x}}\right]$

r) $D\left[(1 + x) \cdot \sqrt{1 - x^2}\right]$

d) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

e) $D\left[\cos\{sen\,(\cos x)\}\right]$

f) $D\left[\dfrac{x^2\cdot 2^{3x}}{e^{3x}}\right]$

g) $D\left[\cos^3(2x)\cdot sen^2(3x)\right]$

h) $D\left[(x-1)^x\right]$

l) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)\right]$

m) $D\left[arctg\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]$

n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$

ñ) $D\left[arctg\,(\cos x)\right]$

o) $D\left[(\ln x)^x\right]$

s) $D\left[arctg\,\sqrt{x+1}\right]$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{2}{2+x}\right)+\dfrac{2}{2+x}\right]$

u) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)\right]$

v) $D\left[arcsen\,(tg\,x)\right]$

w) $D\left[(sen\,x)^{2\cos x}\right]$

Las derivadas son:

a) $D\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]=\dfrac{3\cdot\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $D\left[\dfrac{sen\,(x-1)}{sen\,(x+1)}\right]=\dfrac{sen\,2}{sen^2\,(x+1)}$

c) $D\left[\ln tg^3\,x\right]=\dfrac{3\cdot(1+tg^2\,x)}{tg\,x}$

d) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\dfrac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$

e) $D\left[\cos\{sen\,(\cos x)\}\right]=-sen\{sen\,(\cos x)\}\cdot\cos(\cos x)\cdot sen\,x$

f) $D\left[\dfrac{x^2\cdot 2^{3x}}{e^{3x}}\right]=\dfrac{2^{3x}\cdot(2x+3\ln 2-3x^2)}{e^{3x}}$

g) $D\left[\cos^3(2x)\cdot sen^2(3x)\right]=-6\cdot\cos^2(2x)\cdot sen\,(2x)\cdot sen^2(3x)+$
$+6\cdot\cos^3(2x)\cdot sen\,(3x)\cdot\cos(3x)$

h) $D\left[(x-1)^x\right]=(x-1)^x\cdot\left[\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}\right]$

i) $D\left[\cos^2(x^3)\right]=-6x^2\cdot\cos(x^3)\cdot sen\,(x^3)$

j) $D\left[x^3+\cos(x^2)\right]=3x^2-2x\cdot sen\,(x^2)$

k) $D\left[\ln^3(\ln x)\right] = 3\cdot\ln^2(\ln x)\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$

l) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)\right] = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$

m) $D\left[arctg\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right] = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}\cdot(a^2+x^2)}$

ñ) $D\left[arctg(\cos x)\right] = -\dfrac{sen\ x}{1+\cos^2 x}$

o) $D\left[(\ln x)^x\right] = (\ln x)^x\cdot\left[\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right]$

p) $D\left[arcsen\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$

q) $D\left[\sqrt{\dfrac{1-5x}{1+5x}}\right] = -5\cdot\sqrt{\dfrac{1+5x}{1-5x}}\cdot\dfrac{1}{(1+5x)^2}$

r) $D\left[(1+x)\cdot\sqrt{1-x^2}\right] = \dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

s) $D\left[arctg\sqrt{x+1}\right] = \dfrac{1}{2\cdot(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{2}{2+x}\right)+\dfrac{2}{2+x}\right] = \dfrac{-x-4}{(2+x)^2}$

u) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)\right] = -\dfrac{2}{\sqrt{x}\cdot(x-4}$

v) $D\left[arcsen(tg\ x)\right] = \dfrac{1+tg^2 x}{\sqrt{1-tg^2 x}}$

w) $D\left[(sen\,x)^{2\cos x}\right] = (sen\ x)^{2\cos x} \cdot \left[-2\ sen\ x \cdot \ln\ (sen\ x) + 2 \cdot \dfrac{\cos^2\ x}{sen\ x}\right]$

14. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f\ (x) = 3^{2x}$ **b)** $g\ (x) = \dfrac{3}{x-2}$ **c)** $h(x) = \ln\ (2x+3)$ **d)** $j(x) = sen\ 4x$

f ´´´ (x) **$g^{(4)}$ (x)** **$h^{(5)}$ (x)** **$j^{(10)}$ (x)**

a) La derivada tercera de $f\ (x) = 3^{2x}$ es f ´´´ (x) = $3^{2x} \cdot (2 \cdot \ln 3)^3$.

b) La derivada cuarta de $g\ (x) = \dfrac{3}{x-2}$ es $g^{(4)}\ (x) = \dfrac{72}{(x-2)^5}$.

c) La derivada quinta de $h(x) = \ln\ (2x+3)$ es $h^{(5)}\ (x) = \dfrac{768}{(2x+3)^5}$.

d) La derivada décima de $j(x) = sen\ 4x$ es $j^{(10)}$ (x) = - $4^{10} \cdot$ sen 4x

15. Obtén las derivadas enésimas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\ (x+2)$ **c)** $h(x) = e^x - e^{-x}$ **e)** $j(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$ **d)** $i(x) = 4^{-x}$ **f)** $k(x) = sen\ x$

a) La derivada enésima de $f(x) = \ln\ (x+2)$ es $f^{(n)}\ (x) = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(x+2)^n}$

b) La derivada enésima de $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$ es $g^{(n)}\ (x) = (-1)^n \cdot \dfrac{3 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$

c) La derivada enésima de $h(x) = e^x - e^{-x}$ es $h^{(n)}$ (x) = $e^x + (-1)^{n+1} \cdot e^{-x}$.

d) La derivada enésima de $i(x) = 4^{-x}$ es $i^{(n)}$ (x) = $(-1)^n \cdot 4^{-x} \cdot (\ln 4)^n$.

e) La derivada enésima de $j(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es $j^{(n)}$ (x) = $(-1)^n \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$.

f) La derivada enésima de $k(x) = sen\ x$ es $k^{(n)}\ (x) = sen\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 246

1. Estudia la derivabilidad de las funciones:

a) $f\ (x) = |x-2| + |x|$ **b)** $g\ (x) = e^{|x|}$

a) Teniendo en cuenta los valores absolutos que aparecen en la expresión de la función, esta puede ser definida a trozos de la forma siguiente:

$$f\ (x) = \begin{cases} -2x + 2 \ si \ x < 0 \\ 2 \quad si \ 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 \ si \ x > 2 \end{cases}$$

La función derivada es:

$$f\ ´\ (x) = \begin{cases} -2 \quad si \ x < 0 \\ 0 \quad si \ 0 < x < 2 \\ 2 \quad si \ x > 2 \end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales en los valores x = 0 y x = 2:

f ´ (0^-) = - 2 y f ´ (0^+) = 0, por tanto, y = f (x) no es derivable en x = 0.

f ´ (2^-) = 0 y f ´ (2^+) = 2, por tanto, y = f (x) no es derivable en x = 2.

Concluimos que la función y = f (x) es derivable en R – {0, 2}.

b) En este caso la función y = g (x) puede definirse en la forma:

$$g\ (x) = \begin{cases} e^{-x} \quad si \ x < 0 \\ e^{x} \quad si \ x \geq 0 \end{cases}.$$

La función derivada es:

$$g\ ´\ (x) = \begin{cases} -e^{-x} \quad si \ x < 0 \\ e^{x} \quad si \ x \geq 0 \end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales en x = 0:

g ´ (0^-) = - 1 y g ´ (0^+) = 1, por tanto, y = g (x) no es derivable en x = 0.

Concluimos que la función y = g (x) es derivable en R – {0}.

2. Estudia el valor que ha de tener el parámetro a para que la función y = f (x) sea derivable en x = 1.

$$f\ (x) = \begin{cases} 3 - ax^2 \quad si \ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} \quad si \ x > 1 \end{cases}$$

Para que y = f (x) sea derivable, ha de ser continua en x = 1.

● Si y = f (x) es continua en x = 1, se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{ax} = \dfrac{2}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - a = \frac{2}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

La función y = f (x) es continua en x = 1 si a = 1 o a = 2.

● La función y = f (x) será derivable en x = 1 si f ´ (1^-) = f ´ (1^+).

- Para a = 1 la función y su derivada son:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & si\ x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si\ x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = \begin{cases} -2x & si\ x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Se cumple: f ´ (1^-) = - 2 y f ´ (1^+) = - 2, por tanto la función y = f (x) es derivable en x = 1 para a = 1.

- Para a = 2 la función y su derivada son:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & si\ x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = \begin{cases} -4x & si\ x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Se cumple: f ´ (1^-) = - 4 y f ´ (1^+) = -1, por tanto la función y = f (x) es no derivable en x = 1 para a = 2.

3. Calcula a y b para que la función y = f (x) sea derivable para cualquier número real.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 3 & si\ x \le 2 \\ e^{2-b} & si\ x > 2 \end{cases}$$

La función y = f (x) debe ser continua en x = 2, y se cumplirá:

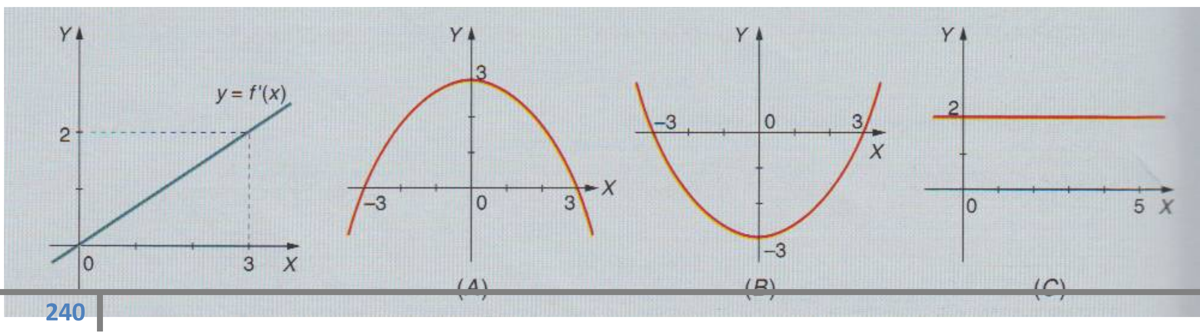
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - ax + 3) = 7 - 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} e^{x-b} = e^{2-b} \end{array}\right\} \Rightarrow 7 - 2a = e^{2-b}$$

La función $f\,'(x) = \begin{cases} 2x - a & si\ x \le 2 \\ e^{x-b} & si\ x > 2 \end{cases}$ debe ser continua en x = 2:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x - a) = 4 - a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} e^{x-b} = e^{2-b} \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - a = e^{2-b}$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 7 - 2a = e^{2-b} \\ 4 - a = e^{2-b} \end{cases}$ obtenemos los valores a = 3 y b = 2.

4. La primera gráfica corresponde a la función derivada de f (x).



a) Obtén la expresión analítica de f ´(x) .

b) Indica cuál de las gráficas (A), (B) o (C) corresponde a la función f (x). Justifica la respuesta.

a) La gráfica es una recta que pasa por los puntos (0, 0) y (3, 2), luego su ecuación es $y = \frac{2}{3}x$.

b) Como $f\,'(x) = \frac{2}{3}x$, la función y = f (x) debe ser una función polinómica de segundo grado, por lo cual la gráfica (C) queda descartada.

La gráfica (A) corresponde a una función polinómica de segundo grado, su función derivada sería negativa. Por tanto, la solución es la función (B).

5. Sea la función $f(x) = \frac{a}{x^2}$. ¿Cuánto debe valer a para que las tangentes a dicha curva en los puntos de abscisas x = a y x = - a se corten perpendicularmente?

La derivada de la función es $f\,'(x) = -\frac{2a}{x^3}$.

La ecuación de la tangente en x = a es:

$$y - f(a) = f\,'(a)\cdot(x-a) \;\Rightarrow\; y - \frac{1}{a} = -\frac{2}{a^2}\cdot(x-a)$$

La ecuación de la tangente en x = - a es:

$$y - f(-a) = f\,'(-a)\cdot(x+a) \;\Rightarrow\; y - \frac{1}{a} = \frac{2}{a^2}\cdot(x+a)$$

Si las tangentes se cortan perpendicularmente, deben cumplir:

$$f\,'(a)\cdot f\,'(-a) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{2}{a^2}\cdot\frac{2}{a^2} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a^4 = 4 \;\Rightarrow\; a^2 = 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

6. Calcula la tangente a la curva y = ln (2x) que pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación de la recta tangente a la curva f (x) = ln (2x) en el punto (a, ln (2a) es:

$$y - f(a) = f\,'(a)\cdot(x-a) \;\Rightarrow\; y - \ln(2a) = \frac{1}{a}\cdot(x-a)$$

Si pasa por el punto (0, 0) se cumplirá:

$$-\ln(2a) = -1 \;\Rightarrow\; \ln(2a) = 1 \;\Rightarrow\; 2a = e \;\Rightarrow\; a = \frac{e}{2}$$

La tangente buscada pasa por el punto $\left(\frac{e}{2}, \ln\left(2\,\frac{e}{2}\right)\right) = \left(\frac{e}{2}, 1\right)$ y su pendiente es $\frac{2}{e}$, su ecuación será:

$$y - \ln 1 = \frac{2}{e}\cdot\left(x - \frac{e}{2}\right) \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{e}x$$

7. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las hipérbolas xy = 1, $x^2 - y^2$ 0 en sus puntos de intersección.

Las curvas se cortan en los puntos que obtenemos al resolver el sistema:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow P\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \text{ y } Q\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Basta con hallar el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en el punto P, en el punto Q se obtiene el mismo resultado.

Hallamos α_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a al curva x · y = 1 en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow tg\ \alpha_1 = \frac{-1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \alpha_1 = 148^o\ 16'\ 57''$$

Hallamos α_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a al curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow tg\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 58^o\ 16'\ 57''$$

El ángulo que forman las rectas tangentes en P vale $\alpha_1 - \alpha_2 = 90º$.

Hallamos β_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a al curva x · y = 1 en el punto Q con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow tg\ \beta_1 = \frac{-1}{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \beta_1 = 31^o\ 43'\ 3''$$

Hallamos β_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a al curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto Q con el eje de abscisas:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow tg\ \beta_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \beta_2 = 121^o\ 43'\ 3''$$

El ángulo que forman las rectas tangentes en Q vale $\beta_1 - \beta_2 = 90º$.

8. ¿En qué puntos o puntos la recta tangente a al curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?

Las pendientes de las rectas tangentes a esta curva verifican la relación:

$$y' = 3x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad m = 3x^2 + 3$$

Esta pendiente toma el menor valor posible en el vértice de esta función cuadrática y = $3x^2 + 3$, es decir, en x = 0. Luego la menor pendiente de al recta tangente está en (0, 4) y vale 3.

9. Encuentra la derivada enésima de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-2x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ **c)** $h(x) = \cos(2x)$

a) La derivada enésima de la función $f(x) = e^{-2x}$ es $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot e^{-2x}$.

b) La derivada enésima de la función $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ es $g^{(n)}(x) = \dfrac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

c) La derivada enésima de la función h (x) = cos (2x) es $h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x - n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Si P es un punto cualquiera de la gráfica de xy = 1, prueba que el triángulo formado por la recta OP, la tangente a la gráfica en el punto P y el eje OX es isósceles.

Sea $P\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, con a ≠ 0, un punto cualquiera de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$.

La ecuación de la recta tangente en el punto P es:

$$y - \frac{1}{a} = f'(a)(x-a) \Rightarrow y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow x + a^2 y = 2a$$

La recta OP pasa por los puntos O (0, 0) y $P\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ y su ecuación es $x - a^2y = 0$.

Las coordenadas del punto Q, punto de corte de la tangente en P con el eje OX, son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + a^2 y = 2a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(2a, 0)$$

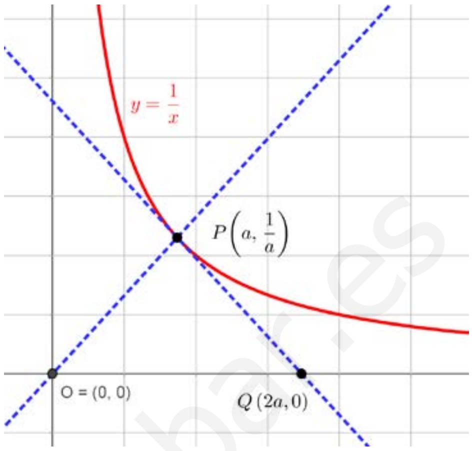
Hallamos las longitudes de los lados del triángulo:

- Lado OP: $d(O, P) = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a^4+1}}{a}$.

- Lado OQ: $d(O, Q) = \sqrt{(2a)^2} = 2a$.

- Lado PQ: $d(P,Q)=\sqrt{(2a-a)a^2+\left(-\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^4+1}}{a}$.

Observamos que los lados OP y PQ miden lo mismo, por tanto el triángulo OPQ es isósceles.



11. La arista de un cubo es de 25 cm. Por efecto de la dilatación, cada arista aumenta en 0,02 mm. ¿Cuánto aumentará su área? ¿Cuánto aumentará su volumen?

En función de la arista, x, el área y el volumen son, respectivamente:

$$A(x) = 6x^2,\ V(x) = x^3$$

Las diferenciales del área y del volumen son, respectivamente:

$$dA = 12x\,dx,\ dV = 3x^2\,dx$$

El aumento que experimenta el área de un cubo de arista x = 25 cm y con dilatación dx = 0,002 cm es:

$$dA = 12 \cdot 25 \cdot 0{,}002 = 0{,}6\ cm^2.$$

El aumento que experimenta el volumen de un cubo de arista x = 25 cm y con dilatación dx = 0,002 cm es:

$$dA = 3 \cdot 25^2 \cdot 0{,}002 = 3{,}75\ cm^3.$$

12. El lado de un triángulo equilátero crece a razón de 10 cm por minuto. Halla a que velocidad crece su área cuando el lado mide 8 $\sqrt{3}$ cm.

El crecimiento del lado, L, en función del tiempo, t, es L (t) = v · t; y como v es 10 centímetros por minuto podemos escribir:

$$L(t) = 10 \cdot t.$$

El área, A, de un triángulo en función del lado l es: $A(l)=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

Sustituyendo la expresión anterior, obtenemos: $A(t)=25\sqrt{3}\,t^2$ cm²

Derivando respecto de la variable t: $A'(t)=50\sqrt{3}\,t$

Cuando L = 8 $\sqrt{3}$ es t = $\frac{8\sqrt{3}}{10}$, por tanto: $A'\left(\frac{8\sqrt{3}}{10}\right)=50\sqrt{3}\,\frac{8\sqrt{3}}{10}=120\ cm^2/\min$

13. Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad de 3 cm/s, halla la velocidad a la que aumenta su área cuando el lado vale 12 cm. Halla el valor del lado cuando el área crece a 60 cm²/

s. El área de un cuadrado de lado L es A = L².

La variación del área puede venir expresada en la forma:

$$\frac{dA}{dt} = 2L\,\frac{dL}{dt}$$

Si L = 12 cm y $\frac{dL}{dt}$ = 3 cm/s, obtenemos: $\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 12\ cm \cdot 3\ cm/s = 72\ cm^2/s$.

Si $\frac{dL}{dt}$ = 3 cm/s y $\frac{dA}{dt} = 60\ cm^2/s$, obtenemos: 60 cm²/s = 2 · L · 3 cm/3, es decir, L = 10 cm.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 247

Funciones potenciales en Biología

Las funciones de expresión f (x) = k · x^p donde p en un número entero o fraccionario (positivo o negativo), se denominan funciones potenciales.

1. Realiza la representación gráfica cuando p = 1, p = - 1, p = 2, p = 3, p = 1/2, p = 1/3, etc. Estudia sus características, en particular, su comportamiento en más infinito o menos infinito y cuando x tiende a cero.

Estas funciones potenciales ejercen de leyes de escala en el ámbito de la naturaleza. Esto significa que al conocer el valor de la función f (x) = x^p en un punto x, el valor de la función para el valor λx (λ veces menor), es f (λx) = $\lambda^p \cdot x^p = \lambda^p \cdot f(x)$, es decir, λ^p veces menor.

Existen muchos comportamientos, asociados a fenómenos naturales, que siguen este tipo de leyes. La más famosa de ellas es la ley de Klieber (descubierta por Max Klieber en 1932) o ley ¾ del metabolismo basal que relaciona el ritmo metabólico (Q) de un animal con su masa (M) y viene dada por la expresión Q ≈ $M^{3/4}$. Esta ley tiene consecuencias muy importantes respecto a la distribución masa-tamaño (diversidad de la biomasa) en el planeta. Para las plantas el exponente es próximo a 1.

2. Busca ejemplos de animales y plantas que sigan la ley de Klieber. Realiza representaciones gráficas de la expresión matemática de la ley para distintos seres vivos.

Otras leyes de escala en Biología son la ley de Damuth (1981) que relaciona el número de animales en función de su masa o la ley de Fenchel (1974) que establece que las especies de mayor tamaño corporal poseen menores tasas de crecimiento corporal.

3. Busca información sobre las leyes anteriores, ¿qué expresión matemática tienen?, analiza el significado de sus variables, realiza representaciones gráficas adecuadas.

4. ¿Existen otras leyes de escala, análogas a las anteriores?

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre las leyes de escala.

- Para conocer más sobre la ley de Kleber ver el artículo "*La ley de la selva sigue siempre las mismas reglas matemáticas*", aparecido en El País el 3 de septiembre de 2015.

- MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid

- http://www.ecologia.info/leyes.htm

- www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt

- www.ua.es/personal/mj.caturla/bio/tema1.MetabolismoyMasa.pdf