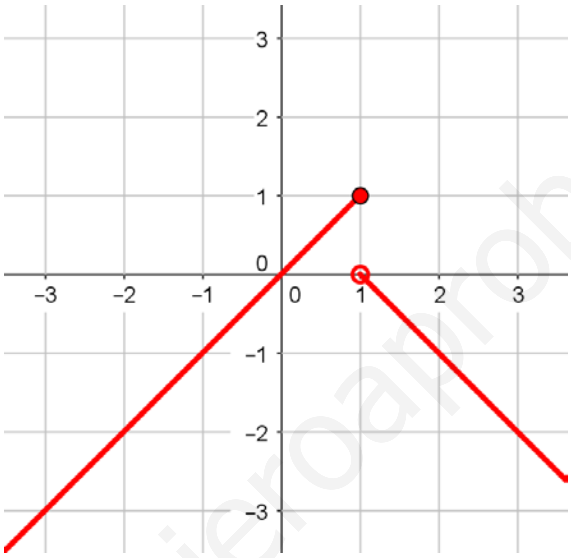
UNIDAD 8: Continuidad de las funciones

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 196

1. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 1 \\ -x+1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

En la imagen observamos que la función es discontinua en x = 1. Los límites laterales en x = 1 son distintos.



2. En cada caso, halla que valor debe tener la función en x = - 2 para que sea continua en él:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

a) La función y = f (x) no está definida en x = - 2. El límite en ese punto vale:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

Si definimos f (- 2) = - 4 la función es continua en x = - 2.

b) La función y = g (x) no está definida en x = - 2. El límite en ese punto vale:

$$\lim_{x \to -2} g(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Si definimos g (- 2) = - 3 la función es continua en x = - 2.

3. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & si\ x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si\ -2 < x < 1 \\ -7x - 3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de abscisa x = - 2 y x = 1. En el resto de puntos la función es continua al ser funciones polinómicas las que aparecen en su definición.

Estudiamos los límites laterales en x = - 2:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} 4x + 2 = -6 \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x^2 - 5 = -1$$

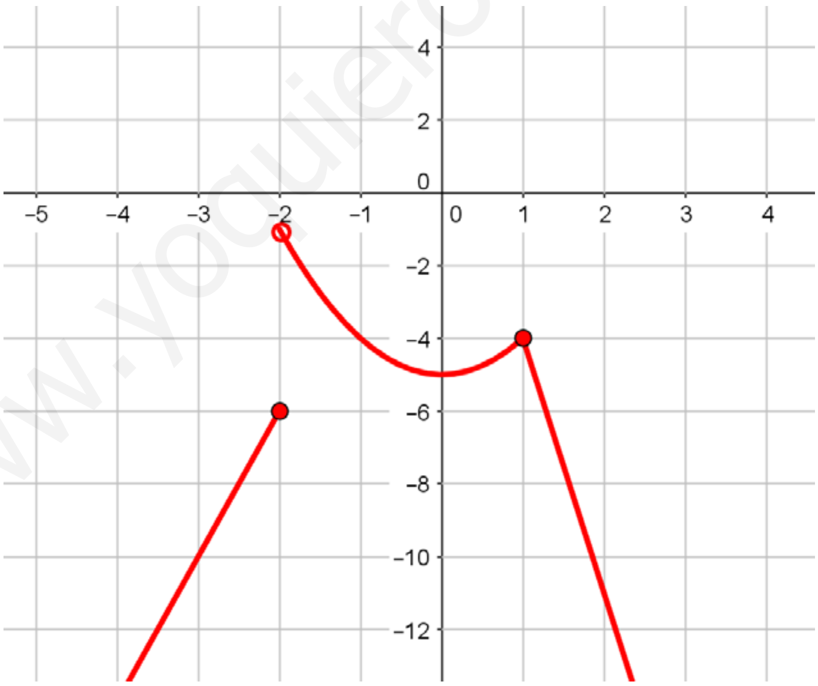
Como los límites laterales son distintos, la función no es continua en x = - 2.

Estudiamos los límites laterales en x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 5 = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -7x + 3 = -4$$

Como los límites laterales coinciden y, además f (1) = - 4, la función es continua en x = 1.

Por tanto, la función es continua para cualquier número real excepto para x = - 2. Puede verse en su gráfica.



ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 211

1. Primos gemelos. Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2. Encuentra cuatro pares de primos gemelos.

Esta es una conjetura que está sin demostrar.

Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. Número primos generados. El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde – 40 hasta 40. Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n?

En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera número primos para valores de n comprendidos entre – 40 y 40.

Por ejemplo: si n = 25, entonces $25^2 - 25 + 41 = 641$, que es un número primo.

Para cualquier valor de n no genera números primos, pues, por ejemplo, para n = 41, $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto.

3. Número mágico. Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y el cociente obtenido, por 11, y el último cociente, por 13. ¿Qué se observa?

Tomamos un número de tres cifras cualquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema y obtenemos:

$$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 729.$$

Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera xyz.

$$xyzxyz = 100\,000x + 10\,000y + 1\,000z + 100x + 10y + z = 1001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz$$

Por tanto, al dividir xyzxyz por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida xyz.

4. Conjetura de Collatz o (3n + 1). Compruébala para los valores de n: 7, 12, 17 y 30.

Indicamos con $f^2(x) = f(f(x))$ y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para n = 7:
$f(7) = 22$; $f^2(7) = 11$; $f^3(7) = 34$; $f^4(7) = 17$; $f^5(7) = 52$; $f^6(7) = 26$; $f^7(7) = 13$; $f^8(7) = 40$; $f^9(7) = 20$; $f^{10}(7) = 10$; $f^{11}(7) = 5$; $f^{12}(7) = 16$; $f^{13}(7) = 8$; $f^{14}(7) = 4$; $f^{15}(7) = 2$; $f^{16}(7) = 1$…

Para n = 12:
$f(12) = 6$; $f^2(12) = 3$; $f^3(12) = 10$; $f^4(12) = 5$; $f^5(12) = 16$; $f^6(16) = 8$; $f^7(12) = 4$; $f^8(12) = 2$; $f^9(12) = 1$…

Para n = 17:
$f(17) = 52$; $f^2(17) = 26$; $f^3(17) = 13$; $f^4(17) = 40$; $f^5(17) = 20$; $f^6(17) = 10$; $f^7(17) = 5$; $f^8(17) = 16$; $f^9(17) = 8$; $f^{10}(17) = 4$; $f^{11}(17) = 2$; $f^{12}(17) = 1$…

Para n = 30:
f (30) = 15; f^2 (30) = 46; f^3 (30) = 23; f^4 (30) = 70; f^5 (30) = 35; f^6 (30) = 106; f^7 (30) = 53; f^8 (30) = 160; f^9 (30) = 80; f^{10} (30) = 40; f^{11} (30) = 20; f^{12} (30) = 10; f^{13} (30) = 5; f^{14} (30) = 16; f^{15} (30) = 8; f^{16} (30) = 4; f^{17} (30) = 4; f^{17} (30) = 2; f^{18} (30) = 1…

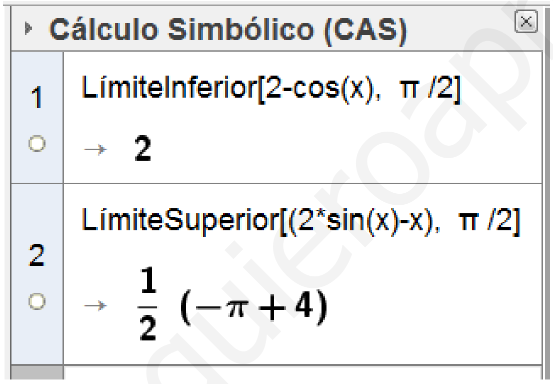
ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 212

1. Estudia, de forma analítica y gráfica la continuidad de la función $f\ (x) = \begin{cases} 2 - \cos x & si\ x < \pi/2 \\ 2\ sen\, x - x & si\ x \geq \pi/2 \end{cases}$.

Hallamos los límites laterales en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y obtenemos:

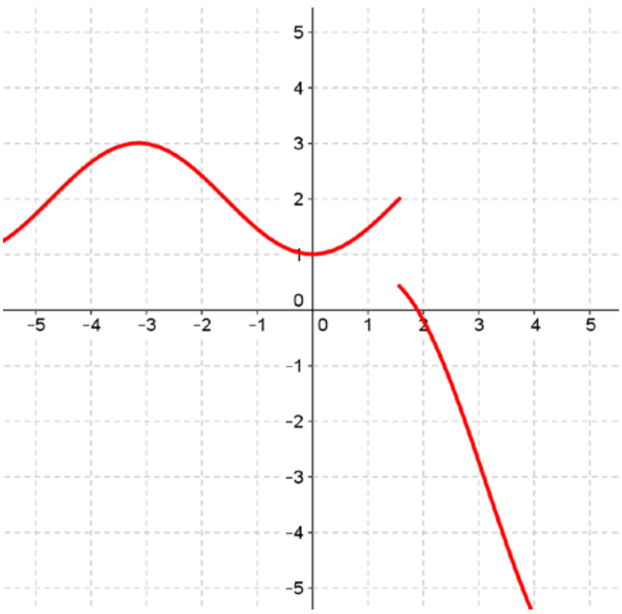
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (2 - \cos\ x) = 2 \text{ y } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+-}} (2 \cdot sen\ x - x) = \frac{1}{2}(-\pi + 4)$$

En la imagen pueden verse los valores de los límites determinados con la Vista Cálculo Simbólico (CAS):



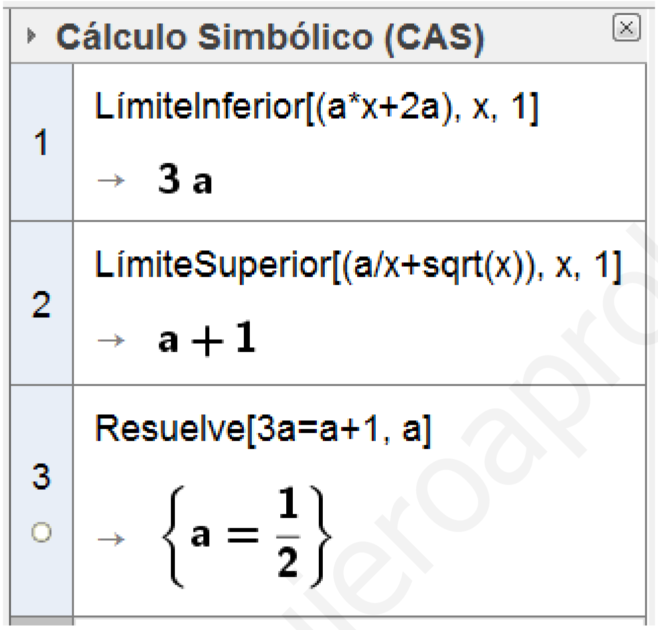
Representamos gráficamente la función f (x) y obtenemos:

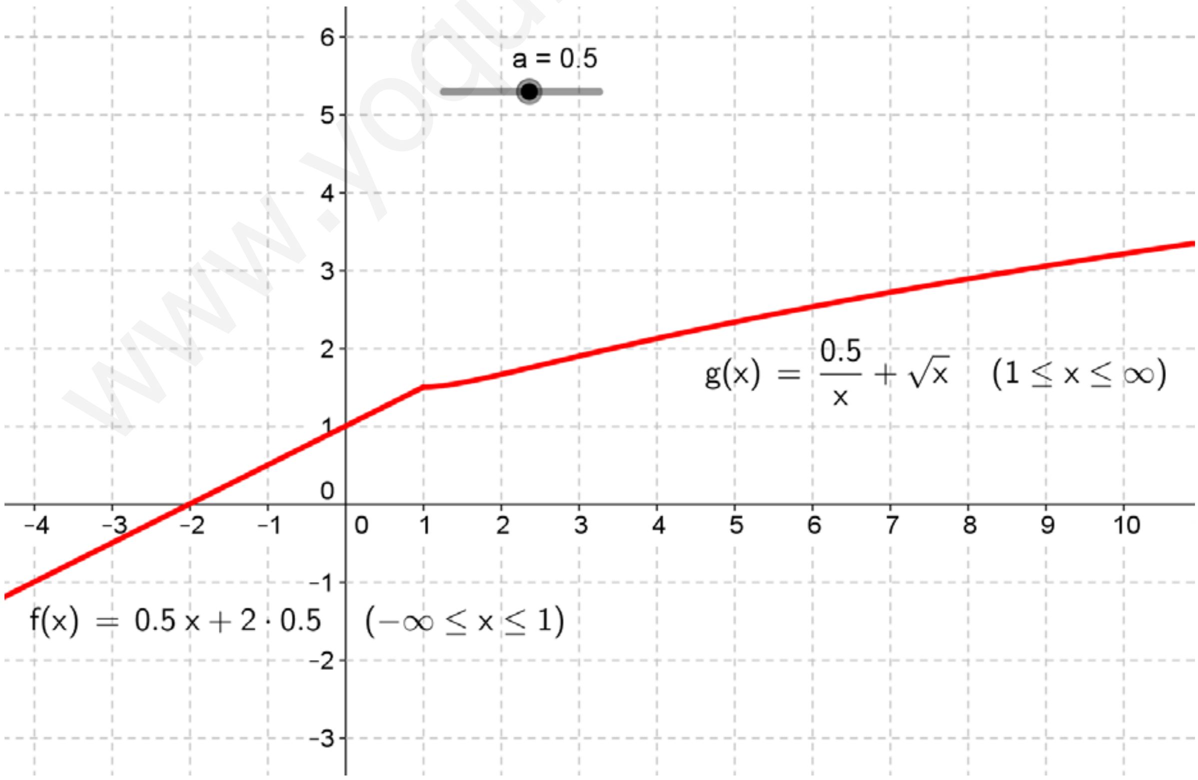
En la imagen puede verse que la función no es continua en x = $\dfrac{\pi}{2}$.



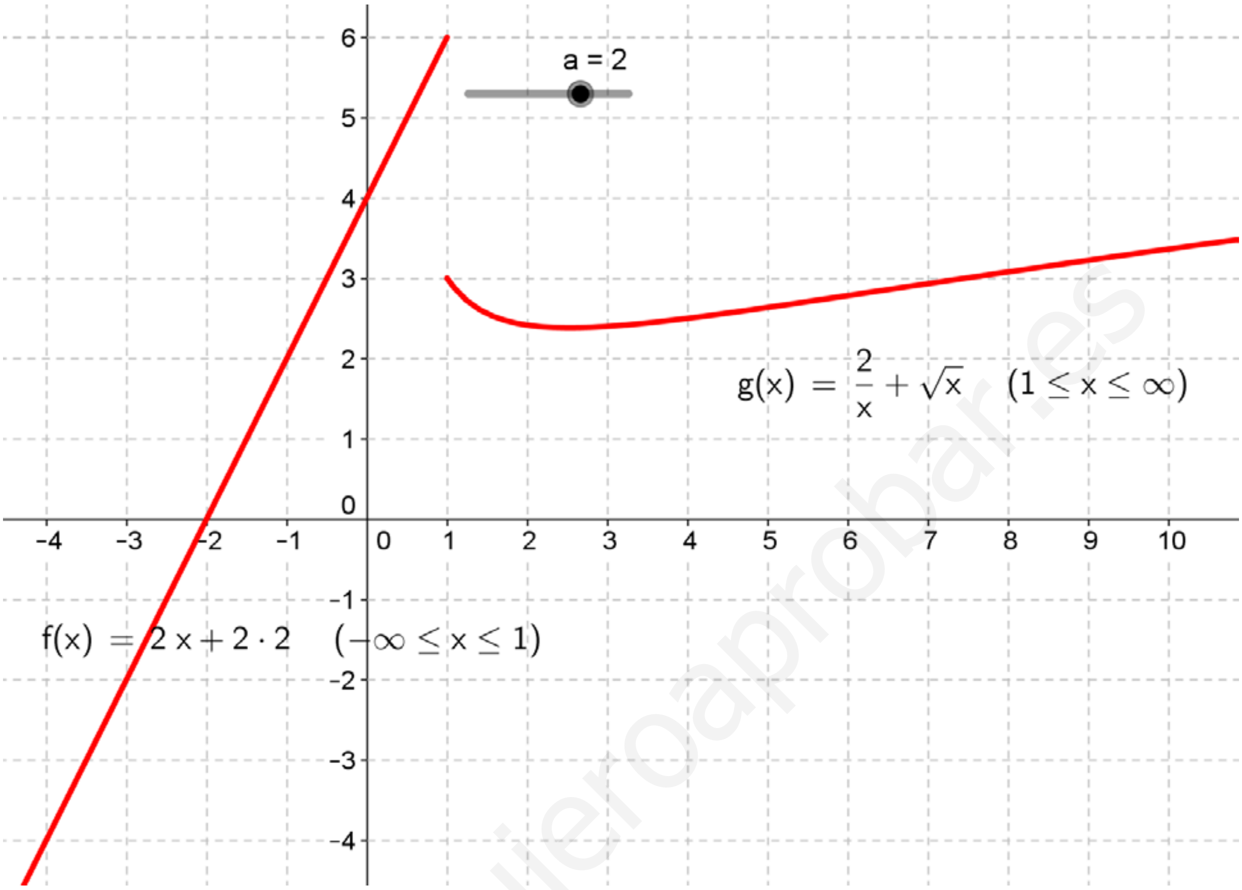
2. Halla el valor de a para el cual esta función es continua en todo R, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} + \sqrt{x} & si\ x > 1 \\ ax + 2a & si\ x \leq 1 \end{cases}$.

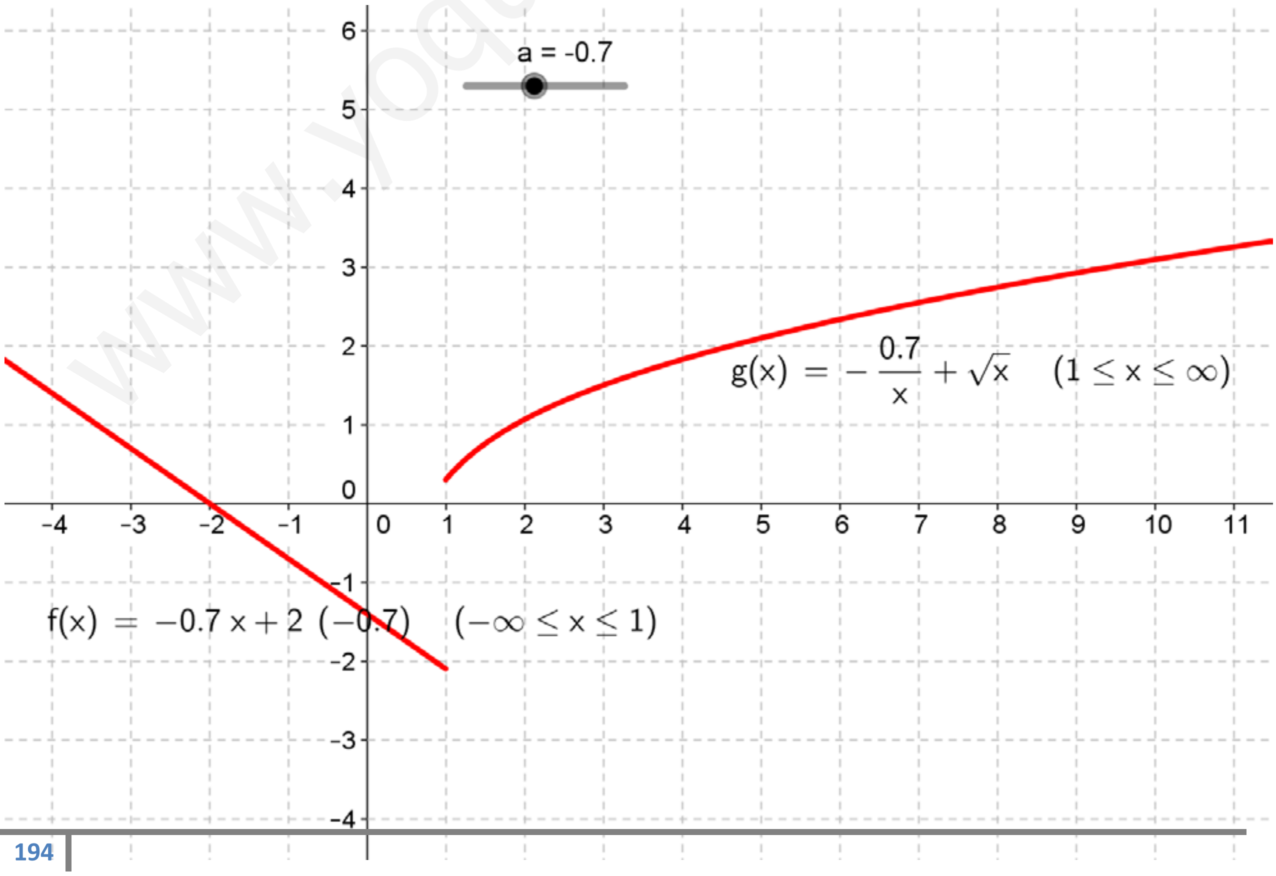
Hallamos los límites laterales en x = 1 y hacemos coincidir el valor de estos. Resolvemos la ecuación resultante y obtenemos que esta función es continua para $a = \dfrac{1}{2}$, como podemos ver en la imagen.





Para otros valores del parámetro a la función es discontinua.





ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 213

3. Estudia, de las dos formas, analítica y gráfica, la continuidad de las funciones siguientes:

a) f(x) = $\dfrac{x^2 - 4x}{16 + 4x - 2x^2}$ **b) f(x) =** $\begin{cases} sen\ x & si \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 1 - 3^x & si \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad 1 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

3. a) La función f(x) presenta dos discontinuidades en x = 4 y x = -2. Hallando los límites, como vemos en la imagen tenemos que en x = 4 presenta una discontinuidad evitable y en x = -2 una discontinuidad no evitable de primera especie con salto infinito. En la siguiente gráfica podemos ver la discontinuidad en x = -2.

$f(x) := \dfrac{x^2-4\cdot x}{16+4\cdot x-2\cdot x^2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2-4\cdot x}{16+4\cdot x-2\cdot x^2}$

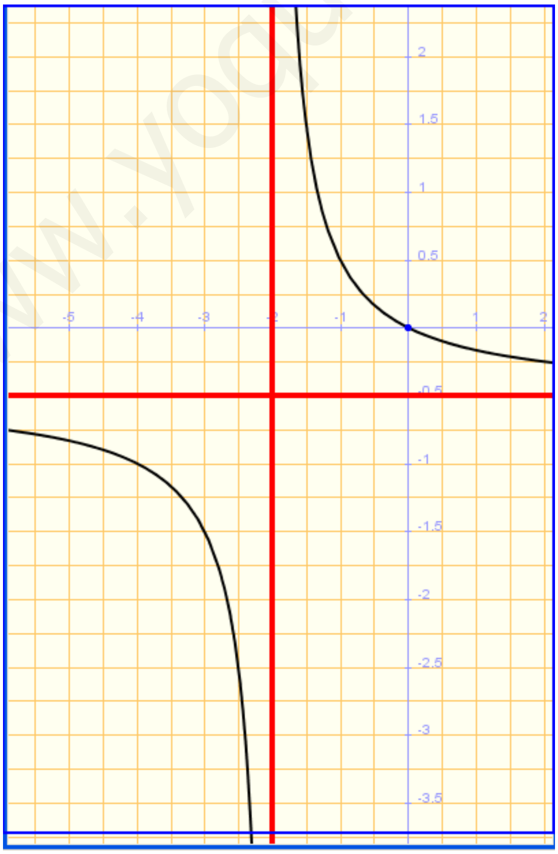
resolver$(16+4\cdot x-2\cdot x^2=0) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=4\}\}$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) \rightarrow -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \rightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \rightarrow -\infty$

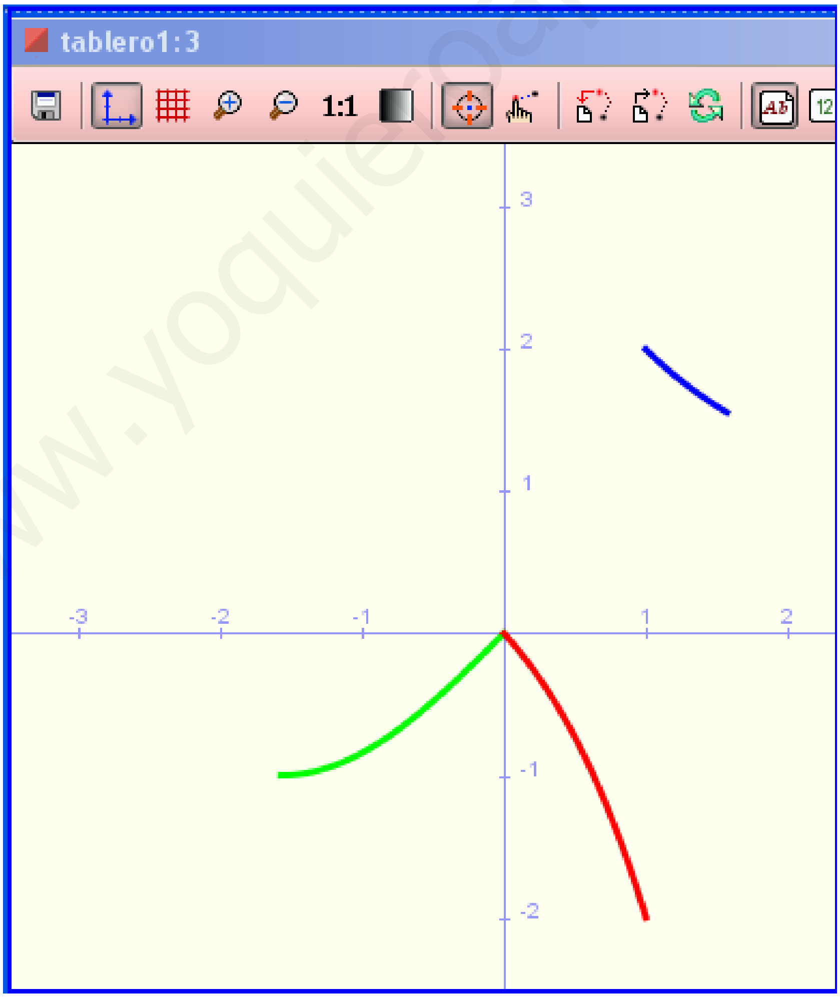
representar
(f(x),{asintota= {color=rojo,anchura_linea=4}})
→ tablero1



b) Para esta función a trozos estudiamos la continuidad en x = 0 y en x = 1. En la imagen vemos que para x = 0 es continua y no lo es para x = 1. Por tanto la función es continua en todo su dominio excepto en x = 1.

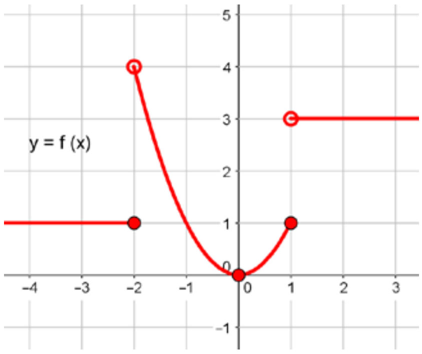
En la gráfica vemos la continuidad de la función.

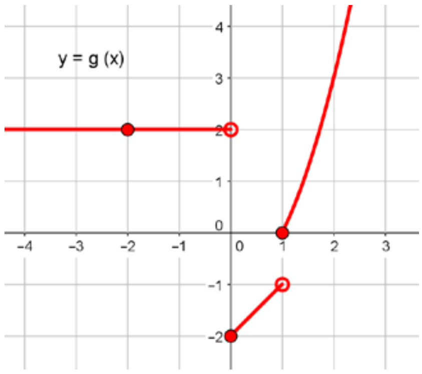
$$\lim_{x\to 0^-} \sin(x) \rightarrow 0$$
$$\sin(0) \rightarrow 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} (1-3^x) \rightarrow 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} (1-3^x) \rightarrow -2.$$
$$g(x) := \frac{4}{x+1} \rightarrow x \mapsto \frac{4}{x+1}$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) \rightarrow 2$$
$$g(1) \rightarrow 2$$
$$\text{dibujar}\left(\sin(x), -\frac{\pi}{2}..0, \{\text{color}=\text{verde}, \text{anchura\_linea}=3\}\right)$$
$$\text{dibujar}(1-3^x, 0..1, \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura\_linea}=3\}) \rightarrow \text{tab}$$
$$\text{dibujar}\left(\frac{4}{x+1}, 1..\frac{\pi}{2}, \{\text{color}=\text{azul}, \text{anchura\_linea}=3\}\right) \rightarrow \text{t}$$

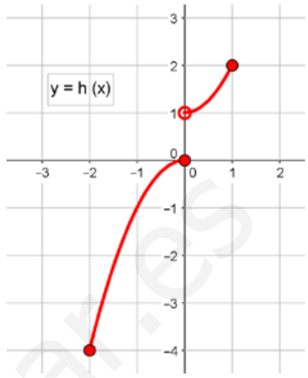


ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 216

1. Estudia la continuidad lateral de las funciones representadas en las gráficas, en los puntos de abscisa x = - 2, x = 0, x = 1.







La función y = f (x):

● Es continua por la izquierda en x = - 2, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1 = f(-2)$.

● No es continua por la derecha en x = - 2, al cumplirse: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4 \neq f(-2) = 1$.

● Es continua por la izquierda y por la derecha en x = 0, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

● Es continua por la izquierda en x = 1, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$.

● No es continua por la derecha en x = 1, al cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 \neq f(1) = 1$.

La función y = g (x):

● Es continua por la izquierda y por la derecha en x = - 2, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^+} g(x) = g(-2) = 2.$$

● No es continua por la izquierda en x = 0, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 2 \neq g(0) = -2$.

● Es continua por la derecha en x = 0, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -2 = g(0)$.

● No es continua por la izquierda en x = 1, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1 \neq g(1) = 1$.

● Es continua por la derecha en x = 1, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1 = g(1)$.

La función y = h (x):

● No es continua por la izquierda en x = - 2, ya que no está definida.

● Es continua por la izquierda en x = 0, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$.

● No es continua por la derecha en x = 0, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1 \neq h(0) = 0$.

● Es continua por la izquierda en x = 1, ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 2 = h(2)$.

● No es continua por la derecha en x = 1, ya que no está definida.

2. Analiza la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ x - 1 & si\ 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ **en [0, 3]** **b)** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ **en** $[-2, +\infty)$ **c)** $h(x) = x \cdot |x|$ **en [- 2, 2]**

a) La función y = f (x) es continua en [0, 3) ya que:

- Es continua en el intervalo (0, 3).

- Es continua por la derecha en x = 0: $\lim\limits_{x \to 0^+} = (x - 1) = -1 = f(0)$.

- No es continua por la izquierda en x = 3: $\lim\limits_{x \to 3^-} = (x - 1) = 2 \neq f(3) = 8$.

b) La función y = g (x) es continua en $(-2, +\infty)$ ya que: $\lim\limits_{x \to -2^+} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = +\infty$.

c) La función y = h (x) es continua en [- 2, 2]

- Al serlo en x = 0: $\lim\limits_{x \to 0^-} = (-x^2) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2) = 0 = h(0)$.

- Es continua por la derecha en x = - 2: $\lim\limits_{x \to -2^+} = (-x^2) = -4 = h(-2)$.

- Es continua por la izquierda en x = 2: $\lim\limits_{x \to 2^+} = (x^2) = 4 = h(2)$.

3. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo R.

a) $f(x) = \begin{cases} x + k & si\ x \leq 0 \\ x^2 - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ k & si\ x = 1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) La función y = f (x) es continua el cualquier punto no nulo al ser sus expresiones polinomios. Estudiamos la continuidad en x = 0. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}(x+k)&=k\\ \lim_{x\to 0^+}(x^2-1)&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ k=-1.$$

b) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser la expresión racional. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos el límite en x = 1 y obtenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

c) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser sus expresiones polinomios y racionales. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\left(3-kx^2\right)&=3-k\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{kx}&=\frac{2}{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 3-k=\frac{2}{k}\ \Rightarrow\ \begin{cases}k=1\\ \quad o\\ k=2\end{cases}.$$

4. Estudia la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax & si\ x\le 2\\ a-x^2 & si\ x>2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}e^{ax} & si\ x\le 0\\ x+2a & si\ x>0\end{cases}$

a) La función y = f (x) es continua para cualquier valor del parámetro a siendo x distinto de 2 al ser sus expresiones funciones polinómicas. Veamos que ocurre en x = 2:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax\right)&=4+2a\\ \lim_{x\to 2^+}(a-x^2)&=a-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 4+2a=a-4\ \Rightarrow\ a=-8$$

Estudio:

- Si a = - 8 la función y = f (x) es continua en todo R.
- Si a ≠ - 8 la función y = f (x) es continua en R – {2}.

b) La función y = f (x) es continua para cualquier valor del parámetro a siendo x distinto de 0 al ser sus expresiones funciones exponenciales o polinómicas. Veamos que ocurre en x = 0:

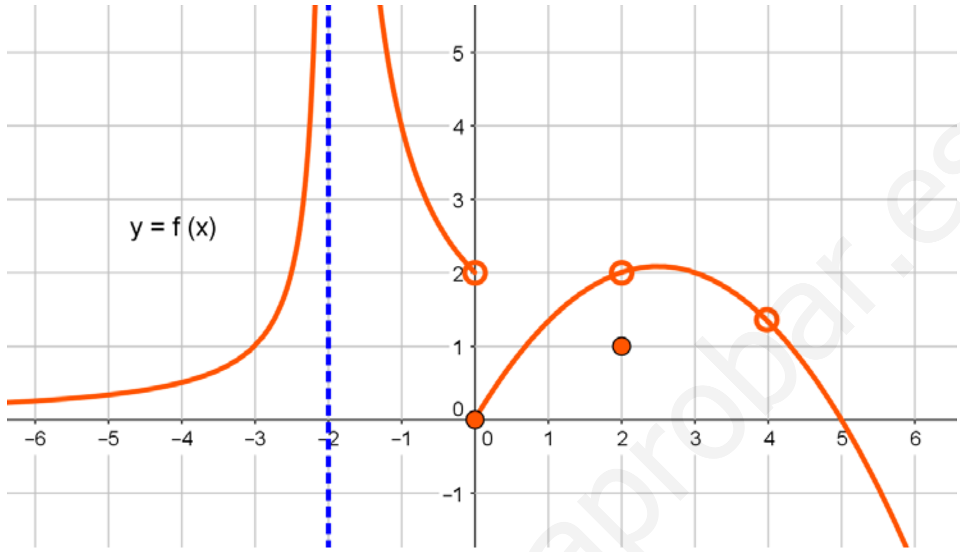
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}e^{ax}&=1\\ \lim_{x\to 0^+}(x+2a)&=2a\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 1=2a\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2}$$

Estudio:

- Si a = $\frac{1}{2}$ la función y = f (x) es continua en todo R.

● Si a ≠ $\frac{1}{2}$ la función y = f (x) es continua en R – {0}.

5. Analiza y describe los puntos de discontinuidad de la función y = f (x) representada en la gráfica.



La función y = f (x) es discontinua en:

● x = - 2, donde presenta una discontinuidad no evitable con salto infinito.

● x = 0, donde presenta una discontinuidad no evitable con salto finito.

● x = 2, donde presenta una discontinuidad evitable.

● x = 4, donde presenta una discontinuidad evitable.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 217

6. Determina el valor de los parámetros a y b para que las funciones que siguen sean continuas en sus dominios de definición.

a) $f\ (x) = \begin{cases} 1 + \cos\ x & si \quad x \leq 0 \\ 2(a + x) & si \quad 0 < x < 1 \\ b/x^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f\ (x) = \begin{cases} e^{x-a} & si \quad x \leq 2 \\ 2x + b & si \quad 2 < x < 4 \\ (a+3) + \ln(x+b) & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) Estudiamos la continuidad en x = 0 y x = 1. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos\ x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2(a + x) = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} 2\ (a + x) = 2a + 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{b}{x^2} = b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2a + 2 = b$$

Los valores buscados son a = 1 y b = 4.

b) Estudiamos la continuidad en x = 2 y x = 4. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(e^{x-a}\right) = e^{2-a} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + b) = 4 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e^{2-a} = 4 + b$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} (2x + b) = 8 + b \\ \lim\limits_{x \to 4^+} [(a + 3] + \ln\ (x + b) = (a + 3) + \ln\ (4 + b) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 8 + b = a + 3 + \ln\ (4 + b)$$

Resolviendo el sistema resultante en las incógnitas a y b, obtenemos a = 2 y b = 3.

7. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f\ (x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ **b)** $f\ (x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ 3 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$ **c)** $f\ (x) = \begin{cases} 5x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 - 3 & si \quad 0 < x < 1 \\ -4x + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Los resultados son:

a) En x = - 4 la función tiene una discontinuidad no evitable con salto infinito.

En x = 1 presenta una discontinuidad evitable.

b) En x = 0 la función tiene una discontinuidad no evitable con salto finito.

c) En x = 0 la función tiene una discontinuidad no evitable con salto finito.

En x = 1 la función presenta una discontinuidad evitable al no estar definida en ese punto y tener límite.

8. Si la función y = f (x) es continua en x = 3 y f (3) < 0, ¿existe un entorno de 3 en el cual f (x) es negativa?

Por el teorema de conservación del signo, como f (x) es continua en x = 3 y f (3) ≠ 0, existe un entorno de 3 en el cual el signo de f (x) es el mismo que en f (3), en este caso negativo.

9. Estudia si las siguientes funciones verifican el teorema de Bolzano en los intervalos indicados en cada una de ellas:

a) f (x) = $x^3 - 8x^2 + 3$ en [- 1, 0] **b) f (x) = x^2 + sen x + 1 en** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) La función f (x) = $x^3 - 8x^2 + 3$ es continua en [- 1, 0] y además f (- 1) = - 6 < 0 y f (0) = 3 > 0, es decir, verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto, existe c $\in$ (- 1, 0) de modo que f (c) = 0.

b) La función f (x) = x^2 + sen x + 1 es continua en [0, π/2] y cumple f (0) = 1 > 0 y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 2 > 0$, por tanto, no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. No podemos asegurar que exista un valor que anule la función en el intervalo dado.

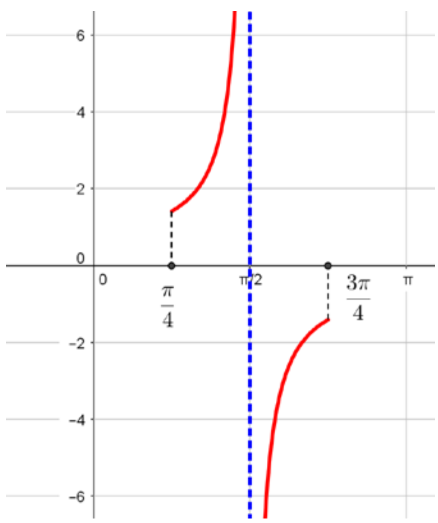
10. Analiza si las siguientes ecuaciones tienen soluciones en los intervalos dados:

a) $x^2 - e^x + 2 = 0$ en [1, 2] **b) x – ln x – 3 = 0 en [1, 3]**

a) La función f (x) = $x^2 - e^x + 2$ es continua en [1, 2] y además f (1) = 3 – e > 0 y f (2) = 6 – e^2 < 0, por tanto, verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Existe c $\in$ (1, 2) de modo que f (c) = 0, es decir, la ecuación dada tiene solución en ese intervalo.

b) La función f (x) = x – ln x - 3 es continua en [1, 3] y además f (1) = - 2 < 0 y f (3) = - ln 3 < 0, por tanto, no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. No podemos asegurar que la ecuación dada tenga solución en el intervalo citado.

11. La función y = sec x toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [π/4, 3π/4] pero no se anula en ningún punto de este intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?



Para que se cumpla la tesis del teorema deben cumplirse las hipótesis. En es situación la función $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ no es continua en el intervalo del enunciado. Tiene una discontinuidad no evitable con salto infinito en $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ al cumplirse:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

Al no ser continua la función, aunque tome valores de distinto signo en los extremos del intervalo, no se anulará en ningún punto del citado intervalo.

En la gráfica puede verse lo que ocurre.

12. Razona que las gráficas de las funciones f (x) = $3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y g (x) = e^x se cortan en algún punto con abscisa entre – 1 y 0.

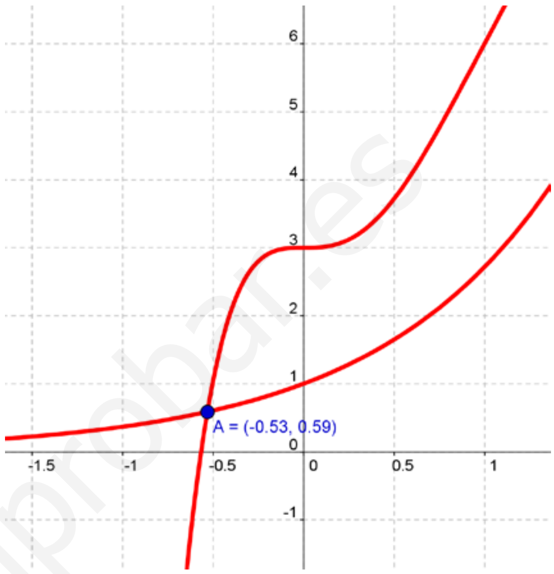
Si f (x) y g (x) se cortan en un punto con abscisa c $\in$ (- 1, 0), la función F (x) = f (x) – g (x) tendrá un cero en c, es decir:

$$F(c) = f(c) - g(c) = 0$$

La función F (x) = $3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$ cumple:

$$F(-1) = -3 - 10 - 10 + 3 - \frac{1}{e} < 0$$

$$F(0) = 3 - 1 = 2 > 0$$



Como F (x) es continua en [- 1, 0], por el teorema de Bolzano existe c $\in$ (- 1, 0) tal que F (c) = 0, por tanto f (c) = g (c)

La abscisa del punto en el que se cortan las gráficas de f (x) y g (x) es c. Puede verse en el dibujo adjunto.

13. Sean f y g dos funciones continuas en [a, b] y tales que f (a) > g (a) y f (b) < g (b). Demuestra que existe un valor c $\in$ (a, b) tal que f (c) = g (c).

Sea la función F definida por F (x) = f (x) – g (x). Esta función cumple:

- Por ser las funciones f y g continuas en [a, b], la función F = f - g es continua en [a, b].
- Al ser f (a) > g (a) se cumple que F (a) = f (a) – g (a) > 0.
- Al ser f (b) < g (b) se cumple que F (b) = f (b) – g (b) < 0.

Por cumplirse las tres condiciones anteriores, según el teorema de Bolzano, existe al menos un c $\in$ (a, b) tal que:

$$F(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c).$$

14. Sea la función f (x) = $2x^2 - 3x + 1$, ¿puede afirmarse que existe un valor c $\in$ (2, 3) tal que f (c) = 6.

La función y = f (x), por ser polinómica, es continua para cualquier número real. Además, f (2) = 3 y f (3) = 10.

Según el teorema de Darboux o de los valores intermedios, como 6 está entre f (2) = 3 y f (3) = 10, existirá un número c $\in$ (2, 3) tal que f (c) = 6.

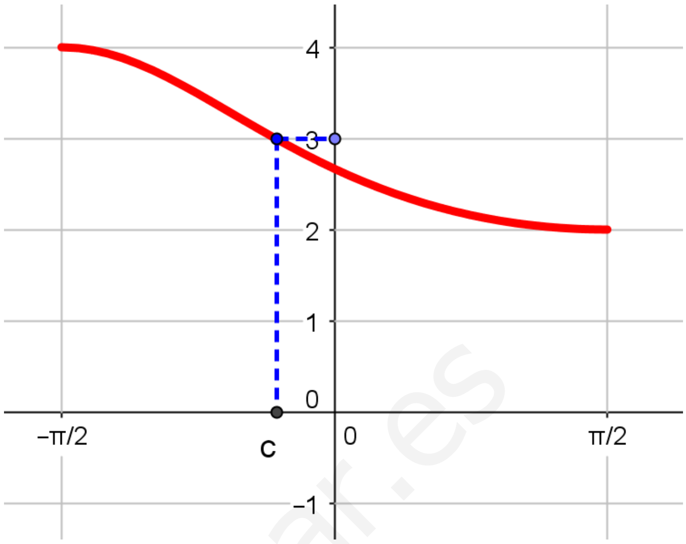
15. Prueba que la función $f(x) = \dfrac{8}{3 + sen\ x}$ toma el valor 3 en algún valor del intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

La función y = f (x), por ser combinación de funciones continuas, es continua para cualquier número real. Además:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3 + sen\,(-\pi)} = \frac{8}{3-1} = 4$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3 + sen\,(\pi)} = \frac{8}{3+1} = 2$$

Según el teorema de Darboux o de los valores intermedios, como 3 está entre f (- π/2) = 4 y f (π/2) = 2, existirá un número c ∈ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que f (c) = 3.



16. ¿Es continua la función $f\,(x) = \frac{4}{x}$ en el intervalo [0, 3]? ¿Y en el intervalo [1, 3]? ¿Está acotada en estos intervalos?

La función $f\,(x) = \frac{4}{x}$ no es continua en [0, 3], puesto que no es continua en x = 0.

La función $f\,(x) = \frac{4}{x}$ sí es continua en [1, 3], por lo que podemos asegurar, por el teorema de acotación en un intervalo cerrado que f (x) está acotada en [1, 3].

17. ¿Se puede afirmar que la función $f\,(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x - 3}$ está acotada en el intervalo [0, 2]? ¿Y en el intervalo [- 2, 0]?

La función dada no es continua en x = 1, por tanto no es continua en el intervalo [0, 2], no podemos afirmar que esté acotada.

En cambio si es continua en el intervalo [- 2, 0], por lo que podemos asegura, por el teorema de acotación en un intervalo cerrado que f (x) está acotada en [- 2, 0].

18. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente. En el caso de tener extremos absolutos, encuéntralos.

a) f (x) = $2x^2 - 4x + 5$ en [- 1, 2]

b) $g\,(x) = \frac{5}{x-2}$ en [0, 3]

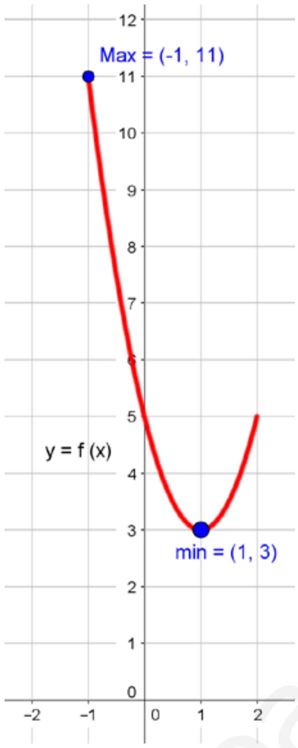
c) h (x) = $-x^2 + 2x + 3$ en [- 3, 4]

d) i (x) = $x^3 - 1$ en (- 2, 2)

a) La función y = f (x), por ser polinómica, es continua para cualquier número real, y, por tanto lo es en el intervalo [- 1, 2]. El teorema de Weierstrass no asegura que:

Una función continua en un intervalo cerrado, alcanza en este el máximo y el mínimo absoluto.

En este caso, el máximo absoluto es el punto (- 1, 11) y el mínimo absoluto es (1, 3).



b) La función y = g (x) no es continua en el intervalo [0, 3] ya que en x = 2 presenta una discontinuidad no evitable con salto infinito.

En este caso no podemos aplicar el teorema de Weierstrass.

c) La función y = h (x), por ser polinómica, es continua para cualquier número real, y, por tanto, lo es en el intervalo [- 3, 4]. Aplicando el teorema de Weierstrass obtenemos el máximo absoluto es el punto (1, 4) y el mínimo absoluto es (- 3, - 12).

d) En este caso no podemos aplicar el teorema de Weierstrass al ser el intervalo abierto.

19. La función f (x) = tg x no tiene máximo absoluto en el intervalo [0, π]. ¿Contradice este hecho el teorema de Weierstrass?

No contradice el teorema de Weierstrass, puesto que f (x) = tg x no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$; por tanto, no es continua en el intervalo [0, π]. Debido a esto, a f (x) no se le puede aplicar el teorema de Weierstrass.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 218

1. Estudia la continuidad de la función g o f, siendo f y g las funciones definidas en R por:

$$f\ (x) = \frac{x + |x|}{2} \qquad\qquad g\ (x) = \begin{cases} x & si\ x < 0 \\ x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La función y = f (x) es $f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \\ x \ si \ x > 0 \end{cases}$.

La función g o f es $g \circ f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \le 0 \\ x^2 \ si \ x > 0 \end{cases}$.

Esta función es continua para cualquier número real.

2. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| \ si \ x < -1 \\ x^2 \quad si \ -1 \le x \le 1 \\ 2x+1 \ si \ x > 1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el valor absoluto del enunciado podemos definir la función en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) \ si \ x < -2 \\ x+2 \quad si \ x \ -2 \le x < -1 \\ x^2 \quad si \ -1 \le x \le 1 \\ 2x+1 \quad si \ x > 1 \end{cases}$$

Las expresiones de la función son polinomios, por tanto, estudiaremos la continuidad en los puntos en los que cambia de expresión la función.

En x = - 2, f (- 2) = 0 y los límites laterales son:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -(x+2) = 0 \text{ y } \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x+2) = 0$$

En x = - 1, f (- 1) = 1 y los límites laterales son:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+2) = 1 \text{ y } \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x^2 = 1$$

En x = 1, f (1) = 1 y los límites laterales son:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (2x+1) = 3$$

Concluimos que la función es continua en R - {1}.

3. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + b}{x^3 + ax^2 - 14x}$ posee una discontinuidad evitable en x = 2. Halla a y b y estudia el resto de discontinuidades que puedan aparecer en la función.

Al presentar una discontinuidad evitable en x = 2, debemos estudiar el límite de la función en el citado punto. Obtenemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x + b}{x^3 + ax^2 - 14x} = \frac{b}{4a - 20}$$

El numerador y el denominador deben anularse: b = 0 y 4a - 20 = 0; es decir, a = 5 y b = 0.

Para estos valores la función es: $f\ (x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + 5x^2 - 14x} = \dfrac{x\ (x-2)}{x\ (x-2)(x+7)}$

Esta función presenta discontinuidades evitables en x = 2 y x = 0. Además presenta una discontinuidad no evitable de primera especie con salto infinito en x = - 7; al cumplirse:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x\ (x-2)}{x\ (x-2)(x+7)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{9} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x\ (x-2)}{x\ (x-2)(x+7)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{x \to -7^-} \frac{x\ (x-2)}{x\ (x-2)(x+7)} = \lim_{x \to -7^-} \frac{1}{x+7} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -7^+} \frac{x\ (x-2)}{x\ (x-2)(x+7)} = \lim_{x \to -7^+} \frac{1}{x+7} = +\infty$$

4. Halla los valores de a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la siguiente función:

$$f\ (x) = \begin{cases} 3 + sen\ x & si \quad -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{\cos\ x}{a} & si \quad 0 < x \le \pi \\ \cos\ x + b & si \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

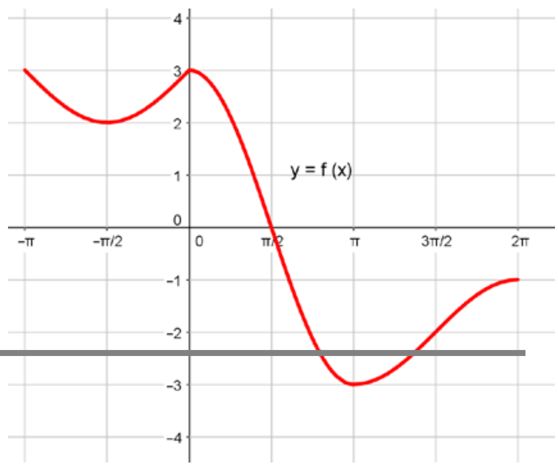
Calcula el punto c ∈ (- π, 2π) en el que la función se anula.

La función f (x) tiene que ser continua y para ello debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (3 + sen\ x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos\ x}{a} = \dfrac{1}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\cos\ x}{a} = \dfrac{-1}{a} \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} (\cos\ x + b) = -1 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{a} = -1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

La otras hipótesis también se cumple: f (- π) = 3 > 0 y f (2π) = - 1 < 0.
Calculamos el valor c ∈ (- π, 2π) tal que f (c) = 0:



- 3 + sen x = 0 ⇒ sen x = - 3, esta ecuación no tiene soluciones.

- $3\cos\ x = 0 \ \Rightarrow\ \cos\ x = 0 \ \Rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2} \in (0,\ \pi)$

- cos x − 2 = 0 ⇒ cos x = 2, esta ecuación no tiene soluciones.

En la imagen puede verse que $c = \frac{\pi}{2}$.

5. a) ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?

b) Demuestra que la función f (x) anterior y g (x) = 2x – 1 se cortan en al menos un punto.

a) La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en todo R, ya que el denominador nunca se anula.

Como f (x) > 0 para todo x $\in$ R, no se puede aplicar el teorema de Bolzano en ningún intervalo.

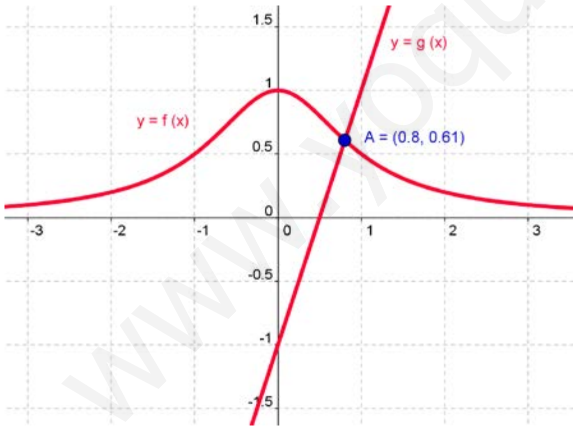
b) Si f (x) y g (x) = 2x – 1 se cortaran en algún punto, para ese valor de x, se cumpliría:

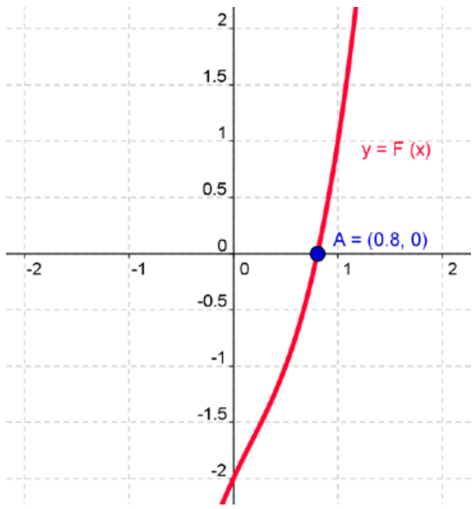
$$\frac{1}{1+x^2} = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = (2x-1)(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

Llamamos f (x) = $2x^3 - x^2 + 2x - 2$, función continua en R.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, la función F (x) cambia de signo en, al menos, un x $\in$ R, por lo que, según el teorema de Bolzano, F (c) = 0, lo que indica que f (c) = g (c); es decir, f (x) y g (x) se cortan, al menos, en ese punto c.

Todo lo anterior puede verse en las imágenes.





6.

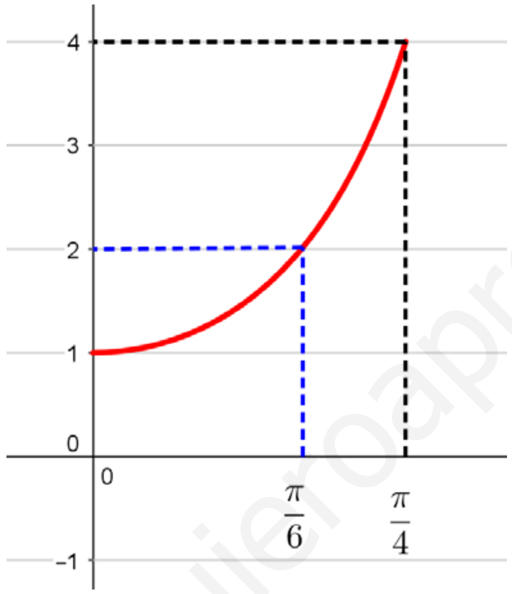
Comprueba que la función f (x) = 3 · tg² x + 1 toma el valor 2 en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y calcula el valor c de este intervalo para el cual f (c) = 2.

La función y = f (x) es continua en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Además, f (0) = 1 y $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

Según el teorema de Darboux o de los valores intermedios, como 2 está entre f (0) = 1 y $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$ existirá un número c $\in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ tal que f (c) = 2.

Calculamos el valor c citado:

$$3 \cdot tg^2\ c + 1 = 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot tg^2\ c = 1 \;\Rightarrow\; tg^2\ c = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; tg\ c = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; c = \frac{\pi}{6}\ rad.$$



7. Prueba que la función f (x) = e^x – 1 toma todos los valores del intervalo [0, e – 1].

Observamos que se cumple:

- La función se anula, es decir, $e^x - 1 = 0$ para x = 0.

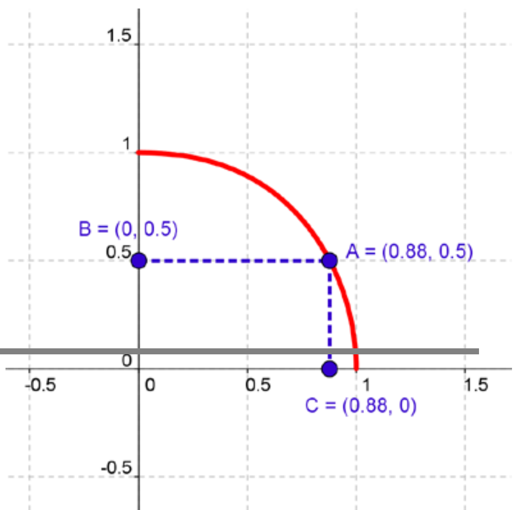
- La función toma el valor e – 1, es decir $e^x - 1 = e - 1$ para x = 1.

La función dada es continua en el intervalo [0, 1], aplicando el teorema de Darboux, podemos afirmar que alcanza todos los valores del intervalo [f (0), f (1)] = [0, e – 1].

8. Demuestra que la función $f\ (x) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}2^x\right)}$ vale $\frac{1}{2}$ en algún punto del intervalo (0, 1). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La función $f\ (x) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}2^x\right)}$ es continua en (0, 1) por ser composición de funciones continuas. (Observa que el radicando es siempre positivo en (0, 1)).

Los valores que toma la función en los extremos del intervalo son:



$$f\ (0) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\,2^0\right)} = \sqrt{sen\ \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$f\ (1) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\,2^1\right)} = \sqrt{sen\ \pi} = \sqrt{0} = 0$$

Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios, f (x) toma todos los valores comprendidos entre 1 y 0, en particular, $\frac{1}{2}$, es decir, existe c $\in$ (0, 1) tal que $f\,(c) = \frac{1}{2}$.

9. Demuestra que la ecuación $\pi^x = e$ tiene solución en (0, 1). ¿Lo cumple también la ecuación $\phi^x = e$, siendo ϕ el número de oro?

Para ver si la ecuación $\pi^x = e$ tiene soluciones en (0, 1), veamos si la función f (x) = $\pi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [0, 1]:

- f (x) es continua en [0, 1]
- f (0) = $\pi^0 - e = 1 - e < 0$
- f (1) = $\pi^1 - e = \pi - e > 0$

Por tanto, verifica las hipótesis de Bolzano y existirá c $\in$ (0, 1) tal que f © = 0, es decir, $\pi^c = e$.

Para ver si la ecuación $\phi^x = e$ tiene soluciones en (0, 1), veamos si la función f (x) = $\phi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [0, 1]:

- f (x) es continua en [0, 1]
- f (0) = $\phi^0 - e = 1 - e < 0$
- f (1) = $\phi^1 - e = \phi - e < 0$

Como los signos de f (0) y de f (1) coinciden, no se puede aplicar el teorema de Bolzano y no podemos asegurar que existe una solución en (0, 1).

10. ¿La función $f\ (x) = \frac{1}{1+x^2}$ alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo [- 1, 1? En caso afirmativo, hállalos.

La función es continua en el intervalo dado, por el teorema de Weierstrass, la función alcanza el máximo y el mínimo absolutos en ese intervalo.

El máximo absoluto es 1 y lo alcanza en x = 0 y el mínimo absoluto es $\frac{1}{2}$ y lo alcanza para x = 1 o x = - 1.

11. a) Demuestra que alguna de las raíces del polinomio P (x) = $x^4 - 8x - 1$ es negativa.

b) Demuestra que P (x) tiene alguna raíz positiva.

a) La raíces de P (x) son los ceros de la función F (x) = $x^4 - 8x - 1$, función continua y derivable en R.

Se cumple:

F (0) = - 1 < 0

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - 8x - 1\right) = +\infty > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c_1 \in (-\infty, 0)$ tal que F (c_1) = 0.

El valor c_1 es una raíz negativa de P (x).

b) En este caso, se cumple:

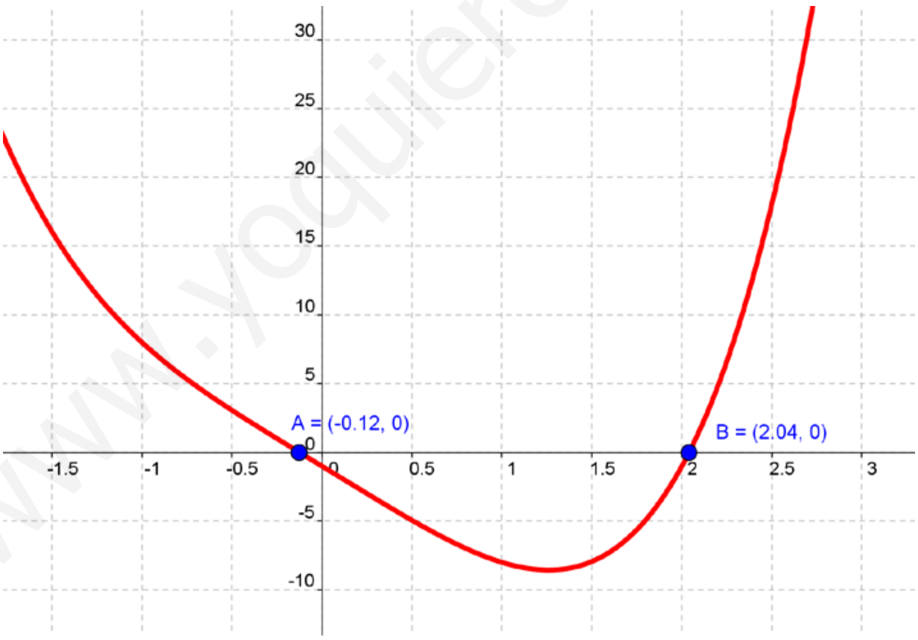
F (0) = - 1 < 0

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 8x - 1\right) = +\infty > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c_2 \in (0, +\infty)$ tal que F (c_2) = 0.

El valor c_2 es una raíz positiva de P (x).

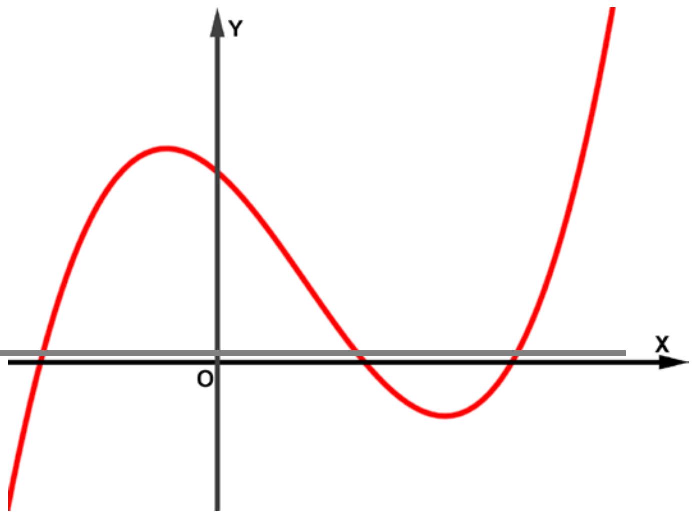
Lo anterior puede verse en la imagen que sigue.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 219

Una propiedad de las cúbicas

1. Utilizando algún medio tecnológico (calculadora gráfica o programa con representación gráfica) representa la función cúbica f (x) = $2x^3 - 9x^2 - 20x + 75$ y halla la *Ventana gráfica* adecuada para que el



dibujo de la gráfica aparezca como se muestra en la imagen.

a) ¿Cuáles son las raíces de la función y = f (x)? Confirma los valores utilizando el teorema del resto

b) Toma las raíces de dos en dos y halla las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de abscisa igual a la media aritmética de cada par de raíces.

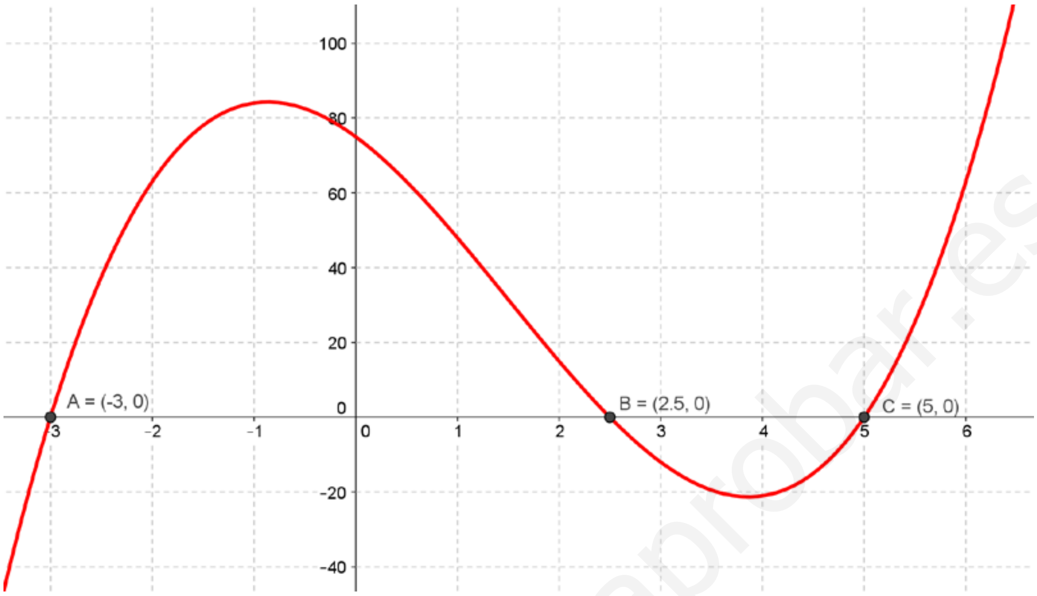
c) Halla el punto donde cada una de estas rectas tangentes corta de nuevo a la curva. ¿Ocurre siempre lo mismo sea cual sea el par de raíces utilizado?

2. ¿Ocurre lo mismo para otras funciones cúbicas similares? ¿Puedes probar las propiedades observadas u obtenidas?

3. Investiga las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, (c) o una raíz real y dos raíces complejas.

1. La parte gráfica de esta investigación se ha realizado con GeoGebra.

Introducimos la expresión de la función f (x) = $2x^3 - 9x^2 - 20x + 75$, ajustamos la Ventana gráfica y hallamos la intersección de la gráfica de y = f (x) con el eje OX, obteniendo los puntos: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).



a) Las raíces son $x_A = - 3$, $x_B = 2,5$ y $x_C = 5$.

Comprobamos, con el teorema del resto, que es así:

$f(x_A) = f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 - 20 \cdot (-3) + 75 = 0$

$f(x_B) = f(2,5) = 2 \cdot (2,5)^3 - 9 \cdot (2,5)^2 - 20 \cdot (2,5) + 75 = 0$

$f(x_A) = f(5) = 2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 75 = 0$

b) Los puntos, sobre el eje OX, de abscisa la media aritmética de las raíces son:

De A (- 3, 0) y B (2,5; 0) es M_1 (- 0,25; 0)

De A (- 3, 0) y C (5, 0) es M_2 (1, 0)

De B (2,5; 0) y C (5, 0) es M_3 (3,75; 0)

Hallamos los puntos P, Q y R, sobre la gráfica, cuya abscisa es la de los puntos M_1, M_2 y M_3:

$f(x_{M1}) = f(-0,25) = 2 \cdot (-0,25)^3 - 9 \cdot (-0,25)^2 - 20 \cdot (-0,25) + 75 = 79,41$

$f(x_{M2}) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + 75 = 48$

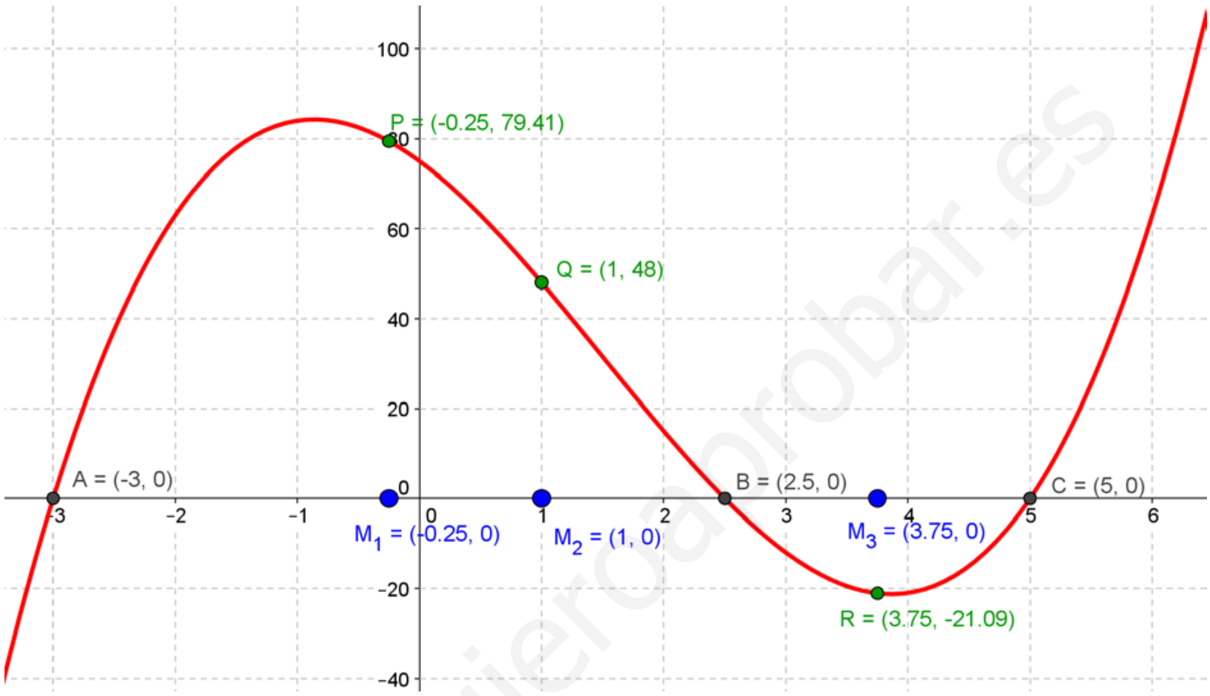
$f(x_{M3}) = f(3,75) = 2 \cdot (3,75)^3 - 9 \cdot (3,75)^2 - 20 \cdot (3,75) + 75 = -21,09$

Todos los puntos pueden verse en la imagen que sigue:

Puntos, en color negro, cuyas abscisas son las raíces: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).

Puntos, en color azul, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces: M_1 (- 0,25; 0); M_2 (1, 0) y M_3 (3,75; 0).

Puntos, en color verde, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces y están sobre la gráfica de la función: P (- 0,25; 79,41); Q (1, 48) y R (3,75; - 21, 09).



Para hallar las ecuaciones de las tangentes en los puntos P, Q y R, hallamos los valores de las pendientes de las tangentes citadas. La derivada de la función y = f (x) es $f'(x) = 6x^2 - 18x - 20$.

Las pendientes de las tangentes son:

$m_P = f'(-0,25) = 6 \cdot (-0,25)^3 - 18 \cdot (-0,25) - 20 = -15,13$

$m_Q = f'(1) = 6 \cdot 1 - 18 \cdot 1 - 20 = -32$

$m_R = f'(3,75) = 6 \cdot (3,75)^3 - 18 \cdot (3,75) - 20 = -3,13$

Hallamos las ecuaciones de las rectas tangentes.

En el punto P (- 0,25; 79,41): $y - 79,41 = -15,13 \cdot (x + 0,25)$ $\Rightarrow$ **$y = -15,13x + 75,63$**

Comprobamos que pasa por el punto C (5, 0): $y(5) = -15,13 \cdot 5 + 75,63 = 0$

En el punto Q (1, 48): $y - 48 = -32 \cdot (x - 1)$ $\Rightarrow$ **$y = -32x + 80$**

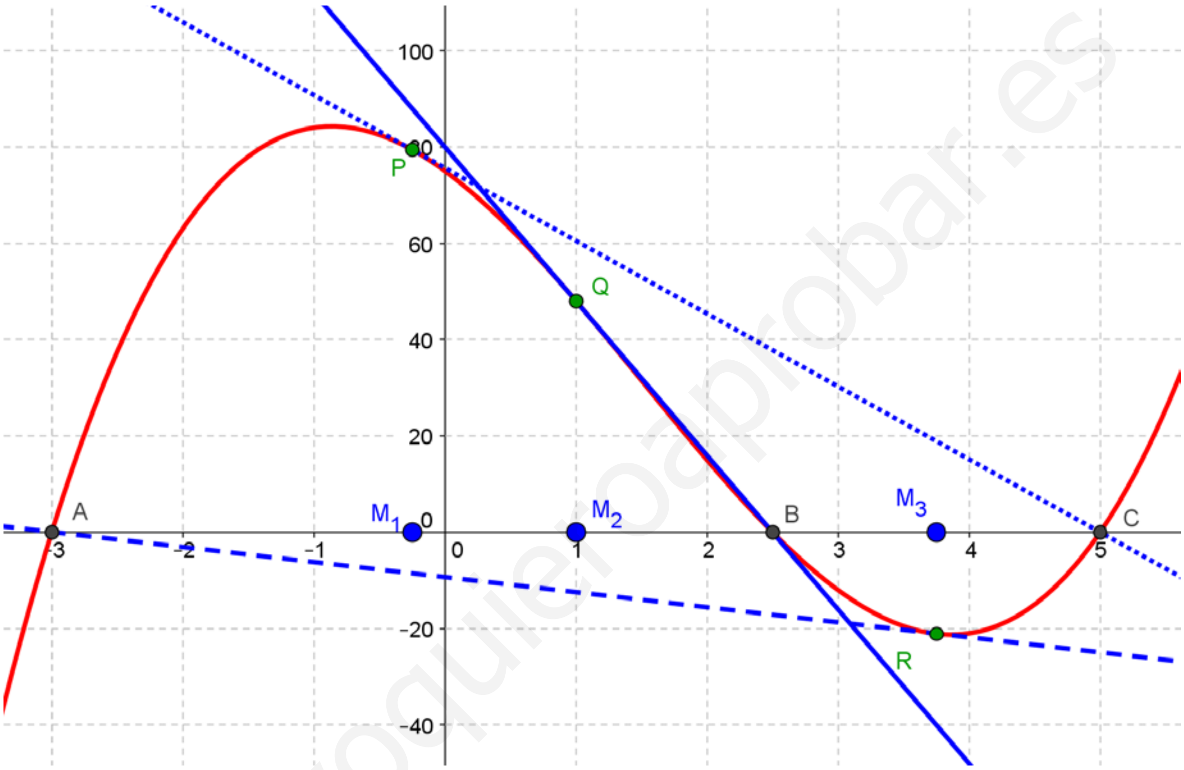
Comprobamos que pasa por el punto B (2,5; 0): $y(2,5) = -32 \cdot 2,5 + 80 = 0$

En el punto R (3,75; - 21, 09): $y + 21,09 = -3,13 \cdot (x - 3,75)$ $\Rightarrow$ **$y = -3,13x - 9,37$**

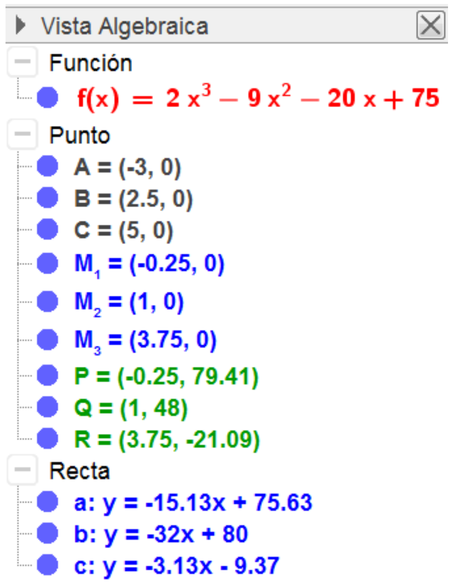
Comprobamos que pasa por el punto A (- 3, 0): y (- 3) = - 3,13 · (- 3) +- 9,35 = 0

Observamos que la recta tangente en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasa por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Todo lo anterior puede verse en la imagen que sigue: La recta tangente en P (en trazo punteado) pasa por el punto C. La tangente en Q (en trazo continuo) pasa por el punto B y la tangente en R (en trazo discontinuo) pasa por el punto A.



En la imagen adjunta, que se corresponde con la Ventana Algebraica, pueden verse la ecuación de la de la función (en rojo), los puntos con sus coordenadas (en negro, azul y verde) y las ecuaciones de las rectas tangentes (en color azul)



2. Para poder observar si ocurre lo mismo con otras funciones cúbicas similares explicamos la construcción realizada con GeoGebra en el apartado anterior, que debe servirnos para cualquier función cúbica que tenga tres raíces reales y distintas. Los pasos a seguir con GeoGebra:

1º Introducimos y representamos la función cúbica y = f (x).

2º Con la herramienta **Desplaza Vista Gráfica** ajustamos la ventana gráfica de forma que aparezca la gráfica de la función con sus puntos notables (máximo, mínimo y punto de inflexión), así como los cortes de la gráfica con el eje OX.

3º Usando la herramienta **Intersección** hallamos los puntos A, B y C, intersección de la gráfica con el eje OX, cuyas abscisas son las raíces de la función cúbica.

4º Utilizando la herramienta **Punto Medio o Centro** determinamos los puntos M_1, M_2, y M_3, sobre el eje OX, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las abscisas de los puntos A y B, A y C, B y C, respectivamente.

5º Dibujamos los puntos P, Q y R sobre la gráfica de y = f (x) tecleando en la ventana de entrada:

Para el punto P, tecleamos: $P = (x\,(M\_1),\ f\ (x\,(M\_1)))$.

Para el punto Q, tecleamos: $Q = (x\,(M\_2),\ f\ (x\,(M\_2)))$.

Para el punto R, tecleamos: $R = (x\,(M\_3),\ f\ (x\,(M\_3)))$.

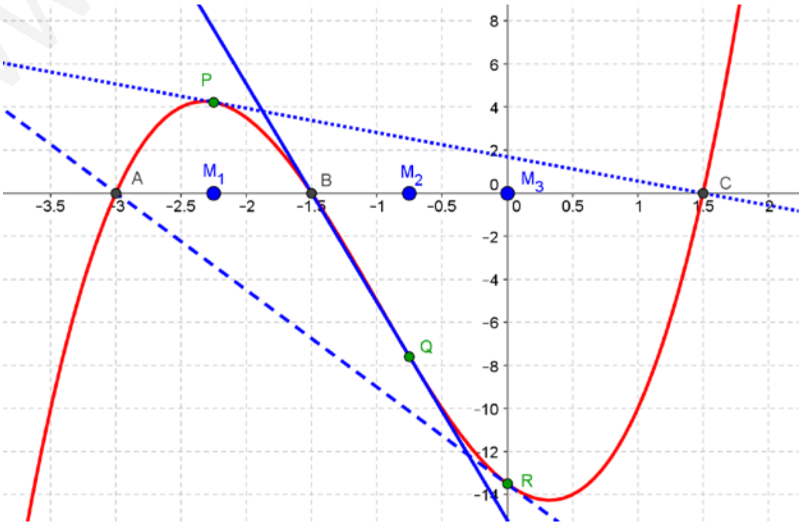
6º Finalmente, con la herramienta, **Tangentes**, dibujamos las rectas tangentes a la gráfica de y = f (x) en los puntos P, Q y R.

7º En las **Propiedades de los objetos** (función, puntos, rectas) ponemos el color, estilo… a nuestro gusto.

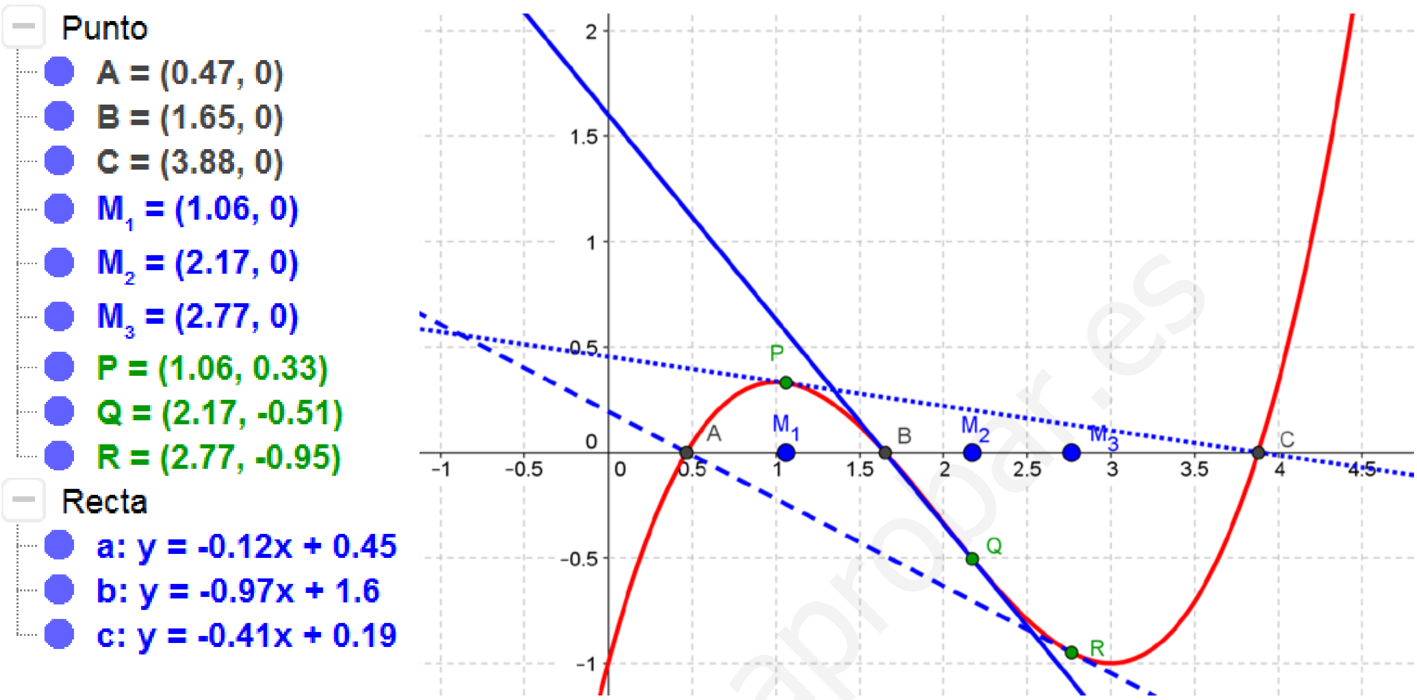
En la imagen puede verse los resultados obtenidos para la función f (x) = $2x^3 + 6x^2 – 4,5x – 13,5$.

Los puntos son:
A (- 3, 0); B (- 1,5; 0); C (1,5; 0); M_1 (- 2,25; 0); M_2 (- 0,75; 0); M_3 (0, 0); P (- 2,25; 4,22); Q (- 0,75; - 7,59) y Q (0, - 13,5).

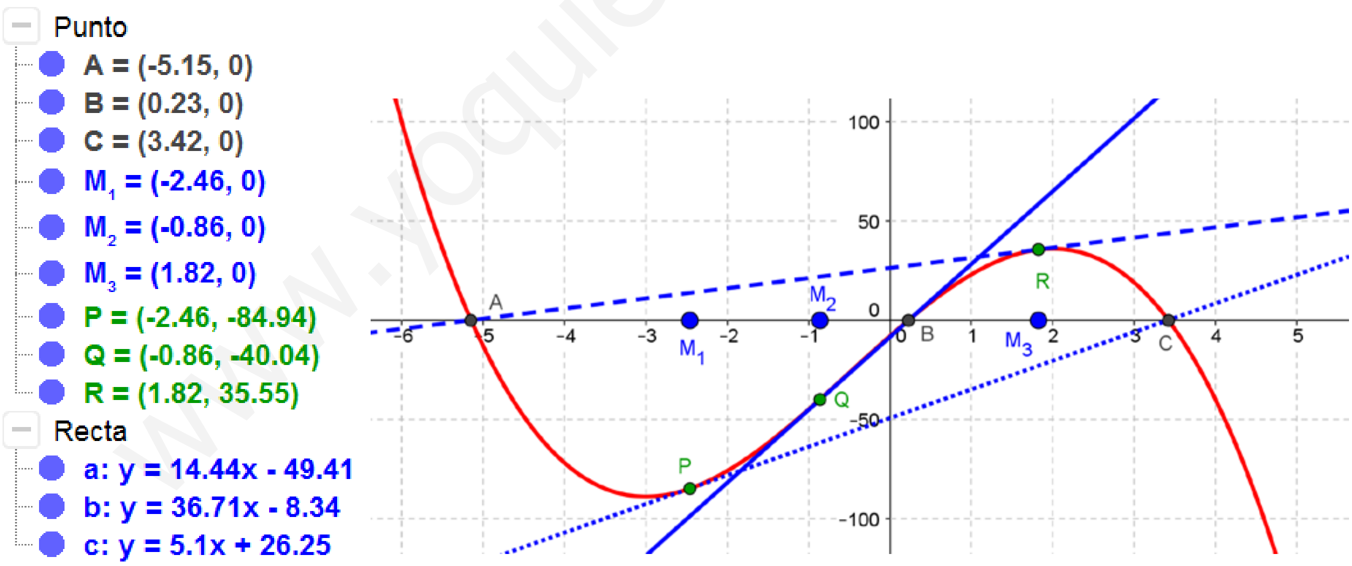
Las rectas tangentes son: En P: y = - 1,13x + 1,69. En Q: y = - 10,13x – 15,19. En R: y = - 4,5x – 13,5.



En las imágenes pueden verse los resultados obtenidos para f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.



Por último, mostramos lo que ocurre con la función f (x) = - $2x^3 - 3x^2 + 36x - 8$.



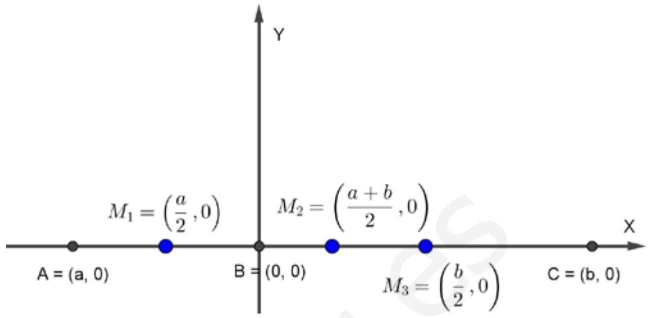
Intentamos probar que:

En las funciones cúbicas con tres raíces reales y distintas, las rectas tangentes en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasan por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Consideramos, sin pérdida de generalidad, una función cúbica con tres raíces reales y distintas, a, 0 y b, es decir, que la gráfica de la función cúbica corta al eje OX en los puntos A (a, 0), B (0, 0) y C (b, 0).

Los puntos del eje OX cuyas abscisas son las medias aritméticas de los puntos anteriores son:

$$M_1\left(\frac{a}{2},\,0\right);\; M_2\left(\frac{a+b}{2},\,0\right)\; y\; M_3=\left(\frac{b}{2},\,0\right)$$



Todo esto puede verse en la imagen adjunta.

La expresión de la función cúbica es f (x) = (x – a) · x · (x – b), es decir, f (x) = x^3 – (a + b) x^2+ abx.

Hallamos las ordenadas de los puntos $P\left(\frac{a}{2},\, f\left(\frac{a}{2}\right)\right);\, Q\left(\frac{a+b}{2},\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\; y\; R\left(\frac{b}{2},\, f\left(\frac{b}{2}\right)\right)$:

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^3-(a+b)\left(\frac{a}{2}\right)^2+ab\frac{a}{2}=\frac{a^3}{8}-\frac{a^3}{4}-\frac{a^2b}{4}+\frac{a^2b}{2}=\ldots=\frac{2a^2b-a^3}{8}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab\frac{a+b}{2}=\ldots=-\frac{(a+b)\,(a-b)^2}{8}$$

$$f\left(\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}\right)^3-(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)^2+ab\frac{b}{2}=\frac{b^3}{8}-\frac{b^3}{4}-\frac{ab^2}{4}+\frac{ab^2}{2}=\ldots=\frac{2ab^2-b^3}{8}$$

La derivada de la función f (x) = x^3 – (a + b) x^2+ abx es f ´ (x) = $3x^2$ – 2(a + b) x + ab.

Veamos que la recta tangente en el punto P coincide con la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\, \frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{a}{2},\, \frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ es:

$$m_P=f\,'\left(\frac{a}{2}\right)=3\left(\frac{a}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a}{2}\right)+ab=\frac{3a^2}{4}-a^2-ab+ab=-\frac{a^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\, \frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0) es:

$$m_{PC}=\frac{y_C-y_P}{x_C-x_P}=\frac{0-\dfrac{2a^2b-a^3}{8}}{b-\dfrac{a}{2}}=\frac{-\dfrac{2a^2b-a^3}{8}}{\dfrac{8b-4a}{8}}=\ldots=-\frac{a^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto P, las rectas coinciden.
Veamos que la recta tangente en el punto Q coincide con la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ es:

$$m_Q=f\,'\left(\frac{a+b}{2}\right)=3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)+ab=\ldots=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0) es:

$$m_{QBC}=\frac{y_B-y_Q}{x_B-x_Q}=\frac{0-\left(-\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)}{0-\dfrac{a+b}{2}}=\frac{\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{8}}{\dfrac{4(a+b)}{8}}=\ldots=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto Q, las rectas coinciden.

Por último, veamos que la recta tangente en el punto R coincide con la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2},\frac{2ab^2-b^3}{8}\right)$ y A (a, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $R\left(\frac{b}{2},\frac{2ab^2-b^3}{8}\right)$ es:

$$m_R=f\,'\left(\frac{b}{2}\right)=3\left(\frac{b}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)+ab=\frac{3b^2}{4}-b^2-ab+ab=-\frac{b^2}{4}.$$

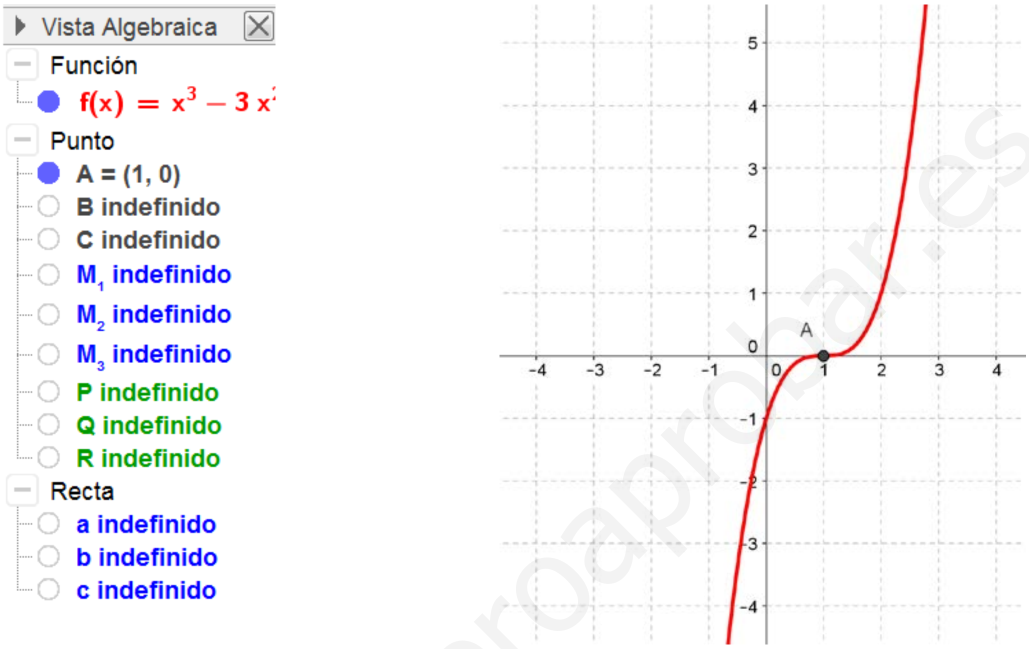
La pendiente de la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2},\frac{2ab^2-b^3}{8}\right)$ y A (a, 0) es:

$$m_{RA}=\frac{y_R-y_A}{x_R-x_A}=\frac{\dfrac{2ab^2-b^3}{8}-0}{\dfrac{b}{2}-a}=\frac{\dfrac{2ab^2-b^3}{8}}{\dfrac{4b-8a}{8}}=\ldots=-\frac{b^2}{4}.$$

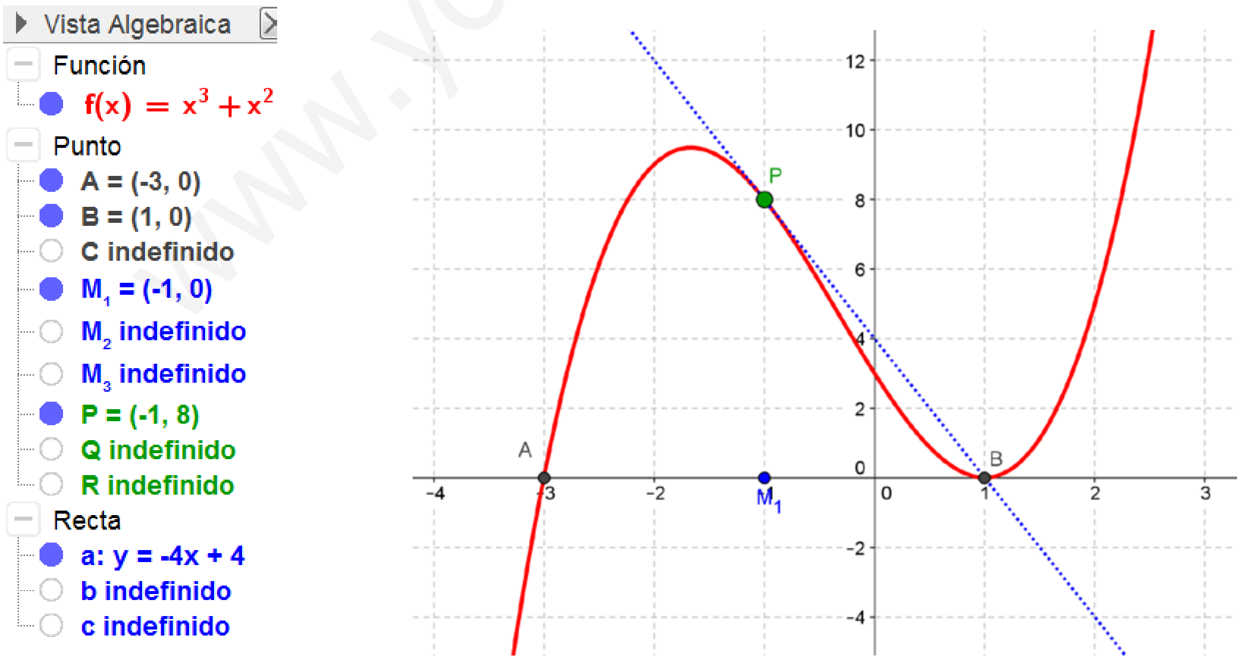
Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto R, las rectas coinciden. Con esto queda probado lo que pretendíamos.

3. Investigamos las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, o (c) una raíz real y dos raíces complejas.

(a) En el caso de una función cúbica con una raíz triple, por ejemplo: $f(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ solo existe un punto de corte (los tres puntos, A, B y C coinciden en uno sólo) y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.



(b) En el caso de una función cúbica con dos raíces reales, una de ellas doble, por ejemplo: $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3$, existen dos puntos de corte, A y B (el tercer punto C ha coincidido con uno de los anteriores), por tanto, existe uno de los puntos M_i con su correspondiente punto sobre la gráfica y su recta tangente que, puede observarse en la imagen que sigue pasa por el punto doble.



(c) En el caso de una función cúbica con una raíz real y dos raíces complejas, por ejemplo, las raíces 3, 2i y – 2i, que dan lugar a la función: f (x) = (x – 3) · (x^2 + 4) = x^3 – 3x^2 + 4x – 12 solo existe un punto de corte y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.