UNIDAD 6: Producto vectorial y mixto. Aplicaciones. Superficie esférica

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 142

1. Halla la ecuación de la recta paralela a $\begin{cases} 3x - y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z + 8 = 0 \end{cases}$ **pasando por el origen de coordenadas.**

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (3,\ -7,\ 8)$. La recta paralela tiene de ecuaciones $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{z}{8}$.

2. Halla el volumen del cubo dos de cuyas caras están sobre los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 2z - 5 =$ **y** $\pi_2 \equiv 2x - 4y + 4z + 14 = 0$**.**

Los planos son paralelos por lo que el lado del cubo es la distancia entre ellos. El lado mide 4, y el volumen es 64 unidades cúbicas.

3. Halla un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{v} = (1,\ -2,\ 3)$ **y** $\vec{w} = (2,\ -1,\ 0)$.

Todos los vectores perpendiculares son de la forma $\vec{v} = (t,\ 2t,\ t)$. Obligando a que su módulo sea la unidad obtenemos los vectores $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y $\vec{w} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

4. Halla el plano que pasa por el punto P (1, 0, 5) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$**. Halla la distancia del punto P a la recta.**

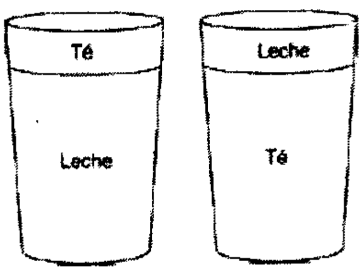
El plano pedido tiene por ecuación x – 1 = 0.

Para hallar la distancia del punto P a la recta, obtenemos el punto de corte del plano anterior con la recta, el punto es B (1, 3, 1) y la distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{PB}$, que es 5 unidades.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 159

1. Leche y té. Un par de amigos se juntan a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

Como comenzamos con dos vasos llenos, el uno de té y el otro de leche, al final la leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. Juego para dos. Dos amigas dicen alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.

Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganará siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

1ª jugada: G dice 2
P dice lo que sea de 1 a 10

2ª jugada: G, el número necesario para sumar 12 o 23
P, el número que sea de1 a 10

3ª jugada: G, el número necesario para sumar 23 o 34
P, el número que sea de 1 a 10

…

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12, 23, 34, 45, 56, 78 u 89.

Penúltima jugada: G dice el número necesario para sumar 89
P, el número que sea de 1 a 10

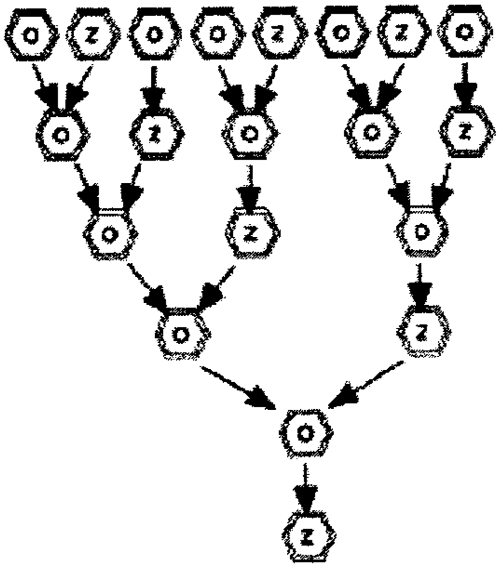
Última jugada: G ice un número de forma que obtiene100

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el primer jugador debe decir un número de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deja l 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al primer jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al primer jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganará la partida.

3. La sucesión de Fibonacci y las abejas. Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tiene madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tiene madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano de la décima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?

En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la secuencia: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… que es a sucesión de Fibonacci.

● En la décima generación anterior a él, un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 55 son hembras. Puede verse en la tabla.

Generación	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

● En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4181 son machos y 6765 hembras.

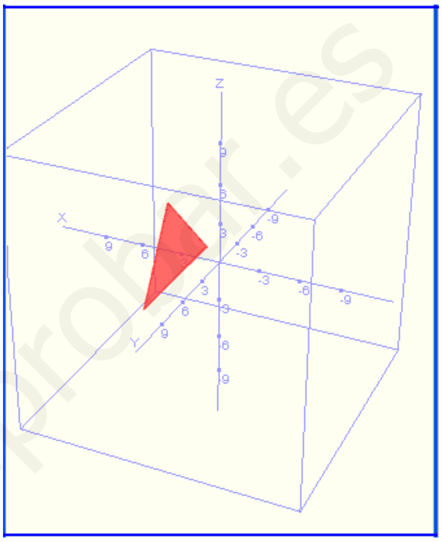
● En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711antecesores.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 161

1. Halla el área del triángulo de vértices A (1, 0, 1), B (2, 4, 6) y C (5, 2, - 4).

Comenzamos por introducir los puntos y después mediante el comando **dibujar3d(triángulo(A,B,C))** hacemos el dibujo del triángulo y con la expresión **área(triángulo(A,B,C))** obtenemos el valor del área que es $\frac{\sqrt{1721}}{2}$ unidades, como podemos ver en las imágenes.

A=punto(1,0,1) → (1,0,1)
B=punto(2,4,6) → (2,4,6)
C=punto(5,2,−4) → (5,2,−4)
dibujar3d(triángulo(A,B,C),{color=rojo,llenar=cierto})
área(triángulo(A,B,C)) → $\frac{\sqrt{1721}}{2}$



2. Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos en los que el plano x + 3y + 5z – 4 = 0 corta a los ejes coordenados.

En primer lugar hallamos los vértices del triángulo, cortando el plano dado con los ejes coordenados y obtenemos los puntos A = (- 4, 0, 0), B = (0, - 4/3, 0) y C = (0, 0, - 4/5).

Después hallamos el volumen del tetraedro, del mismo modo que en la actividad correspondiente del desarrollo, utilizando la fórmula

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$$

siendo los vectores $\overrightarrow{OA} = (-4, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \left(0, -\frac{4}{3}, 0\right)$ y $\overrightarrow{OC} = \left(0, 0, -\frac{4}{5}\right)$ con O el origen de coordenadas.

En la imagen vemos el desarrollo de esta actividad y hemos obtenido que el volumen es $V = \frac{32}{45}$ unidades cúbicas.

$$p = x+3\cdot y+5\cdot z+4=0 \rightarrow x+3\cdot y+5\cdot z+4=0$$
$$r = \text{recta}(y=0, z=0) \rightarrow z=0 \cap y=0$$
$$s = \text{recta}(x=0, z=0) \rightarrow z=0 \cap x=0$$
$$t = \text{recta}(x=0, y=0) \rightarrow y=0 \cap x=0$$
$$A = r \cap p \rightarrow \{(-4,0,0)\}$$
$$B = s \cap p \rightarrow \left\{\left(0,-\frac{4}{3},0\right)\right\}$$
$$C = t \cap p \rightarrow \left\{\left(0,0,-\frac{4}{5}\right)\right\}$$
$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{5} \end{vmatrix} \rightarrow -\frac{64}{15}$$
$$V = \frac{1}{6}\cdot |D| \rightarrow \frac{32}{45}$$

3. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+13=0 \\ 2y+z-4=0 \end{cases}$ **y** $t \equiv \begin{cases} x+4y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

a) Halla la distancia entre las rectas r y s.

b) Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas s y t y es perpendicular a ellas.

a) Para empezar hemos de estudiar la posición relativa de las rectas r y s. En la imagen hemos hallado sus vectores directores v y w y vemos que son proporcionales, por lo que las rectas son paralelas. Para hallar la distancia entre ellas tomamos un punto P = (- 5, 1, 2) de la recta s y hallamos su distancia a la recta r mediante la expresión que vemos en la imagen y obtenemos que esta distancia es $\frac{6\sqrt{29}}{29}$ unidades.

$$r = \text{recta}(2\cdot x+y+2\cdot z+5=0, 2\cdot x-y+z+11=0) \rightarrow 2\cdot x-3\cdot y+17=0 \cap 12\cdot x+16\cdot y+17\cdot z=0$$
$$s = \text{recta}(2\cdot x-3y+13=0, 2\cdot y+z-4=0) \rightarrow 2\cdot x-3\cdot y+13=0 \cap 8\cdot x+14\cdot y+13\cdot z=0$$
$$v = \text{vector}(r) \rightarrow \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$w = \text{vector}(s) \rightarrow \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$P = \text{punto}(-5,1,2) \rightarrow (-5,1,2)$$
$$\text{distancia}(P, r) \rightarrow \frac{6\cdot\sqrt{29}}{29}$$

b) En esta actividad lo que nos pide es hallar la recta perpendicular común a s y t. Procedemos de forma similar a lo que hemos hecho en la actividad desarrollada y obtenemos.

Hallamos los vectores directores de las rectas s y t y el determinante formado por estos vectores y el vector entre un punto de la recta s, por ejemplo P = (- 5, 1, 2), y un punto de t, por ejemplo O = (0, 0, 0), y obtenemos que este determinante es no nulo por lo que las rectas s y t se cruzan.

Hallamos el vector $\vec{u}$ que es perpendicular a s y a t, mediante el producto vectorial de los vectores de s y de t, en la imagen vemos que este vector es $\vec{u}$ = (- 30, 15,- 15).

Para hallar la recta perpendicular común a las rectas dadas hallamos:

- El plano p que contiene a s, su punto P su vector director $\vec{v}$ y el vector $\vec{u}$
- El plano q que contiene a t, su punto Q, su vector director $\vec{w}$, y el vector $\vec{u}$.
- La intersección de estos planos (p ∩ q) es la recta buscada, en la imagen podemos ver que la recta que queríamos hallar tiene por ecuación $\begin{cases} 4x+7y-z+15=0 \\ -2x-11y-7z=0 \end{cases}$

$$v=[1,4,-1]\times[2,-1,1] \rightarrow [3,-3,-9]$$
$$w=[2,-3,0]\times[0,2,1] \rightarrow [-3,-2,4]$$
$$D=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 135$$
$$P=\text{punto}(-5,1,2) \rightarrow (-5,1,2)$$
$$O=\text{punto}(0,0,0) \rightarrow (0,0,0)$$
$$u=v\times w \rightarrow [-30,15,-15]$$
$$p=\text{plano}(P,v,u) \rightarrow 4\cdot x+7\cdot y-z+15=0$$
$$q=\text{plano}(O,w,u) \rightarrow -2\cdot x-11\cdot y-7\cdot z=0$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 164

1. En R^3 consideramos los vectores $\vec{u}=(2,1,-1)$, $\vec{v}=(1,-1,3)$ y $\vec{w}=(3,0,2)$. Halla:

a) $\vec{u}\times\vec{v}$ **b)** $\vec{v}\times\vec{u}$ **c)** $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ **d)** $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Las soluciones son:

a) $\vec{u}\times\vec{v}$ = (2, - 7, - 3)

c) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ = (- 14, - 13, 21)

b) $\vec{v}\times\vec{u}$ = (- 2, 7, 3)

d) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ = (10, - 4, 16)

2. Los vectores $\vec{u}=(2,0,1)$, $\vec{v}=(1,1,2)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$ ¿forman base de R^3? ¿Y los vectores $\{\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v}\times\vec{w},\ \vec{w}\times\vec{u}\}$?

Los vectores dados son linealmente independientes puesto que $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&2\\0&2&1\end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Hallamos los otros vectores y obtenemos $\vec{u}\times\vec{v}$ = (- 1, - 3, 2); $\vec{v}\times\vec{w}$ = (- 3, - 1, 2) y $\vec{w}\times\vec{u}$ = (2, 2, - 4).

Estos vectores son linealmente independientes puesto que $\begin{vmatrix}-1&-3&2\\-3&-1&2\\2&2&-4\end{vmatrix}=16\neq 0$

3. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de R^3 tales que $|\vec{v}|=3$, $|\vec{w}|=4$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=6$. Halla $|\vec{v}\times\vec{w}|$.

$|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot sen\ \alpha$ siendo α el ángulo que forman estos vectores.

Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha$, entonces deducimos que cos α = 1/2 y que sen α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por lo que:

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot sen\ \alpha = 6\sqrt{3}$$

4. Tres vértices de un paralelogramo ABCD son los puntos de coordenadas A (1, 0, 1), B (- 1, 1, 1) y C (2, - 1, 2). Halla las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

En un paralelogramo ABCD se verifica que el punto medio de la diagonal AC es el mismo que el de la diagonal BD. De esta forma obtenemos que las coordenadas del punto D son (4, - 2, 2).

El área del paralelogramo es: $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=|(1,2,1)|=\sqrt{6}\ \ uc.$

5. El plano de ecuación 2x – 3y + z + 6 = 0 corta a los ejes coordenados en tres puntos que son los vértices de un triángulo. Halla su área.

Los vértices del triángulo son A (- 3, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, - 6).

El área del triángulo es $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|(-12,\ 18,\ -6)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 11{,}22\ uc.$

6. Halla un vector director de la recta que siendo paralela a los planos 2x – 3y + z – 5 = 0, x + 2y – 3z + 4 = 0 pase por el punto P (1, 2, 3). Escribe, como intersección de dos planos, la ecuación de esta recta.

Un vector de la recta viene dado por $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (7,\ 7,\ 7)$. La ecuación, como intersección de dos planos, de esta recta es:

$$\begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases}$$

7. Halla la distancia del punto M (1, 4, -1) a cada una de las siguientes rectas:

a) $r\equiv\begin{cases} x-y-z+3=0 \\ 3x+2y+z-5=0 \end{cases}$ **b)** $s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=-z$

a) Tomamos un punto P (0, 2, 1) de la recta y uno de sus vectores $\vec{v}=(1,\ -4,\ 5)$. La distancia del punto M a la recta r viene dada por:

$$\text{d (M, r)} = \frac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{42}} = 1{,}46\ ul.$$

b) Tomamos un punto Q (2, - 1, 0) de la recta y uno de sus vectores $\vec{v}=(3,\ -2,\ -1)$. La distancia del punto M a la recta s viene dada por:

$$\text{d (M, s)} = \frac{\left|\overrightarrow{QM}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{14}} = 4{,}09\ ul.$$

8. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones: $r\equiv\begin{cases} x-z=-2 \\ y-z=-4 \end{cases}$ **y** $s\equiv\begin{cases} x-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

Estas rectas son paralelas.

Para hallar la distancia de r a s tomamos un punto P (- 2, - 4, 0), por ejemplo, de la recta r y hallamos la distancia a la recta s. Para ello tomamos un punto A (0, 0, 0) de la recta s y uno de sus vectores $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$. La distancia del punto P a la recta s viene dada por:

$$\text{d (r, s) = d (P, s)} = \frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = 2\sqrt{2}\ ul.$$

9. Sean los vectores de R³ $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 2, 0)$. Halla:

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ **c)** $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ **d)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Las soluciones son:

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ = 6 · (- 1, 2, 0) = (- 6, 12, 0).

b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ = (7, - 5, - 4) · (- 1, 2, 0) = - 17.

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ = (1, 3, - 2) · (- 2, - 1, 6) = - 17.

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ = (7, - 5, - 4) · (- 2, - 1, 6) = - 33.

10. Halla la ecuación de la recta paralela al plano de ecuación x – y – 2z + 12 = 0 y que sea perpendicular a la recta r en el punto en el que esta se corta con el plano OYZ siendo:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + 4z = -4 \end{cases}.$$

El vector de la recta pedida lo hallamos por el producto vectorial del vector característico del plano y un vector de la recta dada, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (15, -7, 11).$$

El punto de intersección por el que pasa es P (0, 2, -1).

La ecuación de la recta es $s \equiv \dfrac{x}{15} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z+1}{11}$.

11. El plano mediatriz del segmento de extremos A (3, 1, 5) y B (- 1, 7, 3) corta a los ejes coordenados determinando con el origen de coordenadas un tetraedro. Halla su volumen.

El plano mediatriz del segmento tiene por ecuación 2x – 3y + z + 6 = 0

Corta a los ejes coordenados en los puntos A (- 3, 0, 0); B (0, 2, 0) y C (0, 0, - 6).

El volumen del tetraedro es: $\dfrac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 6$ unidades cúbicas.

12. Halla el área del cuadrado que tiene dos de sus lados sobre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}.$$

Estas rectas son paralelas. El lado del cuadrado será la distancia entre ellas.

Para hallar la distancia de r a s tomamos un punto P (2, - 1, 0), por ejemplo, de la recta r y hallamos la distancia a la recta s. Para ello tomamos un punto A (0, 1, 2) de la recta s y uno de sus vectores $\vec{v} = (1, -2, -2)$. La distancia del punto P a la recta s viene dada por:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{50}}{3}.$$

El área del cuadrado es 50/9 u.c.

13. a) Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv x - 1 = 2 - y = z \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = a + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2a + t \end{cases}$$

b) Para a = 3 halla la distancia entre ellas.

13. a) Tomamos tres vectores, uno de cada una de ellas y el otro el que va de un punto de una a otro punto de la otra y estudiamos su posición:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a + 2.$$

Si a $\neq \frac{1}{2}$ entonces las rectas se cruzan y si a = $\frac{1}{2}$ las rectas son secantes.

b) Para a = 3 las rectas se cruzan. Hallamos la distancia entre ellas aplicando la fórmula de la distancia entre rectas que se cruzan:

$$d(r, s) = \frac{\left|\left\{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_r P_s}\right\}\right|}{\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right|} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \text{ unidades.}$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 165

14. Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = y - 2 = z$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$.

Hallamos el plano que contiene a r y a un vector perpendicular común a r y s, y el plano que contiene a s y al mismo vector anterior. Ambas ecuaciones son la recta pedida.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 19y - 25z - 36 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + y + 5z = 0.$$

Por lo que la recta pedida tiene por ecuación $\begin{cases} 2x + 19y - 25z - 36 = 0 \\ 8x + y + 5z = 0 \end{cases}$.

15. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3, 0, 0), es paralela al plano 3x – y + z = 2 y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$**.**

El vector de la recta pedida lo hallamos por el producto vectorial de un vector normal del plano y un vector de la recta dada, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -9, 0).$$

La ecuación de la recta es $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -9t \\ z = 0 \end{cases}$.

16. Halla un punto de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$ **que forme con los puntos B (1, 1, 1) y C (12, -1,**

1) un triángulo de área 50 unidades cuadradas.

Un punto cualquiera de la recta tiene la forma P (1 + 3t, 1 + 4t, 1). El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{50^2 \cdot t^2}.$$

Como el área es 50 obtenemos que t = + 2 y t = - 2. Por tanto hay dos puntos que verifiquen el enunciado y son P (7, 9, 1) y Q (- 5, - 7, 1).

17. Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x = 1 + a\,(y-2) \\ x = z \end{cases} \quad \textbf{y} \quad s:\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax \quad - z = 2a - 2 \end{cases}$$

a) Averigua su posición relativa según los valores de a.

b) Tomando a = 0, determina los puntos P $\in$ r y Q $\in$ s tales que la distancia entre P y Q sea mínima.

a) Para el estudio de la posición relativa de las rectas r y s consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} r:\begin{cases} x - ay \quad = 1 - 2a \\ x \quad - z = 0 \end{cases} \\ s:\begin{cases} \quad y - z = -1 \\ ax \quad - z = 2a - 2 \end{cases} \end{cases}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1-2a \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz ampliada A* vale: det (A*) = $a^2 - 1 =$ (a – 1) (a + 1). Este determinante se anula para a = 1 y a = - 1.

Estudio:

- Si a ≠ - 1 y a ≠ 1, el rango de A es 3 y el rango de A* es 4, las rectas se cruzan.
- Si a = - 1, el rango de A es 3 y el rango de A* es 3, las rectas se cortan en el punto (2, 1, 2).
- Si a = 1, el rango de A es 2 y el rango de A* es 3, las rectas son paralelas.

b) Para a = 0 las rectas se cortan y sus ecuaciones son:

$$r:\begin{cases} x = 1 \\ y = \quad t \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s.\begin{cases} y - z = -1 \\ \quad - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \quad s \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Sean P (1, t, 1) y Q (s, 1, 2) puntos cualesquiera de las rectas r y s, respectivamente.

Sea $\overrightarrow{PQ}\,(s-1,\, 1-t,\, 1)$ el vector que une los puntos P y Q. Este vector tiene que ser ortogonal a los vectores directores de las rectas r y s: $\overrightarrow{u_r} = (0,\, 1,\, 0)\;\; y\;\; \overrightarrow{u_s} = (1,\, 0,\, 0)$.

Imponiendo la condición de ortogonalidad, obtenemos:

$$\begin{cases} (s-1,\, 1-t,\, 1)\cdot(0,\, 1,\, 0) = 0 \\ (s-1,\, 1-t,\, 1)\cdot(1,\, 0,\, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - t = 0 \\ s - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son P_r (1, 1, 1) y Q_s (1, 1, 2). La distancia mínima es:

$$d\left(P_r, Q_s\right) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2} = 1.$$

18. Halla la ecuación de la recta que se apoya en el eje OZ y la recta $s \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3x+z=1 \end{cases}$ y es perpendicular a ellas.

Hallamos el plano que contiene a r y a un vector perpendicular común a r y s, y el plano que contiene a s y al mismo vector anterior. Ambas ecuaciones son la recta pedida.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-5 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 2z + 13 = 0.$$

Por lo que la recta pedida tiene por ecuación $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 3y + 2z + 13 = 0 \end{cases}$.

19. Halla el volumen del paralelepípedo de bases ABCD y EFGH siendo A (6, 0, 0), B (6, 6, 0), C(0, 6, 0) y E (6, 6, 6).

El volumen es $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right]\right| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 216$ unidades cúbicas

20. Un cuadrado tiene dos vértices en los puntos P (2, 1, 3) y Q (1, 3, 1); los otros sobre una recta r que pasa por el punto R (- 4, 7, - 6).

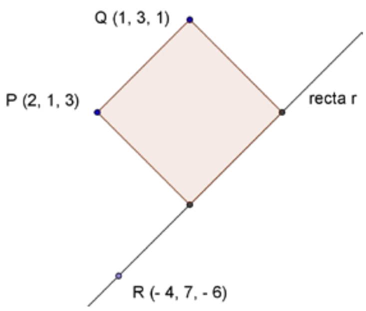
a) Calcula la ecuación de la recta r.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

c) Halla las coordenadas de uno de los dos vértices.

a) La recta r pasa por el punto R (- 4, 7, - 6) y tiene por vector director $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2)$. Su ecuación será:

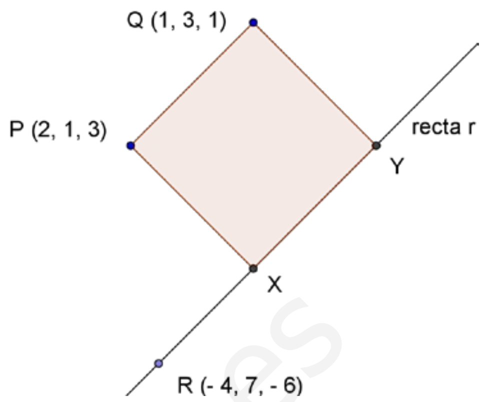
$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+6}{-2}$$



b) El plano que contiene al cuadrado viene determinado por el punto R (- 4, 7, - 6) y los vectores $\overrightarrow{PR} = (-6, 6, -9)$ y $\overrightarrow{QR} = (-5, 4, -7)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+4 & -6 & -5 \\ y-6 & 6 & 4 \\ z+6 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 2z + 3 = 0.$$



c) Uno de los vértices, X, está en r y sus coordenadas pueden ser expresadas en la forma X = (- 4 – t, 7 + 2t, - 6 – 2t); además los vectores:

$$\overrightarrow{PX} = (-t-6,\ 2t+6,\ -2t-9) \ y \ \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 2,\ -2)$$

deben ser perpendiculares, por tanto:

De la condición $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ obtenemos t = - 4 y para este valor el vértice buscado es el punto X (0, - 1, 2).

El otro punto Y = (- s – 4, 7 + 2s, - 6 - 2s) cumple $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}$; es decir:

(- s – 4, 2s + 8, - 2s – 8) = (- 1, 2, - 2) $\Rightarrow$ s = - 3.

Para s = - 3 el último vértices es Y (- 1, 1, 0).

21. Halla, en cada uno de los apartados siguientes, la ecuación de la superficie esférica que:

a) Tiene por centro el punto C (- 2, 3, 5) y radio 4 unidades.

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos P (7, 0, 2) y Q (3, 2, 6).

c) Es concéntrica con la de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 4x – 2y – 6z = 2$ y tangente al plano de ecuación x – 2 y – z + 6 = 0.

d) Pasa por los puntos A (5, - 1, 2), B (0, - 1, - 3), C (3, 3, 2) y D (4, - 1, - 1).

a) La ecuación de la esfera es $(x + 2)^2 + (y – 3)^2 + (z – 5)^2 = 16$.

b) Tiene por centro el punto medio de PQ y su diámetro es la distancia entre P y Q. La ecuación que obtenemos es $(x - 5)^2 + (y – 1)^2 + (z – 4)^2 = 9$.

c) La esfera concéntrica tendrá el mismo centro (- 2, 1, 3) y por radio la distancia del centro al plano tangente, es decir $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Su ecuación es $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 + (z – 3)^2 = \frac{1}{6}$.

d) Hallamos el centro mediante la intersección de los tres planos mediatrices de AB: x + z – 2 = 0; de AC: x – 2y – 2 = 0 y de BD: 2x + z – 2 = 0.

Obtenemos el centro (0, - 1, 2). El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos y obtenemos 5 unidades. La ecuación es: $x^2 + (y +1)^2 + (z – 2)^2 = 25$.

22. Halla el volumen de la esfera tangente a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 2x - 2y + z = 3 \text{ y } \pi_2 \equiv x - y + \frac{1}{2}z = 6.$$

Estos planos son paralelos por lo que la distancia entre ellos es el diámetro de la esfera. Este vale 3 unidades, por lo que el radio es 3/2. El volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}$ unidades cúbicas.

23. Sea la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 12z + 4 = 0$ ¿El plano de ecuación $x - y - z + 7 = 0$ es tangente, secante o exterior a la esfera?

Esta esfera tiene por centro el punto (1, - 1, - 3) y por radio 3 unidades.

Hallamos la distancia del centro al plano dado y obtenemos $4\sqrt{3}$ unidades. Como esta distancia es mayor que el radio de la esfera entonces el plano dado es exterior a la misma.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 166

1. Halla el valor de m para que el tetraedro de vértices el origen de coordenadas y los puntos en los que el plano 6x + 3y + z + m = 0 corta a los ejes coordenados tenga 2 unidades cúbicas de volumen.

Los vértices del tetraedro son los puntos A (- m/6, 0, 0), B (0, - m/3, 0), C (0, 0, - m) y O (0, 0, 0).
El volumen del tetraedro es:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -\frac{m}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = \left|\frac{m^3}{108}\right|.$$

Resolviendo la ecuación $\left|\frac{m^3}{108}\right| = 2 \Rightarrow m = \pm\, 6.$

2. Se considera el plano de ecuación x – 2y + 3z + 9 = 0 y en el un punto P de coordenadas (1, 2, -2). Sea Q la proyección del punto R (1, 1, 2) sobre el plano dado. Halla el área del triángulo PQR.

Hallamos el punto Q, proyección de R sobre el plano dado.

Para ello cortamos el plano con la recta perpendicular a él pasando por R y obtenemos el punto Q.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 9 = 0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Q (0, 3, - 1).}$$

El área del triángulo PQR es $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}\right| = \frac{\sqrt{42}}{2}uc.$

3. ¿Para qué valor de a la recta de ecuación $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 3x+ay+z=1 \end{cases}$ **está contenida en el plano x + y + z + 1 = 0?**

La recta está contenida en el plano si el vector de la misma es perpendicular al vector normal al plano, por lo que (3 + a, - 4, a - 9) · (1, 1, 1) = 0, de donde a = 5.

4. Sea el cuadrado de centro el punto C (1, 1, - 1) y uno de cuyos lados esta en la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ z=1 \end{cases}$..

Halla el plano en el que se encuentra el cuadrado y el área del mismo.
El cuadrado está en el plano que contiene a la recta y al punto dado., 2x – 2y – z – 1 = 0.

Para hallar el área hallamos el lado que será doble de la distancia de C a la recta. Para hallar la distancia del punto C a la recta tomamos un punto P de la recta y un vector director, por ejemplo P (1, 0, 1) y $\vec{v} = (1,\ 1,\ 0)$

El lado mide 2 · d(C, r) = $2 \cdot \dfrac{\left|\overrightarrow{CP} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = 3\sqrt{2}$.

El área del cuadrado es 18 uc.

5. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-3z=6 \\ y-z=2 \end{cases}$ **y el plano** $\pi \equiv x+2y+3z=1$**. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano π dado, que pase por el punto P (1, 2, - 1) y corte a la recta r perpendicularmente.**

El vector de la recta pedida lo hallamos por el producto vectorial de un vector normal del plano y un vector de la recta dada, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -3).$$

Las ecuaciones de la recta son $s \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

6. Dos vértices de un triángulo ABC son los puntos A (0, 3, 2) y B (- 1, 1, 1). El vértice C es el punto de corte de la recta que pasando por A corta perpendicularmente a $r \equiv \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$**. Halla este vértice C y el área del triángulo.**

El vértice C es el punto de corte del plano perpendicular a la recta pasando por A con la recta dada:

$$\begin{cases} z-2=0 \\ x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{C (4, 2, 2).}$$

El área del triángulo ABC viene dada por $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{7\sqrt{2}}{2}\ uc.$

7. Halla las coordenadas del punto B de la recta $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas O y del punto A (- 4, 2, 2).

El punto B es el punto de corte del plano mediatriz de OA con la recta:

$$\begin{cases} 2x-y-z+6=0 \\ \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{3} \end{cases}$$

De aquí obtenemos el punto B (3, 7, 5).

8.a) Estudia, según los valores de m, la posición relativa de las rectas $s \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+mt \\ z=1+2mt \end{cases}$ **;** $t \equiv eje\ OZ.$

b) Para m = 1 halla la perpendicular común a s y a t.

c) Para m = -2 halla la distancia entre estas rectas s y t.

a) Para m = 2 son secantes y para m $\neq$ 2 las rectas se cruzan.

b) Para m = 1 las rectas se cruzan.

Hallamos el plano que contiene a s y a un vector perpendicular común a s y t, y el plano que contiene a t y al mismo vector anterior. Ambas ecuaciones son la recta pedida.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+2y-5z-1=0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+y=0.$$

Por lo que la recta pedida tiene por ecuaciones $\begin{cases} 2x+2y-5z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

c) Para m = - 2 las rectas se cruzan d(s, t) = $\dfrac{\left|\left[\vec{v_s}, \vec{v_t}, \overrightarrow{P_sP_t}\right]\right|}{\left|\vec{v_s} \times \vec{v_t}\right|} = \dfrac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$ unidades

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta:

$$x = \frac{y+3}{2} = 2 - z$$

Hallamos el plano que pasa por A y es perpendicular a la recta dada, lo cortamos con la recta y obtenemos el punto B. La recta que buscamos es la que pasa por A y B.

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1} \end{cases} \Rightarrow \text{ B (2, 1, 0).}$$

La recta AB tiene por ecuaciones $1 - x = y - 2 = z - 1$.

10. Sean los vectores $\vec{u} = (b, -1, 4)$ y $\vec{v} = (1, 3, a)$.

a) Halla a y b para que esos vectores sean ortogonales y el módulo del primero sea $\sqrt{42}$.

b) Para a = 0 y b = 5 halla el área del paralelogramo que tiene estos vectores por lados.

a) Se ha de verificar: $\begin{cases} (b, -1, 4) \cdot (1, 3, a) = 0 \\ \sqrt{b^2 + (-1^2) + 4^2} = \sqrt{42} \end{cases}$.

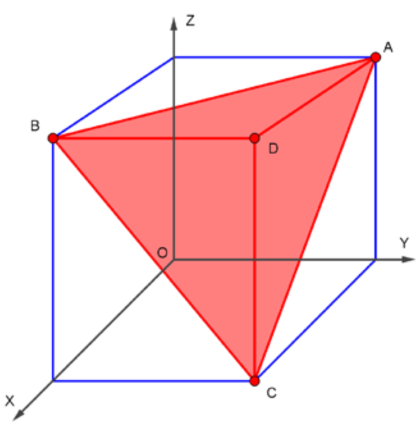
Obtenemos dos soluciones: a = - 1/2 y b = 5; a = 2 y b = - 5.

b) Área = $|(5,-1,4) \times (1,3,0)| = 2\sqrt{104}\ uc.$

11. Halla el área del tetraedro de vértices A (0, 3, 3), B (3, 0, 3), C (3, 3, 0) y D (3, 3, 3).

Este tetraedro tiene tres caras triángulos rectángulos y la cuarta cara ABC que es un triángulo equilátero.

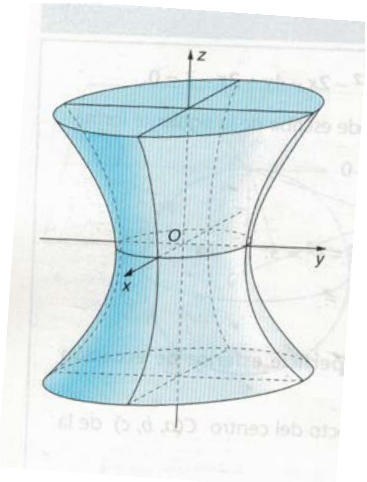
El área de cada uno de los triángulos rectángulos es 9/2 y la del equilátero es $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Por tanto el área total del tetraedro es $\dfrac{27 + 9\sqrt{3}}{2}\ uc.$



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 167

Las cuádricas

Conocemos algunos cuerpos geométricos: el cilindro, el cono y la esfera, pero hay otros cuerpos como el balón de rugby, las chimeneas de las centrales térmicas, los radiotelescopios y algunas obras arquitectónicas que están limitados por superficies diferentes a los anteriores. Estas superficies son las cuádricas y están engendradas por las cónicas.



Las cuádricas son superficies que se pueden representar en un sistema cartesiano OXYZ mediante una ecuación de segundo grado de la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00}=0$$

Las cuádricas son en el espacio lo que las cónicas en el plano. Son superficies cuya intersección con los planos coordenados son cónicas: elipses, hipérbolas o parábolas.

Una de las cuádricas es el hiperboloide de una hoja que es la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

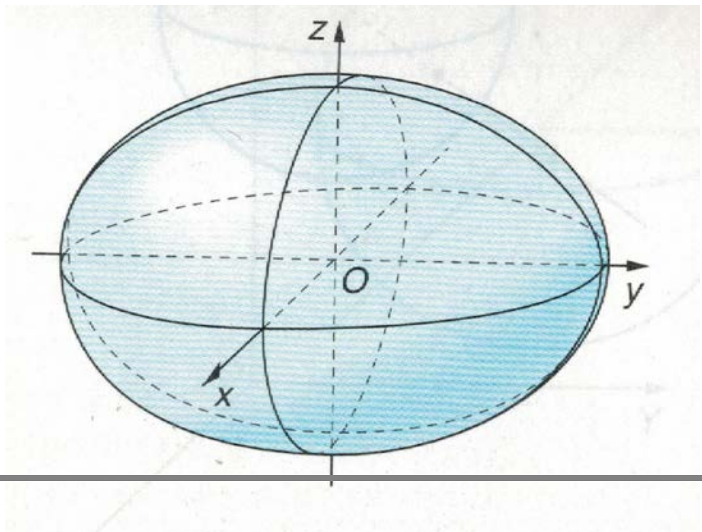
Como puede verse en el dibujo corta al eje OX en x = $\pm$a, al eje OY en y = $\pm$b y no corta al eje OZ. Además su intersección con los planos coordenados OYZ y OXZ da lugar a hipérbolas y con el plano OXY a elipses.

Investiga sobre otras cuádricas, aspectos como: clasificación, ecuaciones reducidas, secciones, puntos, rectas y planos notables asociados (centros, ejes, vértices…), descripción, aplicaciones en la arquitectura, ingeniería, etc.

Mostramos algunos de los aspectos más reseñables de las principales cuádricas.

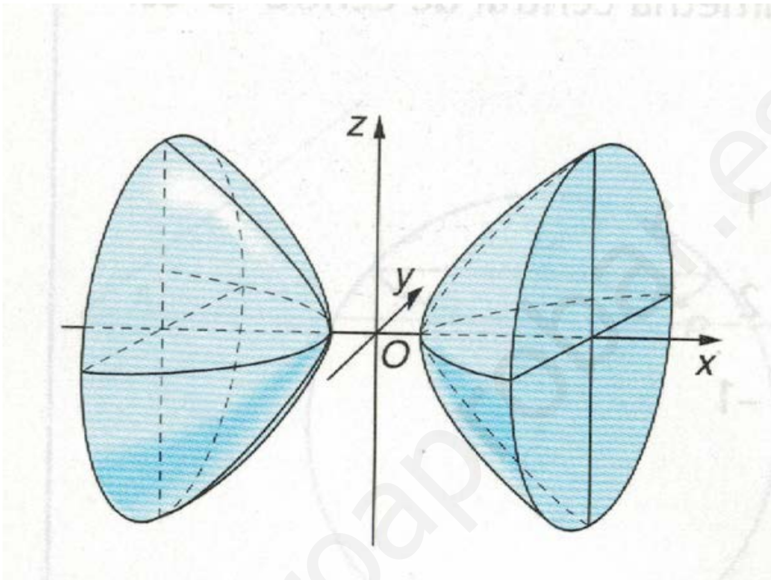
El elipsoide es la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Como puede verse en el dibujo corta al eje OX en x = $\pm$a, al eje OY en y = $\pm$b y al eje OZ en z = $\pm$c. Además su intersección con los planos coordenados OYZ, OXZ y OXY da lugar a elipses.



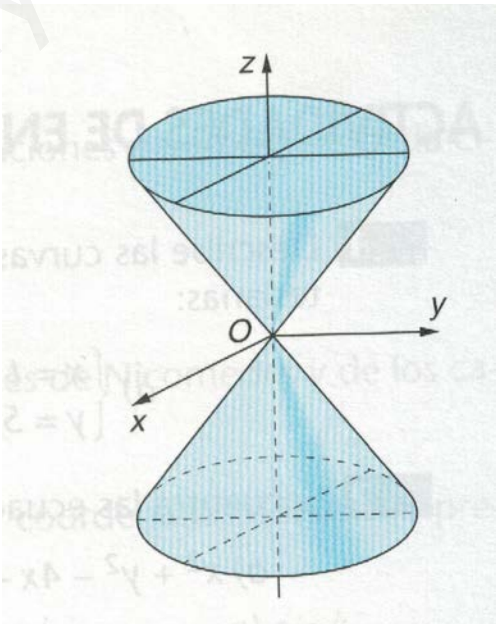
El hiperboloide de dos hojas es la superficie de ecuación $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

Como puede verse en el dibujo corta al eje OX en x = $\pm$a y no corta al eje OY ni al eje OZ. Además su intersección con los planos coordenados OXY y OXZ son hipérbolas y con OYZ son elipses.



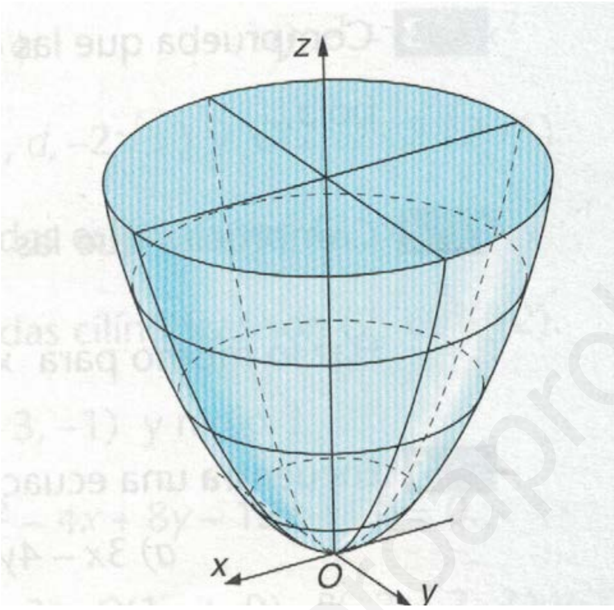
El cono cuadrático es la superficie de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

Como puede verse en el dibujo corta a los ejes coordenados en el origen de coordenadas. Además su intersección con planos paralelos a OXY da lugar a elipses y con planos paralelos a OYZ da lugar a hipérbolas.



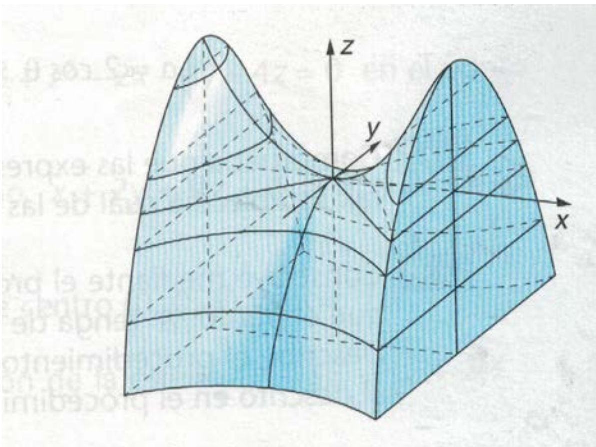
El paraboloide elíptico es la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2c\,z=0.$

Como puede verse en el dibujo corta a los ejes coordenados en el origen de coordenadas. Además su intersección con planos paralelos a OXY da lugar a elipses, con planos paralelos a OYZ y a OXZ da lugar a parábolas.



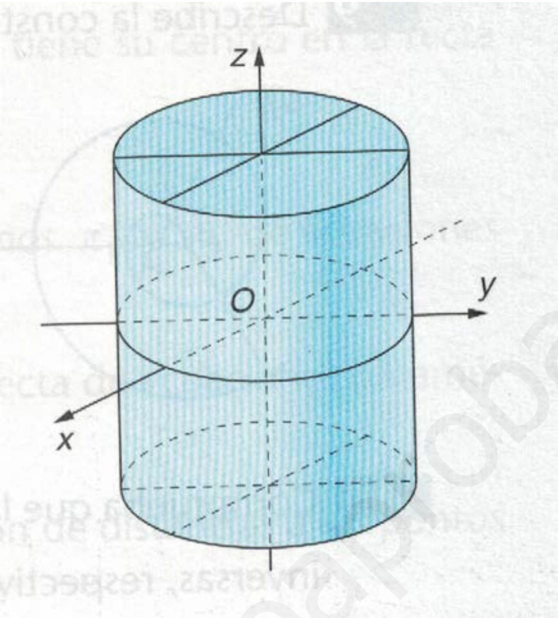
El paraboloide hiperbólico es la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2c\,z=0.$

Como puede verse en el dibujo corta a los ejes coordenados en el origen de coordenadas. Además su intersección con planos paralelos a OXY da lugar a hipérbolas y con planos paralelos a OYZ y a OXZ da lugar a parábolas.



El cilindro elíptico es la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

Sus secciones con planos paralelos al plano OXZ son elipses.



También tenemos el **cilindro circular, cilindro hiperbólico** y **cilindro parabólico.**