UNIDAD 4: Geometría afín del espacio

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 94

1. Sea la recta de ecuaciones paramétricas x = 2 - t; y = 3 + 2t. Escribe la ecuación de esta recta en forma continua, general y explícita.

Las ecuaciones de la recta son:

Continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2}$.

General: 2x + y – 7 = 0.

Explícita: y = - 2x + 7.

2. En el plano afín consideramos los vectores $\vec{u} = (2, -3)$; $\vec{v} = (6, 4)$ y $\vec{w} = (-5, 12)$. Halla: $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$; $3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$; $|\vec{w}|$; el producto escalar de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Los resultados son:

$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ = (13, - 11)

$3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$ = (- 6, - 17)

$|\vec{w}|$ = 13

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 18$

El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 90º.

3. Estudia, según los valores de a, la posición relativa de cada uno de los pares de rectas:

a) $\begin{cases} r \equiv ax + y = 1 \\ s \equiv x + ay = a^2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r \equiv x + ay = 2 \\ s \equiv \frac{x-2}{a} = y \end{cases}$

Las posiciones de las rectas son:

a) Para a = 1 son coincidentes; para a = - 1 son paralelas y para el resto de valores son secantes.

b) Son paralelas para cualquier valor de a.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 109

1. Sumas. Demuestra: $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{999\cdot 1001}=0,\overline{498501}$.

El término general de la sucesión formada por los sumando es $\dfrac{1}{(2n-\ )\,(2n+1)}$.

Descomponiendo este en fracciones simples, obtenemos: $\dfrac{1}{(2n-\ )\,(2n+1)}=\dfrac{1/2}{2n-1}+\dfrac{-1/2}{2n+1}$.

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1/2}{3}+\frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1/2}{5}+\frac{-1/2}{7}$$

... ...

$$\frac{1}{997\cdot 999}=\frac{1/2}{997}+\frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{999}+\frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

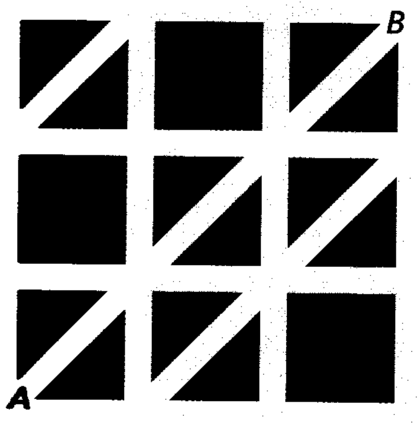
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{1001}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}=\frac{1000}{2001}=\frac{500}{1001}=0,\overline{498501}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dedo en forma de fracción:

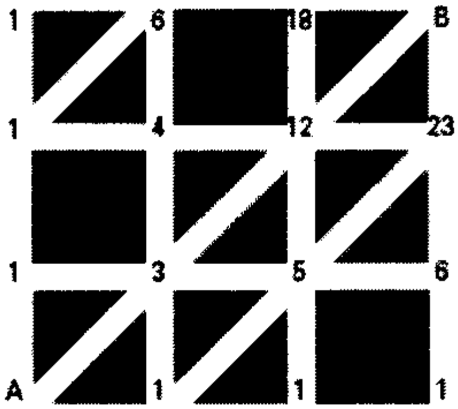
$$0,\overline{498501}=\frac{499500}{999999}=\frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37}=\frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. Plano de ciudad. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?



Queda del siguiente modo:



Solamente consideramos los caminos en vertical hacia arriba que denominamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontal hacia la derecha que denotamos con H.

En la figura señalamos el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos. Así en el cruce que hay un 3 se llega a el desde A por tres caminos V-D-H; en el cruce que hay 5 = 3 + 1 + 1, se llega a el por cinco caminos: HHV-HD-DH-VH-HVH.

Observamos que el número que hay en cada cruce es suma de los que de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado se abierto.

3. Trama triangular. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.

Procediendo de forma análoga a las del problema de la página anterior, obtenemos:

	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Total
Trama n = 2	1					1
Trama n = 3	3					3
Trama n = 4	6	1				7
Trama n = 5	10	3				13
Trama n = 6	15	6	1			22
Trama n = 7	21	10	3			34
Trama n = 8	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea n par o impar.

● Si n es par, obtenemos la sucesión: 1, 7, 22, 50, 95, 161…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24}$$

● Si n es impar, obtenemos la sucesión: 3, 13, 34, 70, 125…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{(n-1) \cdot (n+1) \cdot (2n-3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24} & si\ n\ es\ par \\ \dfrac{(n-1) \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{24} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

● En una trama de lado n hay:

I. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28… = $\binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con n ≥ 2.

II. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con n ≥ 4.

III. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-4}{n-6}$ triángulos de lado 3 con n ≥ 6.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con k = 1, 2,…, n; siendo k el número de unidades de lado.

4. Primos. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

4. Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = \dot{24}$, siendo p y q número primos mayores que 3.

Para demostrarlo, vemos primero que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1 = \dot{24}$.

Sabemos que $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$. Los números están colocados: p – 1, p (primo) y p + 1.

Como p es primo, p – 1 y p + 1 son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4, pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4.

También (p – 1) o (p + 1) han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos.

Por tanto, se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{24}$.

Además como: $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad p^2 - q^2 = \dot{24} - \dot{24} = \dot{24}$.

Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. Tablero de ajedrez. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

Partimos del siguiente cuadro:

TIPO DE TABLERO	TIPOS DE RECTÁNGULOS										TOTAL
	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4	2 x 2	2 x 3	2 x 4	3 x 3	3 x 4	4 x 4	
1 x 1	1										1
2 x 2	4	4			1						9
2 x 3	9	12	6		4	4		1			36
4 x 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 x 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

1, 9, 36, 100, 225, 441…

$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2$…

En un tablero 8x8, que es un tablero de ajedrez, hay $36^2 = 1296$ rectángulos.

Si nos quedamos solo con los no cuadrados, habría 1296 – 204 cuadrados = 1092 rectángulos no cuadrados en un tablero 8x8.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 111

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en las rectas r y s, de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = -z \ \textbf{y} \ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Comenzamos por estudiar la posición relativa de estas rectas. Para ello escribimos el determinante cuyas filas son los vectores directores de ambas y por el vector entre un punto de r y otro de s. En la imagen vemos que este determinante es distinto de cero por lo que las rectas se cruzan en el espacio.

Para hallar la recta pedida hallamos el plano p que contiene a r y al punto O y obtenemos la ecuación y + 3z = 0; después hallamos el plano q que contiene a s y al punto O y obtenemos - x – y = 0.

La recta tendrá por ecuación la intersección de ambos planos y obtenemos $\begin{cases} -x+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ como vemos en la imagen.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow -8$$

O :=punto(0,0,0) → punto(0,0,0)
A :=punto(−1,0,0) → punto(−1,0,0)
v=[2,3,−1] → [2,3,−1]
OA=[−1,0,0] → [−1,0,0]
p=plano(O,v,OA) → $y+3\cdot z=0$
B :=punto(0,0,2) → punto(0,0,2)
w=[1,−1,1] → [1,−1,1]
OB=[0,0,2] → [0,0,2]
q=plano(O,w,OB) → $-x-y=0$
r=p∩q → $\{-x+3\cdot z=0 \cap x+y=0\}$

2. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x+3}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1} \text{ y } s \equiv \left\{\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=z-2\right..$$

Las rectas dadas son paralelas. Hallamos el plano que las contiene tomando un punto de una de ellas, en este caso hemos tomado el punto P (- 3, 0, 1) de la recta r, el vector de una de ellas, en este caso el vector v de la recta r y el vector formado por el punto P de r y un punto Q (0, 2, 2) de s, en este caso PQ = (3, 2, 1).

El plano buscado tiene por ecuación 5x – y – 13 z + 28 = 0

P :=punto(−3,0,1) → punto(−3,0,1)
Q :=punto(0,2,2) → punto(0,2,2)
v=[−2,3,−1] → [−2,3,−1]
PQ=[3,2,1] → [3,2,1]
p=plano(P,v,PQ) → $5\cdot x-y-13\cdot z+28=0$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 114

1. En R^3 consideramos los puntos P (3, - 1, 2) y Q (2, 0, 3).

a) Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

b) Halla las coordenadas del punto R de modo que el vector $\overrightarrow{RS}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{PQ}$ siendo S (2, 4, 1).

c) Halla las coordenadas del punto A de modo que el vector $\overrightarrow{BA}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{QP}$ siendo B (0, 1, 3).

Las soluciones son:

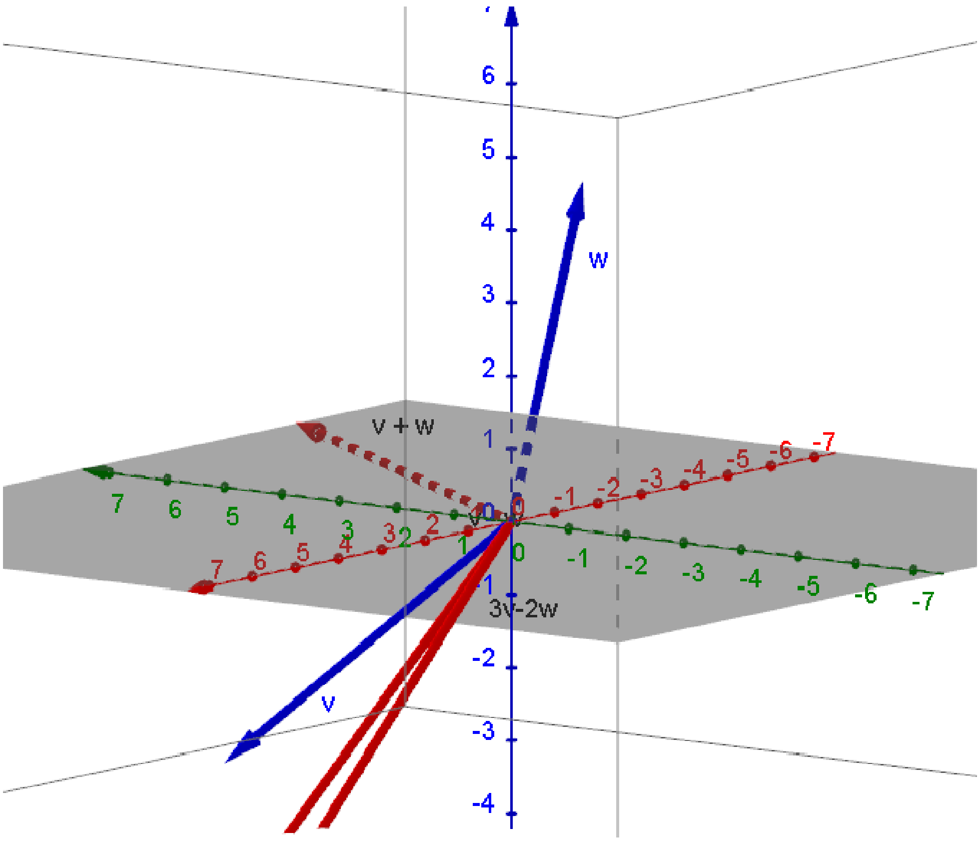
a) Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ = (- 1, 1, 1) y $\overrightarrow{QP}$ = (1, - 1,- 1).

b) El punto R (3, 3, 0).

c) El punto A (1, 0, 2)

2. Sean los vectores libres $\vec{v} = (4,\ 2, -3)$ y $\vec{w} = (1, -2,\ 5)$. Dibuja estos vectores y los vectores $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{v} - \vec{w}$. Halla las coordenadas del vector $3\vec{v} - 2\vec{w}$

Los dibujos de los vectores pedidos pueden verse en el gráfico:



Los vectores $\vec{v} = (4,\ 2, -3)$ y $\vec{w} = (1, -2,\ 5)$ están dibujados en color azul.

Los vectores $\vec{v} + \vec{w} = (5,\ 0,\ 2)$; $\vec{v} - \vec{w} = (3,\ 4,\ -8)$ y $3\vec{v} - 2\vec{w}$ = (10, 10, -19) están dibujados en color rojo.

3. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2\vec{v} - \vec{w} = (4,\ 1,\ 3) \\ \vec{v} + 3\vec{w} = (2,\ 4,\ -2) \end{cases}$

La solución del sistema son los vectores $\vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w} = (0,\ 1,\ -1)$.

4. La base canónica de R³ esta formada por los vectores $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ y $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Comprueba que es una base y halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (8,\ -2,\ 5)$ respecto a esa base.

Es una base porque son vectores de R³ linealmente independientes.

Las coordenadas del vector dado respecto a esa base son 8, - 2 y 5, respectivamente.

5. ¿Los vectores $\vec{u} = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{v} = (2,\ 3,\ 5)$ y $\vec{w} = (1,\ 3,\ 2)$ forman base de R³? En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{r} = (4,\ 13,\ 5)$ respecto a ella.

Forman base porque son vectores de R³ linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Las coordenadas, x, y, z, del vector dado respecto a esta base vienen dadas por:

$(4,\ 13,\ 5)$ = x · $(1,2,1)$ + y · $(2,3,5)$ + z · $(1,3,2)$ y son (2, -1, 4).

6. ¿Para qué valores de b los vectores $\vec{u} = (2,b,1)$, $\vec{v} = (3,2,b)$ y $\vec{w} = (1,-1,2)$ forman base de R³?

Para que formen base se debe cumplir que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & b \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = b^2 - 4b + 3 \neq 0$; es decir forman base para todos los valores de b excepto b = 3 y b = 1.

7. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, - 1, 3) y uno de sus vectores directores es $\vec{u} = (-1, 2,\ 4)$.

Las ecuaciones de la recta son:

Vectorial: (x, y, z) = (2, - 1, 3) + t · (- 1, 2, 4).

Paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ General: $\begin{cases}2x+y-3=0\\ 2y-z+5=0\end{cases}$

8. Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos P (1, 2, 3) y Q (2, - 3, 2). Halla un punto alineado con P y Q.

Las ecuaciones de la recta son:

Paramétricas: $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-5t\\ z=3-t\end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{-1}$

Otro punto alineado con P y Q es, por ejemplo, A (3, - 8, 1).

9. Escribe, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de la recta dada por: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=z$

Las ecuaciones de la recta son:

Vectorial: (x, y, z) = (0, - 2, 0) + t · (2, - 3, 1)

Paramétricas: $\begin{cases}x=2t\\ y=-2-3t\\ z=t\end{cases}$

General: $\begin{cases}x-2z=0\\ y+3z-2=0\end{cases}$

10. Dada la recta r como intersección de dos planos $r\equiv\begin{cases}x+2y-z=3\\ 2x-y+z=4\end{cases}$ **, halla dos puntos de esta recta y uno de sus vectores directores.**

Los puntos pueden ser P (0, 7, 11) y Q (1, 4, 6) y un vector (1, - 3, - 5).

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta:

$$r\equiv\begin{cases}x=2t\\ y=-3+2t\\ z=4-t\end{cases}.$$

La ecuación continua es $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ y la general $\begin{cases}x-y=0\\ y+2z=0\end{cases}$.

12. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P (2, - 3, 5) y es paralela al eje OZ.

Una ecuación general es $\begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 115

13. Halla, en todas las formas que conozcas, la ecuación del plano en cada uno de los siguientes apartados:

a) Que pasa por el punto A (2, - 1, 3) y dos de sus vectores directores son $\vec{v}=(-1,2,4)$ **y** $\vec{w}=(2,0,-1)$**.**

b) Que pasa por los puntos P (2, - 1, 1), Q (2, 3, 0) y R (1, – 2, - 1).

c) Que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $\frac{x-1}{2}=y+1=-z$**.**

d) Que pasa por el punto A (2, - 3, 5) y es paralelo al plano de ecuación 3x – y + z – 6 = 0.

a) La ecuación del plano es 2x – 7y + 4z – 23 = 0.

b) La ecuación del plano es 9x – y - 4z – 15 = 0.

c) La ecuación del plano es x + y + 3z = 0.

d) La ecuación del plano es 3x + y + z – 14 = 0.

14. Halla las ecuaciones de los ejes y de los planos coordenados.

Eje OX $\equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; eje OY $\equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ y eje OZ $\equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Las ecuaciones de los planos son: OXY $\equiv z=0$, OXZ $\equiv y=0$ y OYZ $\equiv x=0$.

15. Halla la ecuación general del plano de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=3-t+2s \\ y=1+t-2s \\ z=2-s \end{cases}$

La ecuación del plano es x + y – 4 = 0.

16. a) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos P (2, - 6, 1), Q (- 1, 3, 2) y es paralelo al eje OX.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \quad \textbf{y} \quad s\equiv\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+4t \\ z=3+6t \end{cases}$$

Las soluciones son:

a) La ecuación del plano es $y - 9z + 15 = 0$.

b) Las rectas dadas son paralelas. Por tanto hallamos la ecuación del plano tomando un punto de una de ellas, un vector de una de ellas y el vector entre un punto de una de ellas y un punto de la otra.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 0$$, es decir $17x - 7y - z - 38 = 0$.

17. Estudia las posiciones relativas de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ 5x+y+4z=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ y-2z=1 \\ 2x+5y+4z=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+z=1 \\ 2x+y-2z=10 \\ x-2y-z=-5 \end{cases}$

Las soluciones son:

a) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4y+z=5 \end{cases}$.

b) Los planos se cortan dos a dos en sendas rectas.

c) Los planos se cortan en el punto de coordenadas (1, 4, -2).

18. Determina, en cada apartado, la posición relativa de la recta y el plano dados:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t+1 \\ z = t \end{cases}$ $\pi \equiv 3x + 2y - 11z - 5 = 0$

b) $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{2}$ $\pi \equiv 2x - y - 4z = 0$

Las soluciones son:

a) Son secantes. Se cortan en el punto de coordenadas (6, 10, 3).

b) La recta es paralela al plano.

19. Estudia, según los valores de a, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \quad \textbf{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+3t \\ z = -4+5t \end{cases}$$

Para a = 1 son secantes. Para a $\neq 1$ se cruzan en el espacio.

20. ¿Para que valor de m los siguientes planos se cortan dando una recta?:

$\pi_1 \equiv 2x - y + z = 3$ **;** $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$ **;** $\pi_3 \equiv 3x - y - mz = 4$ **?**

En este caso halla la ecuación de la recta.

Para m = - 1 se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$.

Para m $\neq$ -1 se cortan dando un punto.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 116

1. Halla la ecuación de la recta paralela a los planos $\pi_1 \equiv 3x + 2y - z = 2$; $\pi_2 \equiv 2x - z = 4$ y que pase por el punto P (0, 2, -1).

La ecuación es $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$.

2. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0 \\ 2y = 3 - z \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$.

Hallamos la ecuación del plano tomando un punto de la recta, uno de sus vectores directores y un vector director de la paralela. Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$, es decir 12x + 7y – z – 30 = 0

3. Se consideran las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = m - z$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

a) Discute en función de *m* la posición relativa de las rectas.

b) Para m = 14 halla la ecuación del plano que las contiene.

Las respuestas son:

a) Para m = 14 son secantes. Para m $\neq$ 14 se cruzan.

b) Para m = 14 son secantes y el plano que las contiene es $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, es decir,

2x - 5y – z + 12 = 0.

4. Encuentra la ecuación de la recta contenida en el plano x – y = 0 y en el plano paralelo a 2x- 3y + z = 4 y que pase por el punto P (1, 1, 3).

La recta tendrá por ecuaciones $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x-y=0 \end{cases}$.

5. Tres vértices de un paralelogramo ABCD son los puntos A (1, 1, 6), B (2, 3, 7) y C (0, - 6, 0). Halla las coordenadas del cuarto vértice y la ecuación del plano que contiene a este paralelogramo.

Lo podemos hacer mediante vectores, ya que el vector $\overrightarrow{AD}$ es equipolente al $\overrightarrow{BC}$ de donde obtenemos que el punto D tiene de coordenadas (- 1, - 8, - 1). También podemos resolverlo sabiendo que el punto medio del segmento AC es el mismo que el de BD.

La ecuación del plano que contiene al paralelogramo es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-6 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + z - 6 = 0.$$

6. Discute, según los valores de *a*, la posición relativa de los planos $\begin{cases} 2x-5y+3z-1=0 \\ x+3y+(1-a)z=0 \\ 3x-ay+2z=a-1 \end{cases}$ **.**

Para a = 2 los planos se cortan dando una recta. Para a = 5 los tres planos no tienen nada en común, se cortan dos a dos en sendas rectas. Para a $\neq$ 2 y a $\neq$ 5 los planos son secantes, se cortan en un punto.

7. ¿Existen valores de a y b para los cuales los planos $\pi_1 \equiv ax-2y+bz=4$ **;** $\pi_2 \equiv 2x+4y+az=-2$ **son paralelos?**

Se tienen que verificar las igualdades $\frac{a}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{b}{a}$. Obtenemos a = - 1 y b = 0,5.

8. Dos rectas en el espacio que sean coplanarias ¿qué posiciones pueden tener? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

Pueden ser paralelas, secantes o coincidentes.

9. Sea el tetraedro de vértices A (1, 2, 0), B (2, 6, 0), C (5, 3, 0) y D (3, 4, 3).

a) ¿Los puntos medios de las aristas AB, BD, CD y CA están en el mismo plano? En caso afirmativo halla su ecuación.

b) El plano anterior ¿cómo es respecto a la recta que contiene a la arista AD?

a) Si están en el mismo plano. Este tiene por ecuación 6x + 6y – 8z – 33 = 0.

b) La recta que contiene a la arista AD tiene por ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ y esta recta es paralela al plano anterior.

10. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $\begin{cases} y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ y que pase por el punto de intersección de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = -y = \dfrac{z+1}{2}$ con el plano x + z = 7 + y.

El punto de intersección de la recta r con el plano dado tiene de coordenadas (5, - 1, 1).

La recta pedida es $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 - 3t. \\ z = 1 + t \end{cases}$

11. ¿Para qué valores de a y b el plano $\pi \equiv$ 3x – y + az = b contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$?

Para que el plano contenga a la recta debe contener todos sus puntos. Hallamos dos puntos de la recta. Por ejemplo, P (1, 0, 3) y Q (1, 1, 4). Obligando al plano a que pase por ellos obtenemos: a = 1 y b = 4.

12. Sea el cuadrado de centro en el punto C (1, 1, - 1) y tiene uno de sus lados en la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que contenga a este cuadrado.

El plano contendrá al punto y a la recta dados y tendrá por ecuación: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, es decir, 2x - 2y – z - 1 = 0.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 117

Espirales

Una **espiral** es una curva plana generada por un punto que se desplaza alrededor de otro punto llamado centro y gira alrededor de él.

Una espiral queda determinada por el ángulo de giro y la distancia desde al centro, situado en el vértice del ángulo.

Hay distintos tipos de espirales y algunas de las más importantes por su presencia en la naturaleza y en el arte son:

- Espirales de dos, tres o más centros.
- Espiral de Arquímedes.
- Espiral logarítmica.
- Espiral hiperbólica.
- Espiral de Durero.

En el dibujo tenemos una espiral de tres centros construida a partir de un triángulo equilátero ABC y prolongando sus lados. Haciendo centro en A y con radio la longitud del lado del triángulo trazamos un arco de circunferencia. Haciendo centro en B y con radio el doble del anterior trazamos otro arco y con centro en C y radio triple del primero trazamos otro arco, como muestra la figura.
Investiga en esta espiral cuanto mide el ángulo en cada uno de estos arcos.

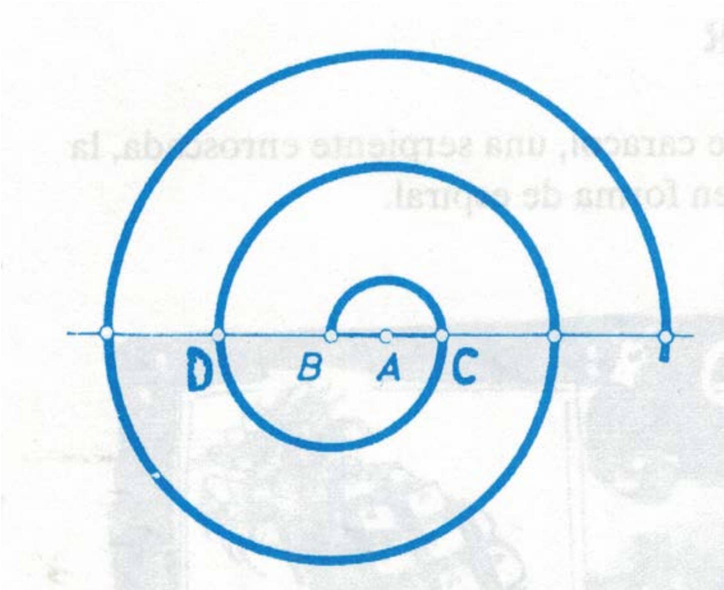
Investiga sobre estas espirales y su construcción.

Espiral de dos centros:

Construcción:

Partiendo de un segmento AB lo prolongamos en ambos sentidos. Haciendo centro en A y con radio la longitud del segmento, se traza una semicircunferencia que corta a la prolongación del segmento en C. Haciendo centro en B y con radio BC se traza otra semicircunferencia que corta a la prolongación del segmento en D. Este proceso continua indefinidamente alternando los centros A y B.

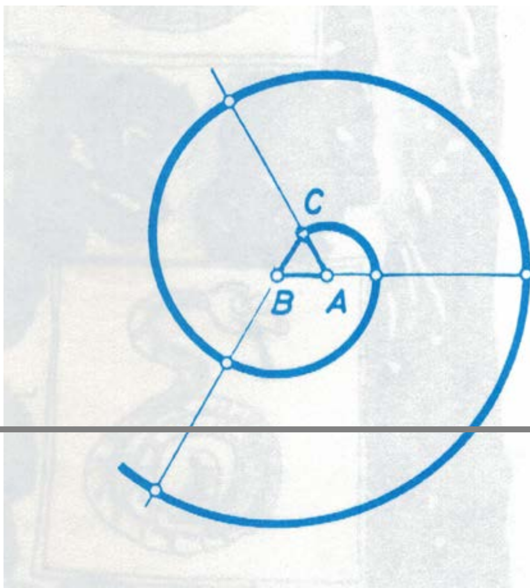
El ángulo en cada arco mide 120º



Espiral de tres centros:

Construcción:

Partiendo de un triángulo equilátero y haciendo centro en A y con radio la longitud del lado del triángulo trazamos un arco de circunferencia. Haciendo centro en B y con radio el doble del anterior trazamos otro arco y con



centro en C y radio triple del primero trazamos otro arco, como muestra la figura. Este proceso continua indefinidamente alternando los centros A y B.

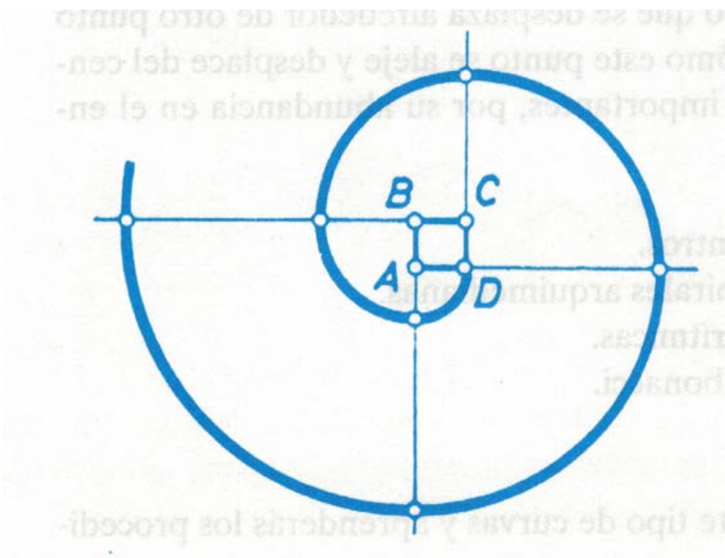
El ángulo en cada arco mide 180º

Espiral de cuatro centros:

Construcción:

El mismo proceso que con el triángulo equilátero, partiendo de un cuadrado, como vemos en la imagen.

El ángulo en cada arco mide 90º

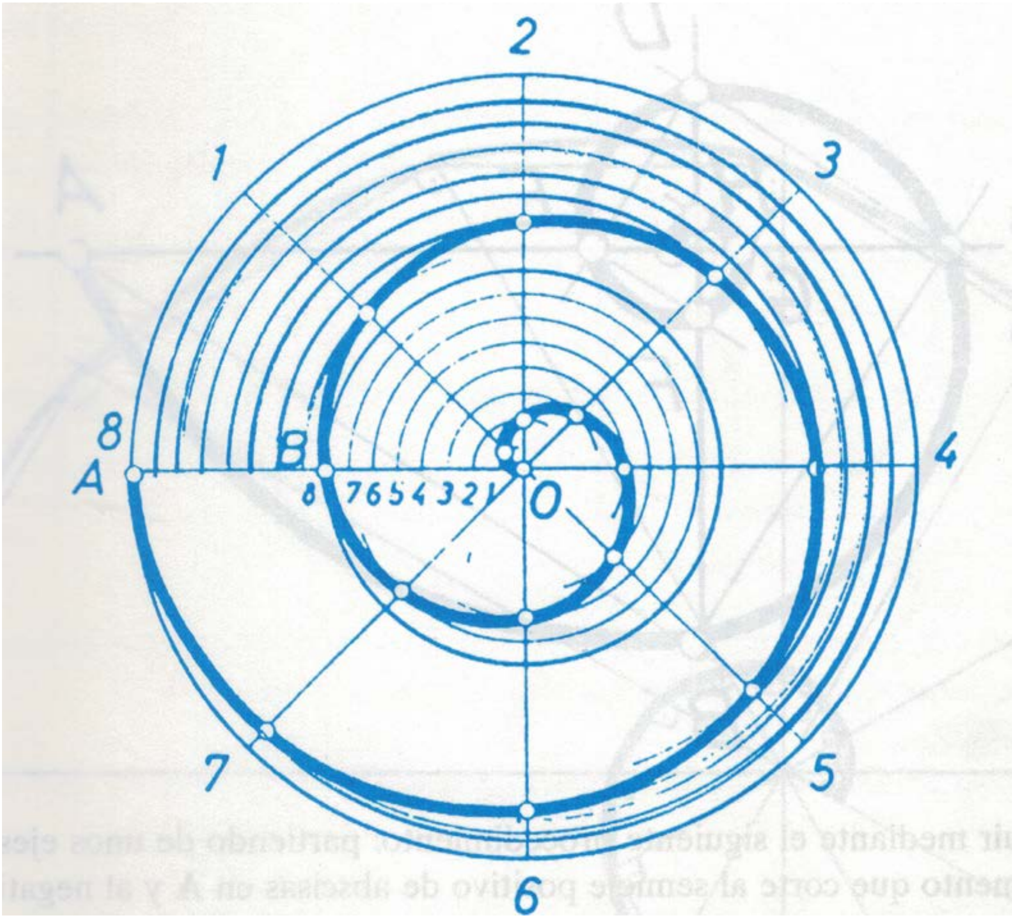


Espiral de Arquímedes

Construcción:

Trazamos tantas circunferencias como vueltas o espiras deseemos. El radio de la primera circunferencia es igual al paso o separación entre las espiras, el radio de la segunda es el doble del paso, el de la tercera el triple del paso y así sucesivamente.

Estas circunferencias concéntricas se dividen en varias partes iguales, en nuestro dibujo en ocho partes. Dividimos el radio de la primera en ocho partes iguales y trazamos los arcos concéntricos hasta cortar a los radios. Los puntos obtenidos son puntos de la espiral y uniéndolos obtenemos la primera vuelta de la espiral. Esto lo vemos en el dibujo adjunto.



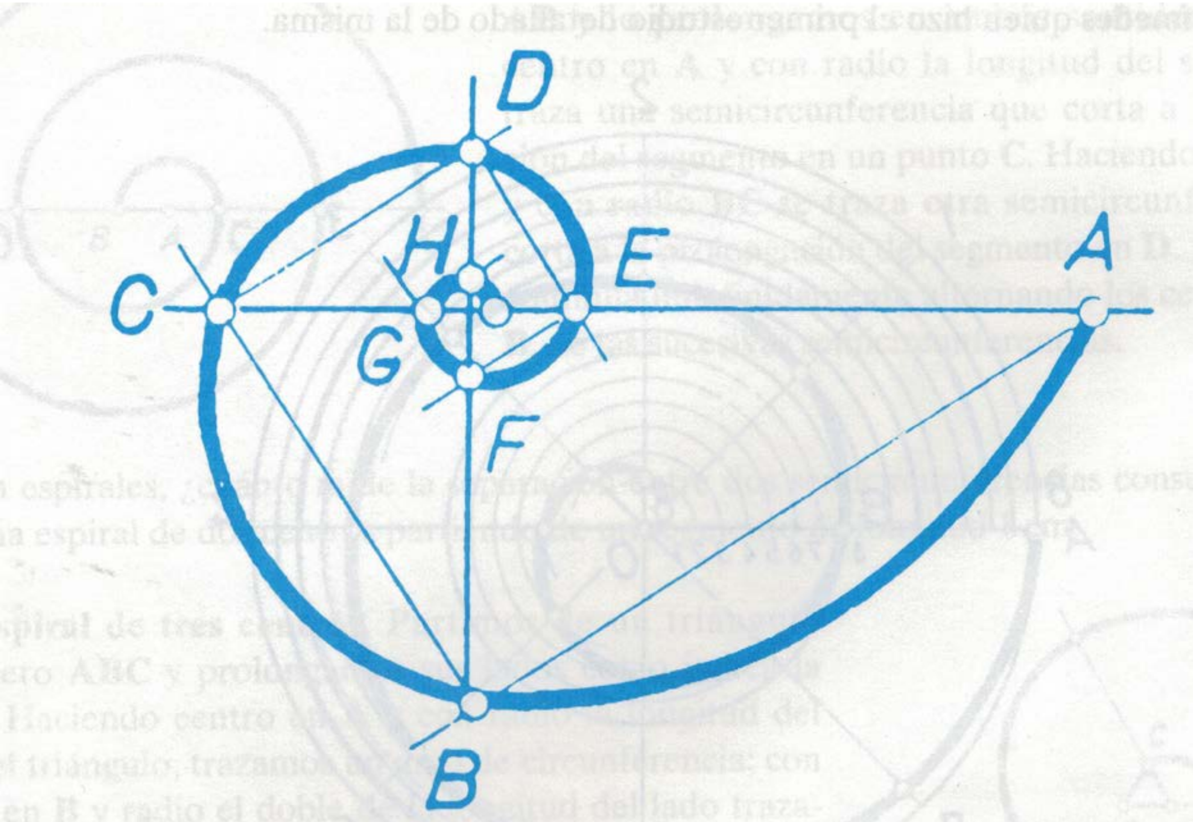
La propiedad de las espirales arquimedianas es que la distancia entre dos arcos contiguos situados en un mismo radio es siempre la misma, el paso de la espiral. Por eso se dice que las espiras tienen anchura constante.

Espiral logarítmica o equiangular

En esta espiral la anchura de las espiras no es constante.

Se construye partiendo de unos ejes coordenados, trazamos un segmento que corte al semieje positivo de abscisas en A y al negativo de ordenadas en B, como muestra la figura. Por B trazamos la perpendicular a este segmento que corta al semieje negativo de abscisas en C. Por C trazamos la perpendicular al segmento BC que corte al semieje positivo de ordenadas en D y continuamos este proceso indefinidamente. Uniendo, mediante arcos, los puntos A, B, C, D, …. Obtenemos la espiral logarítmica.

La propiedad de estas espirales es que en cualquier punto de la espiral el ángulo que forma la tangente en ese punto con la recta que une ese punto con el centro, es constante. De esta propiedad le viene el nombre de equiangular.



Espiral de Durero

Es una curiosa espiral que se construye a partir de rectángulo áureos como muestra la figura.
Es una aproximación de la espiral logarítmica.