UNIDAD 3: Sistemas de ecuaciones lineales

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 66

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$

Utilizando el método de Gauss, obtenemos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \quad 5y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 17y + 23z = 11 \\ y - 8z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 17y + 23z = 11 \\ 159z = -159 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

2. Estudia y resuelve, cuando sea posible, el sistema que sigue, según los valores del parámetro a. Analiza la interpretación geométrica de cada una de las soluciones.

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = -a \end{cases}$$

Expresando el sistema en forma matricial y utilizando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & -a \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a^2+1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a(a^2-1) & 0 & 2a^2 \\ 0 & a^2-1 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Estudio:

i) Si $a^2 - 1 \neq 0$, es decir, $a \neq -1$ o $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

Su solución es $x = \dfrac{2a}{a^2-1}$ e $y = \dfrac{a^2+1}{a^2-1}$. Las ecuaciones representan a dos rectas que se cortan en un punto cuyas coordenadas son las dadas por la solución anterior.

ii) Si a = - 1, el sistema $\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ es incompatible y carece de solución. Las ecuaciones son dos rectas paralelas.

iii) Si a = 1, el sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ es incompatible y carece de solución. Las ecuaciones son dos rectas paralelas.

3. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euro y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ -y - 4z = -340 \\ y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ y + 4z = 340 \\ -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \qquad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 83

1. Pesada difícil. Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kilos y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?

La solución queda:

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{cases} Arturo + Berta = 69 \\ Berta + Carlos = 79 \\ Carlos + Diana = 74 \\ Diana + Arturo = 64 \end{cases}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: Arturo – Carlos = - 10. Sumando a ésta la tercera obtenemos: Arturo + Diana = 64.

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: Arturo + Carlos = 74 kg; con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 kg; Berta pesa 37 kg; Carlos pesa 42 kg y Diana pesa 32 kg.

2. Curiosa elección. En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como las que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?

En la tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear.

Número de situación	Ana	Luis	Clara
(1)	R	R	R
(2)	R	R	A
(3)	R	A	R
(4)	A	R	R
(5)	R	A	A
(6)	A	R	A
(7)	A	A	R

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

El caso (2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

El caso (5) no es posible, pues en esta situación Ana hubiera dicho que su cinta era roja.

El caso (6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto, en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Suma de cubos. ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

Queda así:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$
…

www.yoquieroaprobar.es

La sucesión 1, 3, 6, 10, 15… es una progresión aritmética de segundo orden, su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Vamos a probar la relación anterior por inducción.

Observamos que es cierta la relación para n = 1:

$$1^3=1=\left(\frac{1^2+1}{2}\right)^2$$

Suponemos que es cierto para n = k, es decir:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2$$

y veamos si es cierto para n = k + 1:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3\right)+(k+1)^3=\left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2+(k+1)^3$$

Operando en la última expresión, obtenemos:

$$\left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2+4\,(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\,[k^2+4\,(k+1)]}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right]^2$$

Por tanto, se cumple: $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right)^2$

Esto último completa la demostración.

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}=680 \quad\Rightarrow\quad n=15.$$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 85

1. Discute, según los valores de a, y resolver cuando tenga más de una solución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y + az = 4 \\ ax + ay = a - z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver la solución de esta actividad.

Al igualar a cero el determinante de la matriz de los coeficientes A obtenemos los valores de a = - 1 y a = 1.

En la imagen vemos que para a = -1 los rangos son distintos por lo que el sistema es incompatible. Para a = 1 los rangos son iguales a 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores del parámetro a los rangos son iguales a 3 por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para a = 1 que es compatible indeterminado y para el caso compatible determinado y obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada B :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Anulamos el determinante de la matriz A :

resolver$(|A|=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos los rangos de las matrices A y B :

$a:=-1 \rightarrow -1$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 3$

$a:=1 \rightarrow 1$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 2$

Resolvemos el sistema para a = 1 :

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=3, y=-z-2, z=z\}\}$$

Resolvemos el sistema para $a \neq -1$:

$a:=a \rightarrow a$

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+a\cdot y+z=1 \\ 2x+y+a\cdot z=4 \\ a\cdot x+a\cdot y+z=a \end{Bmatrix} \rightarrow \left\{\{a=1, x=3, y=-z-2, z=z\}, \left\{a=a, x=1, y=\frac{-2}{a^2-1}, z=\frac{2\cdot a}{a^2-1}\right\}\right\}$$

www.yoquieroaprobar.es

2. Discute según los valores de b y resolver, en los casos en que sea posible, el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución para la cual z = 2.

En la siguiente imagen podemos ver la resolución de esta actividad.

Como vemos el sistema es incompatible para los valores que anulan el determinante de la matriz principal A.

Resolvemos para el resto de valores y obtenemos la solución para z = 2.

Introducimos la matriz de los coeficientes A
y la matriz ampliada B :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anulamos el determinante de la matriz A :

resolver$(|A|=0) \rightarrow \{\{b=0\},\{b=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos
el rango de las matrices A y B :

$b:=1 \rightarrow 1$
rango$(A) \rightarrow 2$
rango$(B) \rightarrow 3$

$b:=0 \rightarrow 0$
rango$(A) \rightarrow 2$
rango$(B) \rightarrow 3$

Resolvemos el sistema para $b \neq 1$ y $b \neq 0$ y tomando z = 2 :

$b:=b \rightarrow b$

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+b\cdot y+2z=b \\ x+y+z=-1 \\ b\cdot x+y-z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{b=\frac{-2}{z+2}, x=\frac{-2\cdot z^2-6\cdot z-4}{z+4}, y=\frac{z^2+z}{z+4}, z=z\right\}, \left\{b=-\frac{1}{2}, x=-4, y=1, z=2\right\}\right\}$$

3. Discute, según los valores de m, y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+(m-1)y=0 \\ y+m\,z+mx=0 \\ y=-z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver las soluciones de esta actividad.

www.yoquieroaprobar.es

Resolvemos la ecuación que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz principal A y obtenemos los valores de m = 1 y m = -1. Para estos valores de m el rango de A es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores de m el rango de A es igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para m = -1 y para m = 1 y para el resto de valores de m obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz de los coeficientes A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ m & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ m & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anulamos el determinante de la matriz A :

resolver$(|A|=0) \rightarrow \{\{m=-1\},\{m=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos el rango de la matriz A :

$m:=1 \rightarrow 1$

rango$(A) \rightarrow 2$

$m:=-1 \rightarrow -1$

rango$(A) \rightarrow 2$

Resolvemos el sistema :

$m:=m \rightarrow m$

$$\text{resolver}\begin{cases} x+(m-1)\cdot y=0 \\ m\cdot x+y+m\cdot z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \{\{m=-1,x=-2\cdot z,y=-z,z=z\},\{m=1,x=0,y=-z,z=z\},\{m=m,x=0,y=0,z=0\}\}$$

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 88

1. Expresa los sistemas siguientes de todas las formas posibles, poniendo de manifiesto, en cada caso, las matrices de los coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 6 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

En cada uno de los apartados queda:

a) Expresión matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ y \ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Expresión estándar: $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 2 \\ 2x + y - z + t = -1 \\ x + 3y - 4z + 2t = 3 \end{cases}$

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \ y \ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Expresión estándar: $\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x \qquad - z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$.

www.yoquieroaprobar.es

Expresión matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Estudia la existencia de soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \\ -6x + 4y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 2 \\ 2x + y - z + t = -1 \\ x + 3y - 4z + 2t = -3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x \quad\quad - z = -1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \; y \; A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 3, por tanto, el sistema es incompatible y carece de solución.

b) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \; y \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2 y como el número de incógnitas es mayor que el valor del rango, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

c) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 3 y el rango de A* es 3 y como el número de incógnitas coincide con el valor del rango, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución. Puede comprobarse que esta solución es x = 0, y = - 1 y z = 1.

3. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2a \\ x - ay = -3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax - y - z = -a \\ x - ay + az = a \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ y - 2z = a \\ x + 3z = -a \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2a \\ 1 & -a & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A* vale 2a (a – 2). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ 0 y a ≠ 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

b) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -a \\ 1 & -a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A vale - 2a (a + 1). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ - 1 y a ≠ 0 el rango de la matriz A es 3 y el de la matriz A* es 3, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = - 1 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

c) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 1 & 0 & 3 & -a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Estudiando el rango de las matrices A y A* obtenemos:

- Si a ≠ 1 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = 1 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

www.yoquieroaprobar.es

4. Consideramos el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$.

a) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte incompatible.
b) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.
c) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible determinado.

Las respuestas son:

a) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos, excepto para los términos independientes. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1. \\ 3x - y \quad\quad = 2 \end{cases}$$

b) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 2. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1. \\ 3x - y \quad\quad = 1 \end{cases}$$

c) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos una ecuación que no sea combinación lineal de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1\ . \\ x - 2y + z = 10 \end{cases}$$

5. Dado el sistema $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$**, halla a para que:**

a) No tenga soluciones.
b) Tenga infinitas soluciones.
c) Tenga solución única.
d) Tenga una solución en la que x = 3.

Las soluciones son:

a) Si a = - 1, el sistema es incompatible.

b) Si a = 1, el sistema es compatible indeterminado.

c) Si a ≠ - 1 y a ≠ 1, el sistema es compatible determinado.

d) Los valores de a son $-\dfrac{4}{3}$ y 1.

www.yoquieroaprobar.es

6. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ x + 2y = 3 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ -3x + y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 3y - z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$

Utilizamos las operaciones elementales por filas en la matriz ampliada para hacer ceros y convertirla en una matriz escalonada.

a) Las operaciones elementales son:
(1) $2F_2 - F_1 \to F_2$; $5F_2 - F_3 \to F_3$. (2) $6F_2 - 7F_3 \to F_3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\cong} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\cong} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 7y = 14 \end{cases}$ y su solución es x = - 1, y = 2.

b) Las operaciones elementales son:
(1) $3F_1 + F_2 \to F_2$; $2F_1 - F_3 \to F_3$. (2) $5F_2 - 7F_3 \to F_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & -14 \\ 0 & 5 & -3 & -10 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es equivalente a $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 7y - 6z = -14 \\ -9z = 0 \end{cases}$ y su solución es x = 1; y = - 2; z = 0.

c) Las operaciones elementales son:
(1) $F_4 + F_1 \to F_4$. (2) $3F_2 + F_3 \to F_3$; $2F_2 + F_4 \to F_4$. (3) $F_3 - F_4 \to F_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es equivalente a $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 2z = 2 \end{cases}$ y su solución es x = - 4; y = 1; z = 1.

www.yoquieroaprobar.es

7. Resuelve los sistemas siguientes por el método de la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + y - 4z = -3 \\ 2x + 3y - 5z = -4 \end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 7.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 1.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 26.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/26 & 1/26 & 2/26 \\ -3/26 & -19/26 & 14/26 \\ 1/26 & -11/26 & 4/26 \end{pmatrix}$.

www.yoquieroaprobar.es

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/26 & 1/26 & 2/26 \\ -3/26 & -19/26 & 14/26 \\ 1/26 & -11/26 & 4/26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Comprueba que los siguientes sistemas son de Cramer y encuentra su solución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = 8 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

a) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$.

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{13}{13} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{13} = -2$$

b) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10$.

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{-10} = -1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-10} = 0$$

c) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 5.$.

www.yoquieroaprobar.es

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&2&-1\\8&-1&2\\2&2&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&-1\\3&-1&2\\1&2&-2\end{vmatrix}}=\frac{10}{5}=2\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&6&-1\\3&8&2\\1&2&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&-1\\3&-1&2\\1&2&-2\end{vmatrix}}=\frac{10}{5}=2\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}2&2&6\\3&-1&8\\1&2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&-1\\3&-1&2\\1&2&-2\end{vmatrix}}=\frac{10}{5}=2$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 89

9. Indica razonadamente si las parejas de sistemas que siguen son equivalentes:

a) $\begin{cases}x+y+z=4\\3x+2y-z=6\\2x+y-2z=2\end{cases}$ **y** $\begin{cases}x-y+z=0\\y=2\\x+y-z=2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y=1\\-x+2y+z=2\end{cases}$ **y** $\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y=1\end{cases}$

a) El primer sistema es compatible indeterminado, con rango 2 para las matrices del sistema, ya que se cumple:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&-1\\2&1&-4\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&1&4\\3&2&6\\2&1&2\end{vmatrix}=0 \text{ y } \begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Las soluciones del sistema son:

$$\begin{cases}x+y+z=4\\3x+2y-z=6\\2x+y-2z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\3x+2y-z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-z\\3x+2y=6+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2+3z\\y=6-4z\end{cases}$$

Haciendo z = t, siendo t un número real cualquiera, podemos expresar las soluciones en la forma:

$x=-2+3t,\ y=6-4t,\ z=t.$

El segundo sistema es compatible determinado al cumplirse:

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

La única solución del sistema es:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\y=2\\x+y-z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=2\\y=2\\x-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=1\end{cases}$$

Por tanto, los sistemas no son equivalentes al tener distintas soluciones.

Debe observarse que la solución única, x = 1, y = 2, z = 1, del segundo sistema es una de las infinitas soluciones del sistema. Es aquella que resulta de sustituir t = 1 en las igualdades:

x = - 2 + 3t, y = 6 - 4t, z = t.

b) El primer sistema es compatible indeterminado, con rango 2 para las matrices del sistema, ya que se cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

El sistema dado es puede expresarse en la forma:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y \quad = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer para su solución, obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4+z}{-3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5+2z}{-3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z$$

Haciendo z = 3t, siendo t un número real cualquiera, podemos expresar la solución en las formas:

$$x = \frac{4}{3} - t; \quad y = \frac{5}{3} - 2t; \quad z = 3t$$

El segundo sistema es compatible indeterminado, con rango 2 para las matrices del sistema, ya que se cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Las soluciones coinciden con las del primer sistema y, en este caso, los sistemas son equivalentes.

10. Averigua para qué valor del parámetro a los dos sistemas siguientes son equivalentes:

$$(I): \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad y \qquad (II): \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Ambos sistemas son compatibles determinados si a ≠ 4.

www.yoquieroaprobar.es

Las soluciones de los sistemas son:

Sistema (I): $x = -\dfrac{7}{a-4};\ y = \dfrac{4a-2}{a-4}.$

Sistema (II): $x = -\dfrac{7}{a-4};\ y = \dfrac{2a-1}{a-4}.$

Los sistemas son equivalentes si sus soluciones coinciden, por tanto:

$$\frac{4a-2}{a-4} = \frac{2a-1}{a-4} \Rightarrow 4a-2 = 2a-1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Para este valor del parámetro la solución de ambos sistemas es x = 2, y = 0.

■ 11. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los sistemas siguientes y encuentra sus soluciones en los casos que sean compatibles:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax \quad +2z=0 \\ 2x-y+az=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax+y-z=z \\ -x+ay+z=x \\ -3x+3y+z=y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+az=0 \\ 3x+2y+4az=0 \\ 2x+y \quad +3z=0 \end{cases}$

a) El sistema es homogéneo y la matriz del sistema es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz anterior vale det (A) = - a^2 - a + 6 = - (a - 2) · (a + 3). Este determinante se anula para a = 2 y a = - 3. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ - 3 y a ≠ 2, el rango de la matriz A es 3 y coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

En este caso su solución es la trivial, es decir x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = - 3, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y+z=-x \\ 2z=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}x \\ z=\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Haciendo x = 2t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

x = 2t, y = - 5t, z = 3t, con t $\in$ R.

www.yoquieroaprobar.es

● Si a = 2, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y + z = -x \\ 2z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

Haciendo x = t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

$$x = t,\ y = 0,\ z = -t, \text{ con } t \in R.$$

b) Volvemos a escribir el sistema, que resulta ser homogéneo: $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de A es 2 con independencia del parámetro.

El determinante de la matriz A es det (A) = $a^2 - 8a + 7 = (a - 1)(a - 7)$. El determinante se anula para a = 1 y a = 7. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ 1 y a ≠ 7, el rango de A es 3 que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2 menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2z \\ -2x + y = -z \end{cases}$$

Las soluciones son x = t, y = t, z = t, siendo t cualquier número real.

● Si a = 7, estamos en una situación análoga al caso anterior.

Para a = 7 el sistema es:

$$\begin{cases} 7x + y - 2z = 0 \\ -2x + 7y + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y - 2z = 0 \\ -2x + 7y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = 2z \\ -2x + 7y = -z \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

Las soluciones son x = $\frac{5}{17}$t, y = $-\frac{1}{17}$t, z = t, siendo t cualquier número real.

c) El determinante de la matriz del sistema es det (A) = 3a- 3. Se anula para a = 1. Podemos realizar el siguiente estudio.

● Si a ≠ 1, el rango de A es 3, que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2, menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x + y\ az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y = + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ 3x + 2y = -4z \end{cases}$$

Las soluciones son x = - 2t, y = t, z = t, siendo t un número real cualquiera.

12. Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$

Eliminando los parámetros, se obtiene:

a) $\begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y + z - 2u = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 9 \end{cases}$

13. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

Llamamos x, y, z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ x + z = y + 1 \\ y + z = x + 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad 2y - 2z = 0 \\ \quad 2y \quad\quad = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los tres números son x= 1, y = 1, z = 1.

14. El señor García deja a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de los que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media aritmética de los que les deja a los otros dos; y al más pequeño, la media aritmética de los de los otros dos menos 30 000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

Llamando M a lo que recibe el hijo mayor, m el mediano y p el pequeño e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2M - m - p = 60\ 000 \\ M - 2m + p = 0 \\ M + m - 2p = 60\ 00 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} 2M - m - p = 60\ 000 \\ M - 2m + p = 0 \\ M + m - 2p = 60\ 00 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M - m = 60\ 000 + p \\ M - 2m = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 40\ 000 + p \\ m = 20\ 000 + p \end{cases}$$

No podemos saber lo que deje a cada uno de los hijos con estas condiciones.

15. Tres empresas A, B y C se suministran entre si los bienes que cada una necesita de las otras y a su vez satisfacen la demanda exterior.
La empresa A suministra a la empresa B un 11% del material que esta necesita para hacer una unidad de sus productos, a la empresa C un 3% y a sí misma un 28% y tiene una demanda exterior de 1300 unidades. La empresa B suministra a las empresas A y C, respectivamente un 11% y un 9% de sus necesidades, ella necesita un 39% de lo que fabrica y su demanda exterior de 5000 unidades. La empresa C necesita un 15% de su fabricación, suministra un 6% de lo que necesita A y un 8% de lo que necesita B, y su demanda exterior es de 4000 unidades.

Halla la matriz de salida, es decir, la cantidad que debe producir cada una de las empresas para satisfacer la demanda interior y exterior.

Sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matriz de salida.

Formamos el sistema: $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}11 & 0{,}39 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} 0{,}28x + 0{,}11y + 0{,}03z + 1300 = x \\ 0{,}11x + 0{,}39y + 0{,}09z + 5000 = y \\ 0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}15z + 4000 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}72x - 0{,}11y - 0{,}03z = 1300 \\ -0{,}11x + 0{,}61y - 0{,}09z = 5000 \\ -0{,}06x - 0{,}08y + 0{,}85z = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\,532 \\ y = 9\,699 \\ z = 5\,868 \end{cases}$$

Otra forma de encontrar la matriz de salida, X, es resolviendo la ecuación matricial:

$$X = A \cdot X + E \quad \Rightarrow \quad I \cdot X - A \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad (I - A) \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad X = (I - A)^{-1} \cdot E$$

Hallando la matriz inversa de I – A y operando, obtenemos:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot E \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}44 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}28 & 1{,}71 & 0{,}19 \\ 0{,}13 & 0{,}18 & 1{,}20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3532 \\ 9699 \\ 5868 \end{pmatrix}$$

16. Tres individuos, un agricultor (A), un ganadero (G) y un pescador (P) forman una sociedad de consumos, cuyos productos se intercambian entre ellos sin relación con otras personas. La matriz de entrada y salida correspondiente a esta economía es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál debe ser la relación de precios de sus respectivos productos?

Los precios $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de los productos de los tres individuos deben cumplir la relación X = A · X.

La ecuación matricial anterior da lugar al sistema:

$$\begin{cases} x = 0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ y = 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ z = 0{,}5x + 0{,}4y + 0{,}4z \end{cases}$$

Las soluciones del sistema homogéneo anterior son:

$$\begin{cases} 0{,}7x - 0{,}3y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}2x + 0{,}7y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}5x - 0{,}4y + 0{,}6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}70z \\ y = 0{,}63z \end{cases}$$

Las relaciones de precios serán: $\frac{x}{z} = 0{,}70 \quad \frac{y}{z} = 0{,}63 \quad \frac{y}{x} = 0{,}90$.

www.yoquieroaprobar.es

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 90

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

a) Calcula a de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma ax + y – 7z = 1 el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

a) La matrices del sistema, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ tienen rango 2 al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Como el valor del rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

Añadimos la ecuación indicada: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ ax + y - 7z = 1 \end{cases}$.

El sistema resultante tiene que seguir siendo compatible indeterminado. Por tanto el rango de la matriz de los coeficientes debe ser 2. Esto nos conduce a que el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & -7 \end{vmatrix} = 11a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

El valor del parámetro a debe ser 0.

b) En este caso, el sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ es compatible determinado.

Resolviéndolo por cualquiera de los métodos conocidos obtenemos como solución:

$$x = \frac{25}{3},\ y = -\frac{11}{3},\ z = -\frac{2}{3}.$$

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - y + az = 1 + a \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + 3z = a \end{cases}$

a) Discute el sistema para los distintos valores del parámetro a.

b) Resuelve el sistema para a = 1.

a) En la matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ 1 & -a & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ ponemos encontrar un menor de orden 2, cuyo determinante vale: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$. Podemos afirmar que el rango de la matriz A es 2, independientemente del valor del parámetro a.

Hallamos el valor del determinante de la matriz A: $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -1 & a\\ 1 & -a & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=a^2-5a$

Los valores que anulan el anterior determinante son: $a^2 - 5a = 0 \Rightarrow a(a - 5) = 0 \Rightarrow a = 0$ y $a = 5$. Estos valores nos permiten realizar la discusión que sigue.

Estudio:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3 y el rango de la matriz ampliada, A^*, es 3, entonces el sistema es compatible y determinado (tiene una solución única).

- Si a = 0 el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 2 y el rango de la matriz ampliada, A^*, es 3, entonces el sistema es incompatible o imposible (no tiene solución).
  El determinante que sigue es un menor de la matriz ampliada A^*:
$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

- Si a = 5 el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 2 y el rango de la matriz ampliada, A^*, es 3, entonces el sistema es incompatible o imposible (no tiene solución).

  El determinante que sigue es un menor de la matriz ampliada A^*:
$$\begin{vmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

b) El sistema para a = 1 es $\begin{cases}2x-y+z=2\\ x-y+z=1\\ x+y+3z=1\end{cases}$ y según el estudio anterior es compatible determinado, es decir, con solución única.

Si resolvemos el sistema por cualquiera de los procedimientos al uso (método de Gauss, regla de Cramer, sustitución, etc), obtenemos como solución: x = 1, y = 0, z = 0.

3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -4\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Halla a para que el sistema x · A + y · B = 4 · C de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y sea compatible determinado y resuélvelo para ese valor de a.

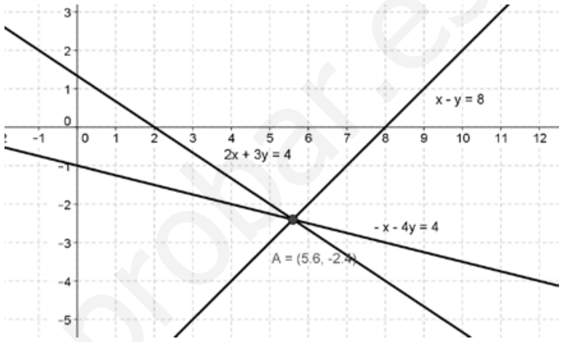
El sistema x · A + y · B = 4 · C escrito en su forma estándar es $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 8 \\ ax - 4y = 4 \end{cases}$.

Las matrices asociadas al sistema son:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes S vale 2, independientemente del valor de a, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$



Como el sistema debe ser compatible determinado, el rango de la matriz ampliada, S*, debe ser 2. Por tanto, el determinante de S* debe ser nulo:

$$|S^*| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 28a + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

El valor buscado de a es – 1. Para este valor la única solución del sistema es:

$$x = \frac{28}{5} = 5{,}6, \; y = -\frac{12}{5} = -2{,}4.$$

En la imagen puede verse como las tres rectas pasan por el punto A (5,6; - 2,4).

4. Determina para que valores del parámetro a el sistema: $\begin{cases} ax + y + a^2 z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + a^3 y + a^2 z = -3 \end{cases}$ **admite como solución x = 1, y = 1, z = 1, y resolverlo en estos casos, comprobando que efectivamente, x = 1, y = 1, z = 1 es solución del sistema. Razona las respuestas.**

Para que el sistema admita la solución x = 1, y = 1, z = 1 tiene que verificarse:

$$\begin{cases} a + 1 + a^2 = 3 \\ -1 - 7 + 8 = 0 \\ 1 + a^3 + a^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0 \\ 0 = 0 \\ a^3 + a^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 = 0 \\ a^3 + a^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación tiene por soluciones a = 1 y a = -2.

www.yoquieroaprobar.es

La segunda ecuación tiene por soluciones a = -2 y a = $\frac{1 \pm 7i}{2}$.

La única solución de a que satisface ambas ecuaciones es a = - 2.

El sistema para a = - 2 es:

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + -8y + 4z = -3 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado, con rango 2 para las matrices del sistema, ya que se cumple:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 8 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

Las soluciones del sistema son:

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x - 8y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 3 - 4z \\ -x - 7y = -8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} + \frac{12}{5}z \\ y = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}z \end{cases}$$

Las soluciones son x = $-\frac{7}{5} + \frac{12}{5}z$, y = $\frac{1}{5} + \frac{4}{5}z$, z = t, siendo t cualquier número real.

Debe observarse que la solución x = 1, y = 1, z = 1, se obtiene de las soluciones anteriores haciendo t = 1.

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a, b y c:

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Se pide:

a) Justifica razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = - 1 y c = 2 el sistema es incompatible.

b) Determina razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica (x, y, z) = (1, 2, 3).

c) Justifica si la solución (x, y, z) = (1, 2, 3) del sistema del apartado anterior es, o no, única.

a) Si a = 0, b = - 1 y c = 2, el sistema resultante es: $\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$.

El rango de la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ vale 2, ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & .-2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

El rango de la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ vale 3, ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

b) Sustituyendo en el sistema x = 1, y = 2, z = 3, operando nos queda:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Resolviendo por alguno de los métodos al uso se obtiene como valores de los parámetros:

a = 1, b = - 1 y c = 1.

c) Si a = 1, b = - 1 y c = 1, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Tenemos que (x, y, z) = (1, 2, 3) es solución del sistema anterior y como el rango de la matriz de los coeficientes vale 3, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

el sistema es compatible determinado.

Para a = 1, b = - 1 y c = 1, la única solución del sistema es (x, y, z) = (1, 2, 3).

6. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Halla los valores de m para que el sistema tenga alguna solución en la que x = 2.

www.yoquieroaprobar.es

Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es $|A| = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$.

a) Discusión del sistema:

i) Si m $\notin$ {- 1, 1}, entonces rango (A) = 2 y rango (A*) = 2. El sistema es compatible determinado y tiene solución única

ii) Si m = 1, el rango (A) = 1 y rango (A*) = 1. El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

En este caso las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

iii) Si m = - 1, rango(A) = 1 y rango (A*) = 2. El sistema es incompatible y no tiene solución.

En este caso las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) ● Si m $\notin$ {- 1, 1}, las soluciones del sistema son:

$$x = -\frac{1}{m+1}; \quad y = \frac{2m+1}{m+1}$$

Si x = 2, entonces $2 = -\frac{1}{m+1} \Rightarrow -1 = 2m + 2 \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

● Si m = 1, las soluciones del sistema son:

x = t; y = - 1 + t con t $\in$ R.

Si x = t = 2, entonces y = 1.

Por tanto, los valores de m que hacen que el sistema tenga una solución con x = 2 son $m = -\frac{3}{2}$ y m = 1.

7. Por cuatro batidos, un helado y dos sándwiches nos cobraron un día en una cafetería 13 euros. Otro día, por cuatro helados y cuatro sándwiches nos cobraron 20 euros. Un tercer día tuvimos que pagar 9 euros por un sándwich y cuatro batidos. ¿Algún día nos presentaron una factura incorrecta?

Llamando b al precio de un batido, h al de un helado y s al de un sándwich, con las condiciones del enunciado podemos plantear el sistema:

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{cases} 4b + h + 2s = 13 \\ \quad 4h + 4s = 20 \\ 4b \quad + s = 9 \end{cases}$$

Puede comprobarse que el sistema es incompatible al cumplirse:

- El rango de la matriz A es 2: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

- El rango de la matriz A* es 3: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 20 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$

Por tanto, algún día nos presentaron una factura incorrecta.

8. Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: «Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad ». Sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros, ¿qué dinero tiene cada uno?

Llamamos x, y, z al dinero que poseen Luis, Juan y Óscar, respectivamente. Con las condiciones del enunciado podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - 3y \quad = 0 \\ 2x \quad - 3z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos x = 30, y = 10, z = 20.

Por tanto, Luis tenía 30 euros. Juan 10 euros y Óscar 20 euros.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 91

Matrices mágicas y cuadrados mágicos

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1. Se dice que una ***matriz*** M, de orden 3, es ***mágica*** si las ocho sumas:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{j=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{ii};\quad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{i2};\sum_{i=1}^{3} a_{i3};\sum_{j=1}^{3} a_{1j};\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j};\sum_{j=1}^{3} a_{3j};\ \sum_{i=1}^{3} a_{ii};\ a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

son iguales.

www.yoquieroaprobar.es

Llamamos s al valor común de estas sumas y M (s) a una de las matrices correspondientes. Se pide:

a) Encuentra la expresión de todas las matrices mágicas de suma s, M (s).

b) Halla el valor de la suma s si la matriz M (s) es antisimétrica. Construye todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

c) Construye todas las matrices mágicas simétricas, de suma s, de orden 3.

2. Las matrices mágicas están emparentadas con los ***cuadrados mágicos***. Un cuadrado mágico consta de N^2 casillas, cada una ocupada por un número natural distinto, de forma que la suma de los números de las distintas filas horizontales y verticales, así como de las dos diagonales es siempre la misma.

En la imagen puede verse el más famoso de los cuadrados mágicos de orden 4, debido al pintor Durero. Su suma o constante mágica es 34, además los cuatro números del centro (en color verde) también suman 34, así como los cuatro de las esquinas (en color negro). Los dos números en color rojo componen el año en el que fue realizado el grabado en el que aparece.

Los cuadrados mágicos están llenos de propiedades y sorpresas. Investiga sobre ellos.

www.yoquieroaprobar.es

a) Sea la matriz $M\ (s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Expresando las ocho sumas del enunciado e igualándolas a s, obtenemos el siguiente sistema homogéneo de 8 ecuaciones con 10 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} - s = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} - s = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} - s = 0 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} - s = 0 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} - s = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} - s = 0 \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} - s = 0 \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} - s = 0 \end{cases}$$

Realizando operaciones elementales por filas, las matrices que siguen tienen el mismo rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes vale 7. Como el número de incógnitas es 10, las soluciones del sistema, es decir, el conjunto de las matrices M (s) dependerán de 10 – 7 = 3 parámetros.

Procediendo de forma directa, si $a_{11} = a$; $a_{12} = b$; $a_{21} = c$, una matriz mágica de suma s, M (s), se expresará en la forma:

$$M\ (s) = \begin{pmatrix} a & b & s - a - b \\ c & -s + 2a + b + c & 2s - 2a - b - 2c \\ s - a - c & 2s - 2a - 2b - c & -2s + 3a + 2b + 2c \end{pmatrix}$$

Imponiendo que $a_{11} + a_{22} + a_{33} = s$, se obtiene 6a + 3b + 3c – 3s = 2, es decir, $c = \frac{4}{3}s - 2a - b.$

Toda matriz mágica M (s) depende de tres parámetros a, b y s. La expresión, respecto de estos parámetros, de una matriz mágica M (s) es:

www.yoquieroaprobar.es

$$M\ (s) = \begin{pmatrix} a & b & s-a-b \\ \frac{4}{3}s - 2a - b & \frac{1}{3}s & -\frac{2}{3}s + 2a + b \\ -\frac{1}{3}s + a + b & \frac{2}{3}s - b & \frac{2}{3}s - a \end{pmatrix} \qquad [\ \mathrm{I}\ ]$$

Podemos expresar la matriz M (s) en función de tres matrices fijas en la forma:

$$M\ (s) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + s \cdot S$$

b) Si la matriz mágica M (s) es antisimétrica, se cumplirá: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, luego $s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. Además, $a = a_{11} = 0$

Haciendo a = 0 y s = 0 en la expresión [I] de la matriz mágica M (s) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = b \cdot B$$

Todas las matrices mágicas antisimétricas son de la forma anterior.

c) Imponiendo en la expresión [I] que la matriz sea simétrica, resulta:

$$b = \frac{4}{3}a - 2a - b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}s - a.$$

Sustituyendo este valor de b en la expresión [I] obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s \\ \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s & a \\ \frac{1}{3}s & a & \frac{2}{3}s - a \end{pmatrix}$$

que es la expresión genéricas de las matrices mágicas genéricas.

2. Sobre cuadrados mágicos la información es muy abundante tanto bibliográfica como en Internet, por tanto, dejemos esta cuestión abierta.

www.yoquieroaprobar.es