$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solo tiene dos filas no nulas y el rango de A es 2

b) La matriz AM es de orden 3x3 y si a = 0 la matriz producto AM quedaría:

$$AM=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Para ser invertible debe tener determinante no nulo:

$$|AM|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=0-6+2-(0-6+4)=-4+2=-2\neq 0$$

Calculemos su inversa:

$$(AM)^{-1}=\frac{Adj\left(AM^{T}\right)}{|AM|}=\frac{Adj\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\right)}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}-4 & 8 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -3\end{pmatrix}}{-2}$$

$$(AM)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 5/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para x > 0, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva ***y = f(x)***.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva ***y = f(x)*** en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva ***y = f(x)*** y las rectas ***y = 0*** y ***x = e***.

a) Calculemos los límites de la función en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (Regla de L`Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es la recta de ecuación $y=0$. El eje de abcisas.

b) La pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, si debe ser horizontal la derivada debe anularse.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Llamemos b al precio de un bocadillo, r al precio de un refresco y p al precio de una bolsa de patatas.

3 bocadillos + 1 que cobraron de más, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas + 1 que cobraron de más costaron 19€ → $4b+2r+3p=19$

Le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

$b+p=4$

Un bocadillo y un refresco por 3 euros, con un descuento del 40% respecto a sus precios originales. Es decir, pagó el 60% de su precio original. → $0,6b+0,6r=3 \Rightarrow 6b+6r=30 \Rightarrow b+r=5$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l}4b+2r+3p=19\\ b+p=4\\ b+r=5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}4b+2r+3p=19\\ b=4-p\\ b+r=5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}4(4-p)+2r+3p=19\\ 4-p+r=5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}16-4p+2r+3p=19\\ -p+r=1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-p+2r=3\\ -p+r=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-p+2r=3\\ r=p+1\end{array}\right\} \Rightarrow -p+2(p+1)=3 \Rightarrow -p+2p+2=3$$

$$\Rightarrow p=1 \Rightarrow r=1+1=2 \Rightarrow b=4-1=3$$

Un bocadillo ha costado 3 €, un refresco 2 € y una bolsa de patatas 1 €

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los limites laterales $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$

a) El dominio de la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ son los valores de x que hacen positivo el radicando. Planteamos la ecuación correspondiente:

$$4x^2-x^4=0 \Rightarrow x^2\left(4-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

Los números reales se dividirían en 4 intervalos o semirrectas, veamos en cuales existe la función:

(–∞, –2) →por ejemplo $x=-4 \Rightarrow f(-4)=\sqrt{4(-4)^2-(-4)^4}=\sqrt{64-256}=\sqrt{-192}=\text{No existe}$

(–2, 0) → por ejemplo $x=-1 \Rightarrow f(-1)=\sqrt{4(-1)^2-(-1)^4}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}=Si\ \text{existe}$

(0, 2) → por ejemplo $x=1 \Rightarrow f(1)=\sqrt{4(1)^2-(1)^4}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}=Si\ \text{existe}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Como } x \text{ son números negativos}\\ \sqrt{x^2}=-x\\ \text{ya que es la raiz positiva de } x\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4-x^2}}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{4-x^2}=-2$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto A(2; 1; 0) y el plano $\pi\equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

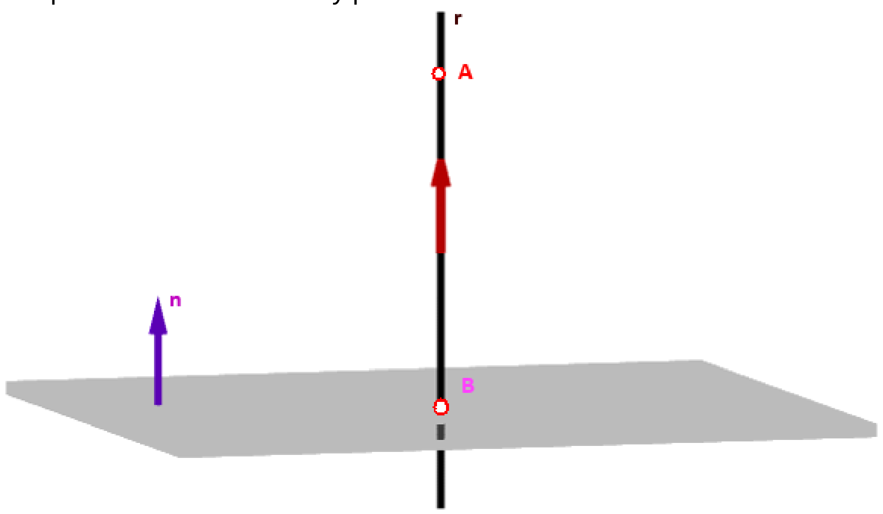
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

a)

$$\left.\begin{array}{l}A(2,1,0)\\ \pi\equiv 2x+3y+4z-36=0\end{array}\right\}d\left(A;\pi\right)=\frac{\left|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36\right|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$$

b) Para determinar el punto buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por A y luego averiguaremos el punto de corte de recta y plano.



$$\pi\equiv 2x+3y+4z=36\Rightarrow \vec{n}=\left(2,3,4\right)=\vec{v_r}$$

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}A(2,1,0)\\ \vec{v_r}=\left(2,3,4\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+2t\\ y=1+3t\\ z=4t\end{array}\right\}$$

El punto de corte de r y π se obtiene de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y+4z=36\\ x=2+2t\\ y=1+3t\\ z=4t\end{array}\right\}\Rightarrow 2\left(2+2t\right)+3\left(1+3t\right)+4\left(4t\right)=36\Rightarrow 4+4t+3+9t+16t=36$$

$$29t=29\Rightarrow t=1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+2=4\\ y=1+3=4\\ z=4\end{array}\right\}$$

El punto pedido es $B\left(4,4,4\right)$