

Opción A

Ejercicio 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

- a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real "a".
 b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a=0.

a) De la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$, intentamos tomar, de forma arbitraria, un menor complementario de orden 2, no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ por lo que el rango de la matriz es al menos 2: } \text{Rango}(A) \geq 2$$

Tomamos ahora un menor de orden 3 y lo igualamos a cero: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Estudiemos la matriz para ambos casos:

Para a=1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sin necesidad de calcular menores complementarios, como las columnas 1ª y 4ª son iguales y la columna 3ª es combinación lineal de la 2ª y la 4ª

$$C_1 = C_4 \quad C_2 + C_4 = C_3 \quad \text{Entonces } \boxed{\text{Rango}(A) = 2}$$

Para a=-2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Sin necesidad de calcular menores complementarios, como las filas 2ª y 4ª son proporcionales: $F_2 = -F_4$, entonces $\boxed{\text{Rango}(A) = 2}$

Para a≠1 y a≠-2

Hay al menos un menor complementario de orden tres, calculado más arriba, no nulo. Por tanto, $\boxed{\text{Rango}(A) = 3}$

b) Calculamos A·M para a=0 y el valor del determinante:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad |A \cdot M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto, A·M tiene inversa. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto.

$$(AM)^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Transponiendo y dividiendo por el determinante, sacamos la inversa

$$(AM)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, definida para $x > 0$, se pide:

- Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$
- Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es extremo relativo.
- Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$

a) Asíntota horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = L'Hôpital = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ $y = 0$

b) La recta tangente será de la forma $y = mx + n$ donde m es la pendiente. Si la recta es horizontal entonces $m = f'(a) = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Si $m = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow 1 = \ln(x) \Rightarrow x = e$

Sustituyendo en la función dada, el punto pedido es $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

Para que este punto sea extremo relativo necesitamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - (1 - \ln(x))2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$$
$$f''(e) = \frac{-3 + 2\ln(e)}{e^3} = \frac{-3 + 2}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \Rightarrow \text{Es un máximo}$$

Ejercicio 3.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

- Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s .
- Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

a) Al ser ambos vectores directores no proporcionales, entonces las rectas o se cortan o se cruzan. Coloquemos ambas rectas como intersección de planos y resolvamos el sistema que resulta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z \quad s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-1} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} \\ \frac{x-1}{2} = z \\ y = -5 \\ x - 2 = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sistema incompatible. No hay solución. Las rectas se cruzan.}$$

b) Un plano paralelo a r y que contenga a s , es un plano con los vectores directores de ambas rectas y cualquier punto de s .

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 2z + 9 = 0$$

c) Un plano perpendicular a r debe tener como vector característico o normal al propio vector director de r .

$$2x - 2y + z + C = 0$$

Si obligamos a que pase por el origen de coordenadas: $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Luego el plano pedido es

$$2x - 2y + z = 0$$

Ejercicio 4.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es el 10%. Se pide:

- a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos 5 años.
- b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

a) Tenemos una distribución discreta binomial con $n=10$ elementos, $p=0,1$ como probabilidad de éxito y $q=0,9$ como probabilidad de fracaso. No podemos aproximarla a una normal porque no cumple una de las condiciones ($np=1 < 3$). Nuestra distribución es $B(10;0,1)$.

$$\text{Nos piden } P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1) = 1 - \binom{10}{0} 0,1^0 0,9^{10} - \binom{10}{1} 0,1^1 0,9^9 = 1 - 0,3487 - 0,3874 = 0,2639$$

b) En este caso $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 3$ y también $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 3$ por tanto podemos aproximar a una variable normal con media y desviación típica:

$$\mu = 200 \cdot 0,1 = 20 \qquad \sigma = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,2426 \qquad X: N(20; 4,2426)$$

Nos piden $P(x \geq 10)$ pero al pasar la binomial a normal debemos recurrir a tomar intervalos de tamaño una unidad que contengan los valores de x .

Por tanto, en realidad lo que nos piden es $P(x > 9,5)$

$$\text{Tipificamos } P(x > 9,5) = P\left(z > \frac{9,5-20}{4,2426}\right) = P(z > -2,4748) = P(z < 2,4748) = 0,9933$$

Opción B

Ejercicio 1.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros.

Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Definiremos nuestras incógnitas de la siguiente forma:

b = Precio del bocadillo

r = Precio del refresco

p = Precio de la bolsa de patatas

Como le devuelven 4 euros está claro que lo consumido tenía un coste de $19 - 4 = 15$ euros. Por tanto,

$$3b + 2r + 2p = 15$$

Y está claro que esos 4 euros corresponden a un bocadillo y una bolsa de patatas.

$$b + p = 4$$

La rebaja del 40% del bocadillo y del refresco la expresamos así:

$$(1 - 0,4)(b + r) = 3$$

Simplificando, conformamos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 3b + 2r + 2p = 15 \\ b + p = 4 \\ b + r = 5 \end{array} \right\}$$

El sistema dado es equivalente a la siguiente matriz:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Al comprobar que hay menores complementarios de orden 2 no nulos, pasamos a calcular el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 0 - 3 - 0 = 1$$

Como el determinante de A no es nulo: $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$

Por tanto el sistema es compatible y determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 10 + 8 - 0 - 15 - 0 = 3 \quad \text{3 euros cada bocadillo}$$

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 15 + 10 - 8 - 15 - 0 = 2 \quad \text{2 euros cada refresco}$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 8 + 15 - 0 - 12 - 10 = 1 \quad \text{1 euro cada bolsa de patatas}$$

Ejercicio 2.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

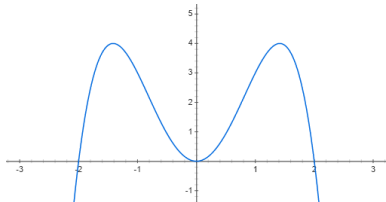
- Determinar su dominio.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

Nota: Utilizaré, en todo el ejercicio, la rama positiva de la función $f(x) = \pm\sqrt{4x^2 - x^4}$

- Dado que la función es una raíz de índice par sobre un polinomio, nos limitaremos a discernir para qué valores de x el radicando es positivo o nulo.

$$4x^2 - x^4 = 0 \quad x = 0 \quad 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

El polinomio del radicando es negativo en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y positivo o nulo en el resto



Por tanto el dominio viene definido por el siguiente intervalo cerrado: $Dom(f) = [-2, 2]$

- Calculamos la primera derivada de la función

$$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

Una función es creciente cuando su derivada es positiva. Es decreciente, cuando su derivada es negativa y puede tener extremo relativo si su derivada es cero.

$$4x - 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0; \pm\sqrt{2}$$

		$[-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2]$
Numerador	$4x - 2x^3$	+	-	+	-
Denominador	$+\sqrt{4x^2 - x^4}$	+	+	+	+
		+	-	+	-
		Creciente	Decreciente	Creciente	Decreciente

-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{4 - x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4 - x^2} = 2$$

Ejercicio 3.

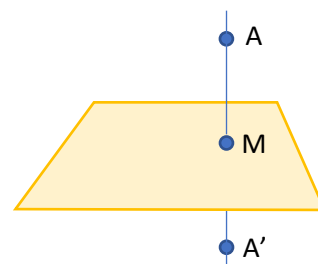
Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

- Determinar la distancia del punto A al plano π .
- Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
- Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

Determinamos la recta que une el punto a con el plano, perpendicularmente. Para ello utilizaremos como vector director de la recta el vector característico del plano $(2,3,4)$ y evidentemente el punto $A(2,1,0)$:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - z - 4 = 0 \\ 4y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$



El punto M que es el más próximo a A lo calculamos como la intersección de la recta y el plano. Resolvemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - z - 4 = 0 \\ 4y - 3z - 4 = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 36 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{matrix} \quad \boxed{M=(4,4,4)}$$

La distancia entre A y el plano es el módulo del vector \overline{AM} :

$$\overline{AM} = (4 - 2, 4 - 1, 4 - 0) = (2, 3, 4)$$

$$d(A, \pi) = |\overline{AM}| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

El punto simétrico A' tendrá como coordenadas, las componentes del vector $\overline{OA'}$

$$\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = \overline{OA} + 2\overline{AM} = (2, 1, 0) + 2(2, 3, 4) = (6, 7, 8)$$

Ejercicio 4.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

- Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
- Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

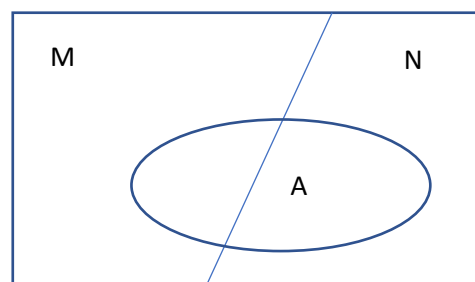
Definimos tres sucesos:

- Suceso M = "El enfermo es tratado con medicamento"
- Suceso N = "El enfermo es tratado con placebo"
- Suceso A = "El enfermo mejora"

Nos basaremos en la partición del gráfico de la derecha.

$$P(M) = 0,5 \quad P(A/M) = 0,8$$

$$P(N) = 0,5 \quad P(A/N) = 0,1$$



- Este apartado se realiza aplicando el Teorema de la probabilidad total

La probabilidad de que mejore es la probabilidad de que haya tomado medicamento o haya tomado placebo.

$$P(A) = P(M \cap A) + P(N \cap A)$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(A \cap M) = P(A/M)P(M)$$

Por tanto:

$$P(A) = P(A \cap M) + P(A \cap N) = P(A/M)P(M) + P(A/N)P(N) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,45$$

- En este apartado, se da por mejorado el paciente y se pregunta por la probabilidad de la causa. El teorema de Bayes trata la relación causa-efecto en los fenómenos probabilísticos.

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{P(A/M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = \frac{0,4}{0,45} = 0,89$$