

Monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión

1. Calcula monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 4x$; b) $f(x) = x^4 - 6x^2$; c) $f(x) = 3x - x^3$

Sol: a) $M\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$, $m\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$, $P.I.(0, 0)$;

b) $m(-\sqrt{3}, -9)$, $M(0, 0)$, $m(\sqrt{3}, -9)$, $P.I.(-1, -5)$, $P.I.(1, -5)$

c) $m(-1, -2)$, $M(1, 2)$, $P.I.(0, 0)$

2. Estudia las asíntotas, monotonía y curvatura de la función $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. ¿presenta máximos y mínimos? ¿Y puntos de inflexión? Sol: A.V. $x = -1$; A.H. $y = 0$. No presenta puntos críticos ni P.I.

3. Representa gráficamente la función $f(x) = |x^2 - 7|$. Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$. Halla sus máximos y mínimos relativos.

4. Dada la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5$, halla los valores de a y b de forma que $f(x)$ tenga un máximo en $x=1$ y un mínimo en $x=2$. Sol: $a=-9$ $b=12$.

5. Estudia los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y mínimos.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$; b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$; c) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$

Sol: a) $M(-1, 6)$; $m(3, -26)$; b) $M(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$; $m(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$;

c) $M(-1, 5e^{-1})$; $m(2, -e^2)$

6. Sea la función $f(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$ con b un parámetro real distinto de cero.

a) Determina las asíntotas de $f(x)$ para cualquier valor del parámetro b . Sol $y=0$.

b) Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)$ tenga un máximo en el punto $P(1, 3)$ Sol: $b=6$.

7. Halla los puntos de inflexión y estudia la concavidad de estas funciones:

a) $f(x) = 1 - (2 - x)^5$; b) $f(x) = xe^{-x}$ Sol: a) $P.I.(2, 1)$; b) $P.I.(2, 2e^{-2})$

8. Halla los coeficientes a, b, c, d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = 3 - 3x$ y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$. Sol: $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 2$