

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	Julio de 2019

OPCIÓN A

Problema 1. a) Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10 \\ 0 & 5 & -1 & \alpha-14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible y determinado para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Resolviendo el sistema se tiene: $y = -4$, $4(-4) - z = \alpha - 10 \rightarrow z = -\alpha - 6$,

$x + 8 + 2(-\alpha - 6) = 5 \rightarrow x = 2\alpha + 9$. Si $\alpha = -1$, la solución es $(7, -4, -5)$.

c) Sustituyendo la solución en el plano: $x + y + z = 0 \rightarrow 2\alpha + 9 - 4 - \alpha - 6 = 0 \rightarrow \alpha = 1$.

Problema 2. a) Aplicando la fórmula: $d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{32}{3}$.

b) Los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas son: $A(4,0,0)$, $B(0,8,0)$ y $C(0,0,4)$. Por tanto $\vec{AB} = (-4,8,0)$ y $\vec{AC} = (-4,0,4)$. El área será:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(32, 16, 32)| = \frac{1}{2} 48 = 24.$$

c) Como $\vec{AP} = (6,0,10)$, el volumen será:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} 512 = \frac{256}{3}.$$

Problema 3. a) $x^2 + 2x + 5$ no tiene soluciones reales, por tanto $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \frac{-3}{5}.$$

b) No tiene asíntotas verticales por ser $D = \mathbb{R}$ ni asíntota horizontal. Si tiene asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = -1.$$

La asíntota oblicua es $y = x - 1$.

$$c) \int \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+2x+5| + C.$$

El área es:

$$\int_1^5 \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| \Big|_1^5 = \frac{25}{2} - 5 + \ln 40 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 8 \right) = 8 + \ln 5.$$

Se supone que la función no cambia de signo en el intervalo $[1,5]$, lo cual es cierto, pues la única raíz real del numerador cae fuera de ese intervalo.

OPCIÓN B

$$\text{Problema 1 a) } AX = \alpha X \rightarrow AX - \alpha X = 0 \rightarrow (A - \alpha I)X = 0 \rightarrow X = (A - \alpha I)^{-1}.$$

$$\text{Esto exige que } |A - \alpha I| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha-5) \neq 0.$$

Por tanto, tiene una única solución si $\alpha \neq 2 \vee \alpha \neq 5$. Como el sistema es homogéneo, la solución es $(0,0)$.

$$b) (A - 5I)X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x & 4y \\ -x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}.$$

$$c) A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} \cdot 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{98} \cdot 2 A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{98} \cdot 2^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = A \cdot 2^{99} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el valor es $\beta = 2^{100}$.

$$\text{Problema 2. a) La recta en forma paramétrica es: } \begin{cases} x = \alpha - t \\ y = -4t \\ z = \beta t \end{cases}. \text{ Buscando la inter-}$$

$$\text{sección del plano y la recta, se tiene: } \alpha - t + 2(-4t) + 3\beta t = 6 \rightarrow t = \frac{6 - \alpha}{3(\beta - 3)}.$$

Si $\beta \neq 3$ la recta corta al plano (solución única). Si $\beta = 3 \wedge \alpha = 3$ la recta está contenida en el plano (infinitas soluciones). Si $\beta = 3 \wedge \alpha \neq 3$ la recta es paralela al plano (sin solución).

c) Ha de ser un plano paralelo al plano $\pi: x + 2y + 3z + D = 0$ y al pasar por el origen se tiene: $x + 2y + 3z = 0$.

Problema 3. a) Como $\overrightarrow{AP} = (x, 4 - x^2) - (0, 2) = (x, 2 - x^2)$, entonces la distancia es

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \text{ con } -2 \leq x \leq 2.$$

$$\text{b) } d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \rightarrow x \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 0.$$

Calculamos la distancia en los siguientes puntos:

$$d(-2) = \sqrt{8}, \quad d\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad d(0) = 0, \quad d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad d(2) = \sqrt{8}.$$

Hay dos máximos en $x = \pm 2$ y dos mínimos en $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) Como $y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & x < 0 \\ 2 - x & x > 0 \end{cases}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 [4 - x^2 - (2 + x)] dx + \int_0^2 [4 - x^2 - (2 - x)] dx = \\ & = \int_{-2}^0 (-x^2 - x + 2) dx + \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx = \\ & = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

