Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2019**

OPCIÓN A

Problema 1. a) El determinante de la matriz *A* es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a+1)^2$, y si $a \neq -1$ el rango *r(A)=3*. Si $a=-1$ se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, se tiene que rango *r(A)=2*. Si $a=1$ se tiene que $|A| = 8$.

Por tanto $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = \dfrac{2^3}{|A|} = \dfrac{8}{8} = 1$.

b) Si $a=-1$ al sistema le corresponde la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, se concluye que *r(A)=r(B)=2<3* y el sistema es compatible e indeterminado. El sistema $\begin{cases} -2x+2z=2 \\ -3x-2y-z=0 \end{cases}$ da las soluciones $(\lambda, -1/2-2\lambda, 1+\lambda)$.

c) $BB^{-1} = B(mB+nI) = mB^2 + nB \to I = mB^2 + nB = 3B^2 - 6B$ ya que $3B^2 = I - 6B$. Por tanto tiene inversa, *m=3* y *n=-6*.

Problema 2. La recta *r* en paramétricas es $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$. La recta *r* pasa por el punto $A(0,3,3)$ y tiene de dirección $\vec{u} = (1,2,2)$. La recta *s* pasa por el punto $B(0,-1,2)$ y tiene el mismo vector dirección. Por tanto las rectas son paralelas (coincidentes se descarta porque el punto *A* no pertenece a *s* ni el punto *B* pertenece a *r*).

El vector normal del plano pedido será: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-7,-1,4)$.

La ecuación del plano pertenece al haz de planos paralelos: $-7x - y + 4z + D = 0$ y al pasar por el punto *A*: $-3 + 12 + D = 0 \rightarrow -7x - y + 4z - 9 = 0$ será el plano pedido.

b) Obtenemos el plano que pasa por $P(0,-1,-2)$ y es perpendicular a la recta *r*: $x + y + 2z + D = 0$ y al pasar por el punto *P*: $-1 + 4 + D = 0 \rightarrow x + y + 2z - 3 = 0$.

Obtenemos el punto *Q* intersección de la recta con el plano:

$\lambda + 3 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -1$. El punto es $Q(-1,2,1)$.

La recta pedida pasará por *P* y tendrá de dirección $\overrightarrow{PQ}$: $\begin{cases} x = -\mu \\ y = -1 + 3\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$.

c) Si la recta *s* está contenida en el plano , su vector dirección debe ser perpendicular al vector normal del plano: $\vec{v} \cdot \vec{n} = (1,1,2) \cdot (1,-2,a) = 1 - 2 + 2a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Como la recta está contenida en el plano, al sustituir las coordenadas de la recta en la ecuación del plano tiene que haber infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \rightarrow t - 2(-1 + t) + \frac{1}{2}(2 - 2t) = b \rightarrow 0t = b - 3 \rightarrow b = 3$$

Problema 3.

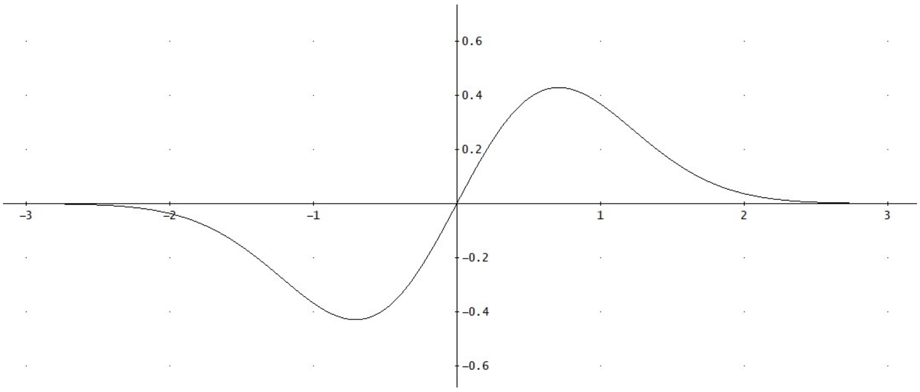
a) Dominio: $D = \Re$ y por tanto, asíntotas verticales no tiene.

Asíntota horizontal: $y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$. La función pasa por el origen y es impar.

Derivando: $y' = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, se anula $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty,-1/\sqrt{2})$ $y' < 0$ decreciente; $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ $y' > 0$ creciente; $(1/\sqrt{2},\infty)$ $y' < 0$ decreciente. La gráfica presenta un mínimo en $(-1/\sqrt{2},-0.429)$ y un máximo en $(1/\sqrt{2},0.429)$.

b) La gráfica de la función es:



c) $g(x) = xe^{-x^2} + ax$. El teorema de Rolle exige que la función sea continua y derivable en $[0,1]$, que es cierto porque lo es en $\Re$. Además debe verificar que $g(0) = g(1) \to 0 = -e^{-1} + a \to a = -\dfrac{1}{e}$.

d) $\int xe^{-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$. Integrando por partes:

$$\int xe^{-x}dx \to \left\{\begin{matrix} f = x \to f' = 1 \\ g' = e^{-x} \to g = -e^{-x} \end{matrix}\right\} \to -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

OPCIÓN B

Problema 1 a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha - 28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 14 \end{pmatrix}.$$

si $\alpha = 14$, *r(A)=r(B)=2*, sistema compatible indeterminado.

si $\alpha \neq 14$, *r(A)=2 y r(B)=3*, sistema incompatible.

b) $y = -7 - 2z \to x = 4 - (-7 - 2z) - z = 11 + z$. Por tanto las infinitas soluciones del sistema son: $(11 + \lambda, -7 - 2\lambda, \lambda)$.

c) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & \alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & k-7 & \alpha - 28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & k-11 & \alpha - 14 \end{pmatrix}.$$

si $k \neq 11$, *r(A)=r(B)=3*, sistema compatible determinado.

Problema 2. a) Los planos paralelos al plano $9x+12y+20z-180=0$ tendrán de expresión: $9x+12y+20z+D=0$.

Aplicando la fórmula de la distancie entre planos paralelos:

$$\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D+180|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}=\frac{|D+180|}{25}=4\rightarrow |D+180|=100\rightarrow\begin{cases}D_1=-80\\ D_2=-280\end{cases}.$$

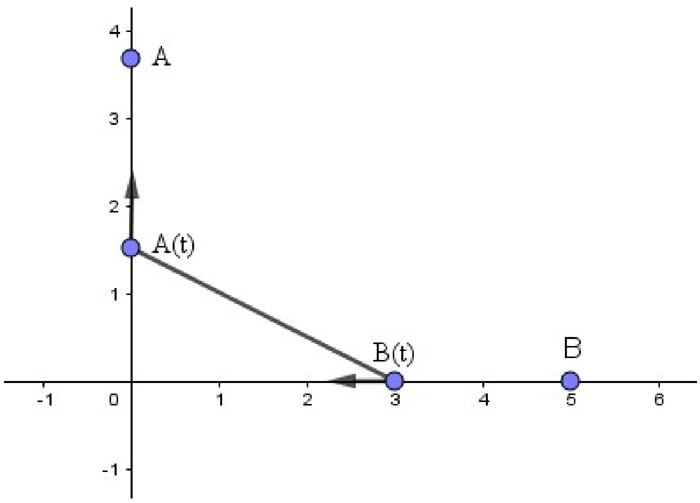
b) El plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(20,0,0)$, $B(0,15,0)$ y $C(0,0,9)$. Tenemos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-20,15,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-20,0,9)$.

Para obtener el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{400}{\sqrt{625}\sqrt{481}}\approx 0.73\rightarrow\alpha\approx\arccos(0.73)=43.15^{\circ}.$$

c) $$V=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}20&0&0\\0&15&0\\0&0&9\end{matrix}\right\|=\frac{2700}{6}=450\ u.v.$$

Problema3. a) En el gráfico, *A* representa el punto de llegada del móvil que partiendo desde el origen se desplaza a lo largo del eje de ordenadas a una velocidad de 30 Km/h. El punto B es el de partida del móvil que se desplaza hacia el origen a lo largo del eje de abscisas a una velocidad de 40 Km/h.



Las coordenadas de los móviles en un instante: $A(t)=(0,30t)$ y $B(t)=(250-40t,0)$.

Por tanto la función que da la distancia entre ellos en función del tiempo es:

$$f(t)=\sqrt{(250-40t)^2+(-30t)^2}=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$$

b) $T = \frac{250}{40} = \frac{375/2}{30} = 6.25\ h$ y ambos móviles tardan lo mismo en hacer sus recorridos respectivos.

$f''(t) = \frac{5000t - 20000}{2\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}}$ que se anula en $t = 4\ h$.

La función en $[0,4)$ $f'(t) < 0$ decreciente y en $(4,6.25]$ $f'(t) > 0$ creciente.

c) La distancia mínima es $f(4) = 150\ Km$ y la máxima es en el extremo $f(0) = 250\ Km$ ya que $f(6.25) = 187.5\ Km$.