Galicia. Examen EBAU resuelto de Matemáticas CC.SS.. Juni

OPCIÓN A

1. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.

b) Calcula la inversa de la matriz $A-I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $A\cdot X - B = X$ y calcúlala.

a) La matriz traspuesta de B se obtiene intercambiando las filas por las columnas, o las columnas por las filas en la matriz B:

$$B^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

La multiplicación que nos piden, es posible realizarla, ya que las columnas de una matriz coinciden con las filas de la siguiente

$$B^t\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Multiplicamos dos de ellas, por ejemplo, las dos primeras y el resultado lo multiplicamos con la que queda:

$$B^t\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}13 & 5 & 3\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

La matriz pedida es la siguiente:

$$\boldsymbol{B^t\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix}13 & 5 & 3\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}}$$

b) Primero calculamos la matriz de la cual nos piden la inversa:

$$A-I=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2'=F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

La matriz inversa es:

$$\boldsymbol{(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

c) Despejamos la matriz X:

$$A\cdot X-B=X\quad\Rightarrow\quad A\cdot X-X=B\quad\Rightarrow\quad (A-I)\cdot X=B$$

$$(A-I)^{-1}\cdot(A-I)\cdot X=(A-I)^{-1}\cdot B\quad\Rightarrow\quad X=(A-I)^{-1}\cdot B$$

Como la matriz inversa que necesitamos es la que tenemos calculada en el apartado anterior, sólo queda hacer la multiplica por la matriz B:

$$X=(A-I)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz X es la siguiente:

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

2. El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la fun

$$\boldsymbol{N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}}$$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4,2 millones.
b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

a) A partir del número de espectadores que hay en el segundo año podemos calcular el valor de la constante:

$$N(2) = 4{,}2 \quad \Rightarrow \quad K + \frac{8 \cdot 2}{1+2^2} = 4{,}2 \quad \Rightarrow \quad K = 4{,}2 - \frac{16}{5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K = 1}$$

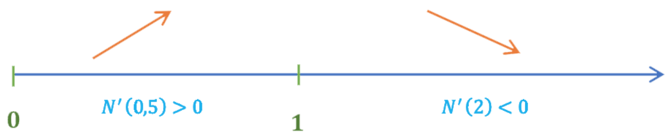
b) Para calcular el crecimiento y decrecimiento necesitamos la primera derivada de la función:

$$N'(t) = \frac{8 \cdot (1+t^2) - 8t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{8 + 8t^2 - 16t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{8 \cdot (-t^2+1)}{(1+t^2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para calcular los puntos críticos:

$$N'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8 \cdot (-t^2+1)}{(1+t^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1$$

Nos quedamos sólo con el valor positivo, ya que el tiempo tiene que ser mayor o igual a cero. Miramos el signo de la prime intervalos resultantes:



$$N(t)\ crece\ en\ (0,1)$$
$$N(t)\ decrece\ (1,\infty)$$

El número de espectadores de la serie aumenta durante el primer año y a partir de ese momento comienza a dismi evidentemente la función tiene un máximo en t = 1. Calculamos el número de espectadores en ese momento:

$$N(1) = 1 + \frac{8 \cdot 1}{1+1^2} \quad \Rightarrow \quad N(1) = 5$$

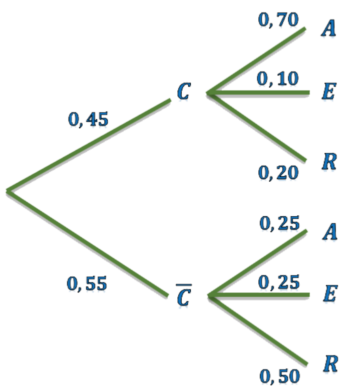
Al final del primer año la serie tiene su máxima audiencia, llegando esta a 5 millones de espectadores.

3. Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en conso acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25% son de acción, otro 25% de estrat otras categorías.
a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?
b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a tra

a) Definimos los siguientes sucesos.

C = “videojuegos que se juegan en consola”
A = “videojuegos con temática de acción”
E = “videojuegos con temática de estrategia”
R = “videojuegos con temática distinta de acción y estrategia”

Con los datos del problema podemos hacer el siguiente diagrama de árbol:



La probabilidad de que un juego sea de acción es una probabilidad total, porque hay tanto juegos de acción que se juegan en móvil:

$$P(A) = P(C \cap A) + P(\bar{C} \cap A)$$

$$P(A) = P(C) \cdot P(A/C) + P(\bar{C}) \cdot P(A/\bar{C})$$

$$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}70 + 0{,}55 \cdot 0{,}25$$

$$P(A) = 0{,}45$$

Por lo tanto, el 45% de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción.

b) Antes de calcular lo que nos piden vamos a calcular la probabilidad de que un videojuego sea de estrategia. Lo hacemo apartado anterior:

$$P(E) = P(C \cap E) + P(\bar{C} \cap E)$$

$$P(E) = P(C) \cdot P(E/C) + P(\bar{C}) \cdot P(E/\bar{C})$$

$$P(E) = 0{,}45 \cdot 0{,}10 + 0{,}55 \cdot 0{,}25$$

$$P(E) = 0{,}18$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada que nos piden:

$$P(\bar{C}/E) = \frac{P(\bar{C} \cap E)}{P(E)} = \frac{P(\overline{C}) \cdot P(E/\bar{C})}{P(E)}$$

$$P(\bar{C}/E) = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}25}{0{,}18}$$

$$P(\bar{C}/E) = 0{,}75$$

La probabilidad de que un jugador esté jugando a través del móvil sabiendo que el videojuego es de estrategia es de 0,75.

4. Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

a) Sea "p = proporción (poblacional) de votantes de un partido".

Tenemos que, siendo $\hat{p}$ el estadístico proporción de votantes de un partido (en una muestra aleatoria) sería la media de intervalo:

$$\hat{p} = \frac{0{,}23 + 0{,}31}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hat{p} = 0{,}27}$$

b) La expresión del intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \right)$$

Si substituimos los valores que tenemos nos queda:

$$\left(0{,}27 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}}, 0{,}27 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}} \right)$$

Como tenemos el intervalo confianza

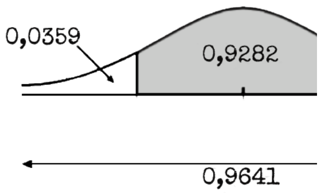
$$\left(0{,}27 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}}, 0{,}27 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}} \right) = (0{,}23; 0{,}31)$$

Igualando y resolviendo cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $z_{\alpha/2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0{,}27 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}} = 0{,}23 \\ \\ 0{,}27 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}} = 0{,}31 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}80$$

Mirando en la tabla de la distribución normal, podemos calcular la probabilidad que deja ese valor tras de si:

$$\phi(1{,}80) = 0{,}9641$$



A partir de aquí podemos calcular el nivel de confianza:

$$\alpha/2 = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359$$

$$\alpha = 2 \cdot 0{,}0359 = 0{,}0718$$

$$1 - \alpha = 1 - 0{,}0718 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0{,}9282$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza se ha construido con un nivel de confianza del 92,82%.

c) El error de estimación se calcula:

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$$

$$E = \pm 1{,}80 \cdot \sqrt{\frac{0{,}27 \cdot (1-0{,}27)}{400}}$$

$$E = \pm 0{,}04$$

Admitimos un error máximo de estimación de $\pm \mathbf{0{,}04}$ para el intervalo anterior.

OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y u vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.

b) Representa la región factible.

c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Definimos:

x: número de lotes con la oferta 1.
y: número de lotes con la oferta 2.

Como hay 2 000 camisetas y el lote 1 lleva una y el lote 2 lleva 3, obtenemos la primera restricción:

$$1 \cdot x + 3 \cdot y \le 2\,000$$

Obtenemos la siguiente restricción haciendo lo mismo con los chándales:

$$1 \cdot x + 1 \cdot y \le 1\,000$$

Nos dice el enunciado que no se va a ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 lotes de la oferta 2:

$$x \ge 200$$

$$y \ge 100$$

Todas las restricciones que determinan la región factible son las siguientes:

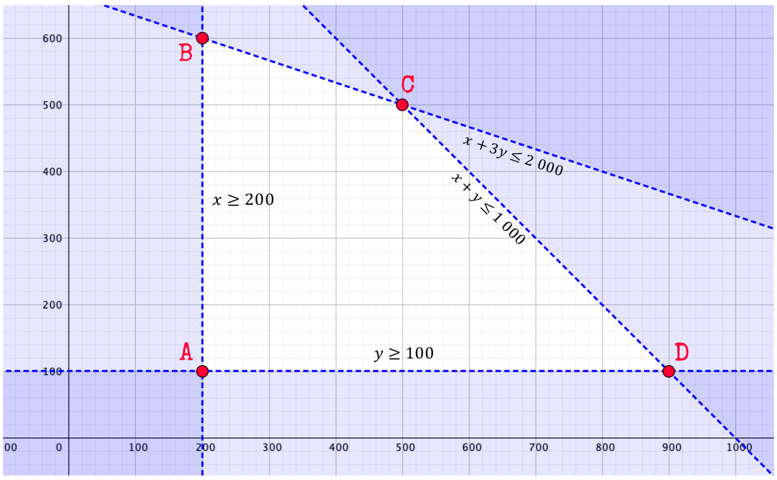
$$x + 3y \le 2\,000$$

$$x + y \le 1\,000$$

$$x \ge 200$$

$$y \ge 100$$

b) Representamos las restricciones e identificamos la región factible:



Calculamos los vértices:

$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases} \Rightarrow A(200,100) \quad ; \quad \begin{cases} x \quad\;\; = \;\; 200 \\ x + 3y = 2\,000 \end{cases} \Rightarrow B(200,600)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 2\,000 \\ x + \quad y = 1\,000 \end{cases} \Rightarrow C(500,500) \; ; \begin{cases} x + y = 1\,000 \\ \quad\;\; y = \quad 100 \end{cases} \Rightarrow D(900,100)$$

c) La función de ingresos sería la siguiente:

$$I(x,y) = 30x + 50y$$

Ahora calculamos en cuál de los vértices toma esta función el valor mínimo:

$A \;\Rightarrow\; I\,(200,100) = 30 \cdot 200 + 50 \cdot 100 = 11\,000$ €

$B \;\Rightarrow\; I\,(200,600) = 30 \cdot 200 + 50 \cdot 600 = 36\,000$ €

$C \;\Rightarrow\; I\,(500,500) = 30 \cdot 500 + 50 \cdot 500 = 40\,000$ €

$D \;\Rightarrow\; I\,(900,100) = 30 \cdot 900 + 50 \cdot 100 = 32\,000$ €

Para maximizar los ingresos se deberían vender 500 lotes de la oferta 1 y otros 500 de la oferta 2. Con esas ventas los ingr a 40 000 €.

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

a) Como la función es una ecuación de segundo grado, se trata de una parábola:

Corte eje OX: y = 0

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2{,}0) \\ (4{,}0) \end{cases}$$

Corte eje OY: x = 0

$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8 \quad \Rightarrow$ Punto de corte: $(0{,}8)$

Vértice:

$$y = x^2 - 6x + 8$$

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot (1)} = 3 \quad ; \quad V_y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 \quad \Rightarrow \quad V(3,-1)$$

Curvatura:

La parábola es convexa ya que $a = 1 > 0$.

Monotonía:

Como es convexa sabemos que decrece hasta el vértice y crece después, por lo tanto:

$f(x)\ decrece\ (-\infty, 3)$

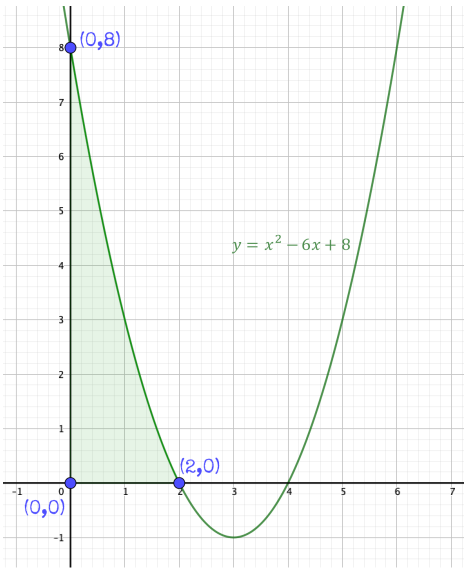
$f(x)\ crece\ (3, +\infty)$

Extremo relativo:

Al ser convexa, tendrá un mínimo en el vértice:

$Mínimo\ (3,-1)$

b) Con estos datos podemos dibujar la parábola e identificar el área a calcular:



Como se ve en el dibujo, el área queda determinada por la parábola, por el eje OX (y = 0) y por el eje OY (x = 0). Plantea calculamos el área sombreada:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x\right]_0^2 = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x\right]_0^2$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0\right)$$

$$A = \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{8 - 36 + 48}{3}$$

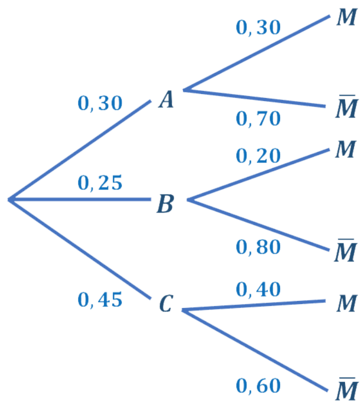
$$\boldsymbol{A = \frac{20}{3}\ u^2}$$

3. En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. A consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres.
a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

a) Vamos a definir los siguientes sucesos:

A: "consumidores de agua mineral que toman la marca A"
B: "consumidores de agua mineral que toman la marca B"
C: "consumidores de agua mineral que toman la marca C"
M: "consumidores de agua mineral que son mujeres"

Podemos ordenar estos datos en un diagrama de árbol:



La probabilidad de que sea mujer una probabilidad total, porque hay mujeres que consumen la marca A, la B y la C:

$$P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M)$$

$$P(M) = P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) + P(C) \cdot P(M/C)$$

$$P(M) = 0{,}30 \cdot 0{,}30 + 0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}45 \cdot 0{,}40$$

$$P(M) = 0{,}32$$

La probabilidad de que, seleccionado al azar un consumidor de agua mineral en esa población, sea mujer es de 0,32.

b) Ahora nos piden calcular una probabilidad condicionada:

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B) \cdot P(M/B)}{P(M)}$$

$$P(B/M) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}20}{0{,}32}$$

$$P(B/M) = 0{,}16$$

La probabilidad de que consuma la marca B sabiendo que es mujer es de 0,16.