

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La medición del mundo

El cielo estaba encapotado, la tierra, embarrada. Trepó por encima de un seto y se encontró, jadeante, sudado y cubierto de agujas de pino, delante de dos muchachas. Al preguntarle qué hacía allí, explicó, nervioso, la técnica de la triangulación: conociendo un lado y dos ángulos de un triángulo, se podían determinar los otros lados y el ángulo desconocido. Así que se escogía un triángulo en cualquier lugar de aquella tierra de Dios, se medía el lado de más fácil acceso, y se determinaban los ángulos para el tercer punto con ese aparato. Levantó el teodolito y lo giró, así así, y fíjense ustedes, así, con dedos torpes, de un lado a otro, como si fuera la primera vez. Luego añádate una serie de tales triángulos uno junto a otro. [...]

Pero un paisaje, repuso la mayor de las dos, no era un plano.

Él la miró fijamente. Había faltado la pausa. Como si ella no precisase reflexionar. Desde luego que no, contestó él sonriendo.

Los ángulos de un triángulo, dijo ella, sumaban en un plano ciento ochenta grados, pero no sobre una esfera. Con eso quedaba dicho todo.

Él la observó como si la viera entonces por primera vez. Ella le devolvió la mirada enarcando las cejas. Sí, dijo él. Bien. Para compensarlo, había que encoger en cierto modo los triángulos después de la medición hasta un tamaño infinitamente pequeño. En principio una sencilla operación diferencial. Aunque de esa forma... Se sentó en el suelo y sacó su bloc. De esa forma, murmuró mientras pergeñaba sus anotaciones, todavía no lo había realizado nadie. Cuando levantó la vista, se había quedado solo. [...]

Pidió por carta la mano de Johanna y fue rechazado. No tenía nada contra él, escribió ella, sólo que dudaba que la existencia a su lado fuese saludable. Sospechaba que él extraña la vida y la energía de las personas de su entorno, igual que la tierra del sol y el mar de los ríos, de que cerca de él una estaría condenada a la palidez y a la semirrealidad de una existencia de espectro.

[Pasado un tiempo, lo volvió a intentar y, esta vez, fue aceptado. «Él», uno de los dos protagonistas de esta novela, se llamaba Gauss y fue uno de los astrónomos, físicos y matemáticos más importantes del siglo XIX.]

DANIEL KEHLMANN

En una superficie de tierra plana, hay tres árboles, A , B y C , y no podemos acceder al árbol C . La distancia entre A y B es de 26 m, y con un teodolito, como el de Gauss, medimos los ángulos \widehat{CAB} y \widehat{CBA} y obtenemos 48° y 60° , respectivamente. Con estos datos, ¿qué otras distancias o áreas podemos calcular? Basándote en esto, explica la técnica de la triangulación.

Podemos hallar el ángulo desconocido, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° :

$$180^\circ - 60^\circ - 48^\circ = 72^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 48^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{26}{\operatorname{sen} 72^\circ} \rightarrow \begin{cases} a = 20,32 \text{ m} \\ b = 23,68 \text{ m} \end{cases}$$

Para calcular el área podemos aplicar la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad A = \sqrt{35(35-20,32)(35-23,68)(35-26)} = 228,79 \text{ m}^2$$

La técnica de la triangulación consiste en la aplicación de la trigonometría para hallar distancias desconocidas.

ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

001 Halla el término que falta para que estos pares de razones formen una proporción.

a) $\frac{4}{7}$ y $\frac{10}{x}$

b) $\frac{3}{10}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x}{3}$ y $\frac{x}{2}$

a) $x = 17,5$

b) $x = 0,6$

c) $x = 6$

002 Calcula el ángulo complementario y suplementario de:

a) 15° b) 47° c) 78° d) 89°

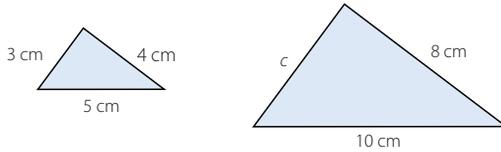
a) El ángulo complementario de 15° es 75° y el suplementario es 165° .

b) El ángulo complementario de 47° es 43° y el suplementario es 133° .

c) El ángulo complementario de 78° es 12° y el suplementario es 102° .

d) El ángulo complementario de 89° es 1° y el suplementario es 91° .

003 Estos triángulos son semejantes. ¿Cuánto tiene que medir c ?



Como los triángulos son semejantes, las medidas de los lados son proporcionales. Por tanto, c tiene que medir 6 cm.

004 Razona por qué son semejantes los tres triángulos rectángulos que aparecen al trazar la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

Para explicar que los triángulos son semejantes, vamos a demostrar que los tres ángulos son iguales:

- 1.º Los tres triángulos tienen un ángulo recto.
- 2.º El triángulo mediano y el triángulo menor comparten un ángulo agudo con el triángulo mayor.
- 3.º Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es un valor constante, si coincide la medida de dos ángulos, el tercer ángulo será igual.

005 Indica cuáles de estas ternas de longitudes corresponden a los lados de un triángulo.

a) 3 cm, 4 cm y 5 cm

c) 5 cm, 15 cm y 30 cm

b) 1 cm, 2 cm y 3 cm

d) 15 cm, 8 cm y 20 cm

- a) Pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, ya que el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.
- b) No pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, puesto que el lado mayor es igual que la suma de los otros lados.
- c) No pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, porque el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.
- d) Pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo, ya que el lado mayor es menor que la suma de los otros lados.

Trigonometría

006 En un triángulo \widehat{ABC} , el ángulo $\widehat{A} = 105^\circ$. ¿Cuánto suman \widehat{B} y \widehat{C} ?

Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180° :

$$180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Por tanto, los ángulos \widehat{B} y \widehat{C} deben sumar 75° .

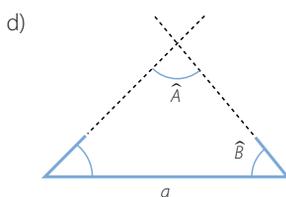
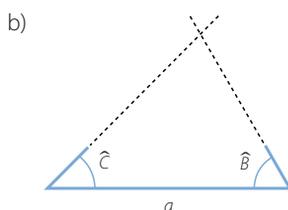
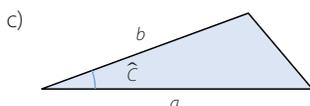
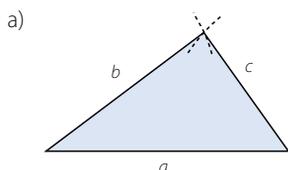
007 Construye triángulos con los siguientes datos.

a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$

c) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $\widehat{C} = 20^\circ$

b) $a = 5 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$ y $\widehat{C} = 45^\circ$

d) $a = 5 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 50^\circ$ y $\widehat{A} = 85^\circ$



ACTIVIDADES

001 Expresa en grados los ángulos cuya amplitud es 1, 2, 3, 4, 5 y 6 radianes.

Como $2\pi \text{ rad}$ son 360° :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 2\pi \text{ rad} \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ 1 \text{ rad} \xrightarrow{\text{serán}} x \text{ grados} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{2\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

$$2 \text{ rad} = 114^\circ 35' 30''$$

$$3 \text{ rad} = 171^\circ 53' 14''$$

$$4 \text{ rad} = 229^\circ 10' 59''$$

$$5 \text{ rad} = 286^\circ 28' 44''$$

$$6 \text{ rad} = 343^\circ 46' 29''$$

002 Expresa en radianes la medida de los ángulos de los cuatro primeros polígonos regulares.

Si llamamos n al número de lados del polígono regular, entonces la medida de sus ángulos viene dada por la expresión: $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$

Los ángulos de un triángulo equilátero miden: $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

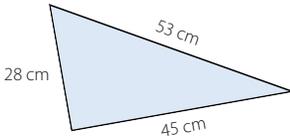
Los ángulos de un cuadrado miden: $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

Los ángulos de un pentágono regular miden: $108^\circ = \frac{3\pi}{5}$ rad

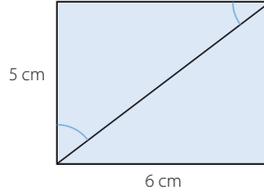
Los ángulos de un hexágono regular miden: $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad

003 Calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

a)



b)



a) Llamamos \hat{C} al ángulo opuesto al lado de 28 cm.

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{28}{53} = 0,53$$

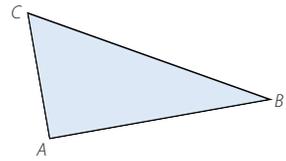
$$\operatorname{sec} \hat{C} = \frac{53}{28} = 1,89$$

$$\operatorname{cos} \hat{C} = \frac{45}{53} = 0,85$$

$$\operatorname{cosec} \hat{C} = \frac{53}{45} = 1,18$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{28}{45} = 0,62$$

$$\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{45}{28} = 1,61$$



Llamamos \hat{B} al ángulo opuesto al lado de 45 cm.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{45}{53} = 0,85$$

$$\operatorname{sec} \hat{B} = \frac{53}{45} = 1,18$$

$$\operatorname{cos} \hat{B} = \frac{28}{53} = 0,53$$

$$\operatorname{cosec} \hat{B} = \frac{53}{28} = 1,89$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{45}{28} = 1,61$$

$$\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{28}{45} = 0,62$$

b) Calculamos la diagonal del rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \text{ cm}$$

Llamamos \hat{C} al ángulo opuesto al lado de 6 cm.

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{6}{\sqrt{61}} = 0,77$$

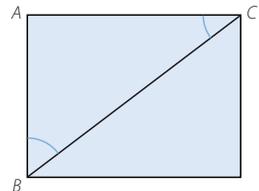
$$\operatorname{sec} \hat{C} = \frac{\sqrt{61}}{6} = 1,3$$

$$\operatorname{cos} \hat{C} = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0,64$$

$$\operatorname{cosec} \hat{C} = \frac{\sqrt{61}}{5} = 1,56$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{6}{5} = 1,2$$

$$\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{5}{6} = 0,83$$



Llamamos \hat{B} al ángulo opuesto al lado de 5 cm.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0,64$$

$$\operatorname{sec} \hat{B} = \frac{\sqrt{61}}{5} = 1,56$$

$$\operatorname{cos} \hat{B} = \frac{6}{\sqrt{61}} = 0,77$$

$$\operatorname{cosec} \hat{B} = \frac{\sqrt{61}}{6} = 1,3$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Trigonometría

004 Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades.

a) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ b) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ c) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

a) $\sec \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\cos \alpha}$

b) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

c) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

005 Calcula las razones trigonométricas del ángulo si:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = 0,49$ c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ d) $\operatorname{sen} \alpha = 0,2$

a) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \sec \alpha = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{15}$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 4$

b) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} \rightarrow \cos \alpha = 0,9 \rightarrow \sec \alpha = 1,11$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = 0,9} \operatorname{sen}^2 \alpha + 0,9^2 = 1$

$\operatorname{sen} \alpha = 0,44 \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 2,29$

$\operatorname{tg}^2 \alpha = 0,49 \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = 2,04$

c) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \alpha = \frac{2}{3}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= 1 \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = 0,2} 0,2^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \\
 &\rightarrow \operatorname{cos} \alpha = 0,98 \rightarrow \operatorname{sec} \alpha = 1,02 \\
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = 0,2; \operatorname{cos} \alpha = 0,98} \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,2}{0,98} = 0,2 \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = 4,9 \\
 \operatorname{sen} \alpha &= 0,2 \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 5
 \end{aligned}$$

006 Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,3$ y $\operatorname{cos} \alpha = 0,8$ c) $\operatorname{cos} \alpha = 0,1$ y $\operatorname{sen} \alpha = 0,99$
 b) $\operatorname{sen} \alpha = 0,72$ y $\operatorname{tg} \alpha = 1,04$

a) No existe, ya que no cumple las relaciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1; 0,3^2 + 0,8^2 = 0,73 \neq 1$$

b) Sí existe, pues cumple las relaciones trigonométricas.

$$\text{Calculamos el coseno: } 1,04 = \frac{0,72}{\operatorname{cos} \alpha} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = 0,69 \rightarrow 0,72^2 + 0,69^2 = 1$$

c) Sí existe, porque cumple las relaciones trigonométricas.

$$0,1^2 + 0,99^2 = 1$$

007 Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin utilizar el teorema de Pitágoras.

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot \operatorname{cos} 30^\circ = 4,33 \text{ cm}$$

La altura del triángulo es 4,33 cm.

008 Si la altura de un triángulo equilátero mide 5,196 cm; calcula cuánto mide el lado del triángulo, sin utilizar el teorema de Pitágoras.

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{5,196}{l} \rightarrow l = 6 \text{ cm}$$

El lado del triángulo mide 6 cm.

009 Halla el valor de las siguientes expresiones.

- a) $\operatorname{cos} 30^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$ c) $\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{cos}^2 30^\circ$
 b) $\operatorname{cos}^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ$ d) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} 30^\circ$

$$\text{a) } \operatorname{cos} 30^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$$

$$\text{b) } \operatorname{cos}^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{cos}^2 30^\circ = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-3 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{12}$$

Trigonometría

010 Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 66° | d) 135° |
| b) 18° | e) 342° |
| c) 175° | f) 120° |

- a) Es del 1.^{er} cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.
- b) Es del 1.^{er} cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.
- c) Es del 2.^o cuadrante; el seno y la cosecante son positivas, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
- d) Es del 2.^o cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
- e) Es del 4.^o cuadrante; el coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.
- f) Es del 2.^o cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

011 Razona la respuesta.

- a) ¿Por qué no existe $\operatorname{tg} 90^\circ$?
- b) ¿Ocurre lo mismo con todos los ángulos que son múltiplos de 90° ?

- a) No existe, porque $\cos 90^\circ = 0$.
- b) Si multiplicamos 90° por un número par, la tangente es cero, ya que el seno vale 0 y el coseno vale 1.
Si multiplicamos 90° por un número impar, la tangente no está definida, puesto que el coseno vale 0.

012 Indica el signo de las razones trigonométricas de los ángulos cuya amplitud es múltiplo de 90° .

Estudiamos los ángulos que son múltiplos de 90° :

- Para $360^\circ \cdot k$, siendo k un número natural.
El coseno y la secante son positivos, el seno y la tangente valen 0 y la cosecante y la cotangente no están definidas.
- Para $90^\circ + 360^\circ \cdot k$, siendo k un número natural.
El seno y la cosecante son positivos, el coseno y la cotangente valen 0 y la secante y la tangente no están definidas.
- Para $180^\circ + 360^\circ \cdot k$, siendo k un número natural.
El coseno y la secante son negativos, el seno y la tangente valen 0 y la cosecante y la cotangente no están definidas.
- Para $270^\circ + 360^\circ \cdot k$, siendo k un número natural.
El seno y la cosecante son negativos, el coseno y la cotangente valen 0 y la secante y la tangente no están definidas.

013 Sabiendo que $\cos 50^\circ = 0,6428$; halla las razones trigonométricas de:

- a) 130° b) 230° c) -50° d) 310°

Calculamos el seno de 50° :

$$\operatorname{sen}^2 50^\circ + 0,6428^2 = 1 \quad \operatorname{sen} 50^\circ = 0,766$$

a) $-\cos 50^\circ = \cos 130^\circ = -0,6428$; $\operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 130^\circ = 0,766$; $\operatorname{tg} 130^\circ = -1,1918$
 $\operatorname{sec} 130^\circ = -1,5557$; $\operatorname{cosec} 130^\circ = 1,3054$; $\operatorname{cotg} 130^\circ = -0,8391$

b) $-\cos 50^\circ = \cos 230^\circ = -0,6428$; $-\operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 230^\circ = -0,766$
 $\operatorname{tg} 230^\circ = 1,1918$; $\operatorname{sec} 230^\circ = -1,5557$; $\operatorname{cosec} 230^\circ = -1,3054$; $\operatorname{cotg} 230^\circ = 0,8391$

c) $\cos 50^\circ = \cos (-50^\circ) = 0,6428$; $-\operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} (-50^\circ) = -0,766$
 $\operatorname{tg} (-50^\circ) = -1,1918$; $\operatorname{sec} (-50^\circ) = 1,5557$; $\operatorname{cosec} (-50^\circ) = -1,3054$
 $\operatorname{cotg} (-50^\circ) = -0,8391$

d) $\cos 50^\circ = \cos 310^\circ = 0,6428$; $-\operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 310^\circ = -0,766$
 $\operatorname{tg} 310^\circ = -1,1918$; $\operatorname{sec} 310^\circ = 1,5557$; $\operatorname{cosec} 310^\circ = -1,3054$
 $\operatorname{cotg} 310^\circ = -0,8391$

014 Calcula las razones trigonométricas en función de las razones de otros ángulos del 1.º cuadrante.

- a) 475° b) 885° c) 1.130° d) 695° e) 1.215° f) 985°

a) $\operatorname{sen} 475^\circ = \operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen} 65^\circ = 0,9063$
 $\cos 475^\circ = \cos 115^\circ = -\operatorname{sen} 65^\circ = -0,4226$
 $\operatorname{tg} 475^\circ = \operatorname{tg} 115^\circ = -\operatorname{tg} 65^\circ = -2,1445$

b) $\operatorname{sen} 885^\circ = \operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ = 0,2588$
 $\cos 885^\circ = \cos 165^\circ = -\cos 15^\circ = -0,9659$
 $\operatorname{tg} 885^\circ = \operatorname{tg} 165^\circ = -\operatorname{tg} 15^\circ = -0,2679$

c) $\operatorname{sen} 1.130^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ = 0,766$
 $\cos 1.130^\circ = \cos 50^\circ = 0,6428$
 $\operatorname{tg} 1.130^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ = 1,1917$

d) $\operatorname{sen} 695^\circ = \operatorname{sen} 335^\circ = -\operatorname{sen} 25^\circ = -0,4226$
 $\cos 695^\circ = \cos 335^\circ = \cos 25^\circ = 0,9063$
 $\operatorname{tg} 695^\circ = \operatorname{tg} 335^\circ = -\operatorname{tg} 25^\circ = 0,4663$

e) $\operatorname{sen} 1.215^\circ = \operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos 1.215^\circ = \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\operatorname{tg} 1.215^\circ = \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$

f) $\operatorname{sen} 985^\circ = \operatorname{sen} 265^\circ = -\operatorname{sen} 85^\circ = -0,9962$
 $\cos 985^\circ = \cos 265^\circ = -\cos 85^\circ = -0,0872$
 $\operatorname{tg} 985^\circ = \operatorname{tg} 265^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ = 11,4301$

Trigonometría

015 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$, calcula:

a) $\text{sen } (90^\circ - \alpha)$ b) $\text{sen } (180^\circ - \alpha)$ c) $\text{sen } (-\alpha)$

a) $\frac{1}{5} = \text{sen } \alpha = \text{cos } (90^\circ - \alpha)$

Sustituimos en la expresión para calcular $\text{sen } (180^\circ - \alpha)$:

$$\text{cos}^2(90^\circ - \alpha) + \text{sen}^2(90^\circ - \alpha) = 1; \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) $\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$

c) $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{1}{5}$

016 Si $\text{sen } 18^\circ = 0,309$ y $\text{cos } 18^\circ = 0,951$; halla:

a) $\text{sen } 72^\circ$ b) $\text{cos } 162^\circ$ c) $\text{tg } (-72^\circ)$

a) $\text{sen } 72^\circ = \text{sen } (90^\circ - 18^\circ) = \text{cos } 18^\circ = 0,951$

b) $\text{cos } 162^\circ = \text{cos } (180^\circ - 18^\circ) = -\text{cos } 18^\circ = -0,951$

c) $\text{tg } (-72^\circ) = -\text{tg } 72^\circ = -\text{tg } (90^\circ - 18^\circ) =$
 $= -\frac{1}{\text{tg } 18^\circ} = -\frac{\text{cos } 18^\circ}{\text{sen } 18^\circ} = -\frac{0,951}{0,309} = -3,0777$

017 Indica cómo son los ángulos α y β si cumplen las siguientes igualdades.

a) $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ b) $\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta$ c) $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$

a) Los ángulos son complementarios.

b) Los ángulos son opuestos.

c) Los ángulos son suplementarios.

018 A partir de las razones de 30° y 45° , calcula las razones trigonométricas de 75° y $22,5^\circ$.

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (30^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 30^\circ \cdot \text{cos } 45^\circ + \text{cos } 30^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 0,97$$

$$\text{cos } 75^\circ = \text{cos } (30^\circ + 45^\circ) = \text{cos } 30^\circ \cdot \text{cos } 45^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,26$$

$$\text{tg } 75^\circ = \text{tg } (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\text{tg } 30^\circ + \text{tg } 45^\circ}{1 - \text{tg } 30^\circ \cdot \text{tg } 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = 3,73$$

$$\text{sen } 22,5^\circ = \text{sen } \frac{45^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm 0,38$$

$$\cos 22,5^\circ = \cos \frac{45^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm 0,92$$

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \pm 0,41$$

019 Expresa, en función de $\operatorname{tg} \alpha$, las razones trigonométricas $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \xrightarrow{\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha} \frac{2(1 - \cos^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \xrightarrow{\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{2 - \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \xrightarrow{\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= -1 + 2 \cos^2 \alpha \xrightarrow{\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} -1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

020 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $5 \operatorname{sen} x = 2$ b) $7 \cos x = -1$ c) $5 \operatorname{tg} x = 12$ d) $2 \operatorname{tg} x = 2$

a) $5 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 23^\circ 34' 41,44'' \\ x_2 = 156^\circ 25' 18,56'' \end{cases}$

b) $7 \cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{7} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 98^\circ 12' 47,56'' \\ x_2 = 261^\circ 47' 12,44'' \end{cases}$

c) $5 \operatorname{tg} x = 12 \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{12}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 67^\circ 22' 48,49'' \\ x_2 = 247^\circ 22' 48,49'' \end{cases}$

d) $2 \operatorname{tg} x = 2 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ \\ x_2 = 225^\circ \end{cases}$

021 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas y simplifica el resultado.

a) $\operatorname{sen} 2x = 1$ b) $\cos x + \cos 2x = 0$

a) $\operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow 2x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ \cdot k$

b) $\cos x + \cos 2x = 0 \rightarrow \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \cos x(1 + 2 \operatorname{sen} x) = 0$

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$1 + 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Trigonometría

- 022 En un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es \hat{A} , se sabe que $b = 30$ m y $c = 25$ m. Resuélvelo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$$h = \sqrt{30^2 + 25^2} = \sqrt{1.525} = 39,05 \text{ m}$$

Utilizamos una de las razones trigonométricas para calcular uno de sus ángulos agudos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{30}{39,05} = 0,7682 \rightarrow \hat{B} = 50^\circ 11' 40''$$

Usamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$$\hat{C} = 90^\circ - 50^\circ 11' 40'' = 39^\circ 48' 20''$$

- 023 De un triángulo rectángulo \widehat{ABC} , conocemos que $\hat{C} = 62^\circ$ y que la hipotenusa a mide 1 m. Halla sus elementos.

Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$$\hat{B} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

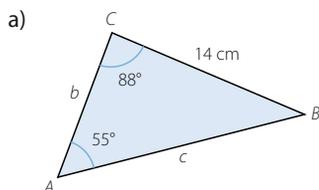
Utilizamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} \rightarrow b = \operatorname{sen} 28^\circ = 0,4695 \text{ m}$$

Usamos el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado:

$$c = \sqrt{1^2 - 0,4695^2} = 0,8829 \text{ m}$$

- 024 Calcula b y c en estos triángulos.



$$\text{a) } \hat{B} = 180^\circ - 88^\circ - 55^\circ = 37^\circ$$

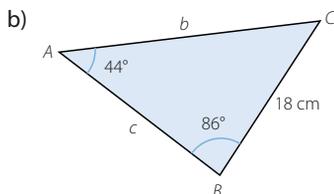
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 37^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow b = 10,29 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 88^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow c = 17,08 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \hat{C} = 180^\circ - 44^\circ - 86^\circ = 50^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno como en el apartado anterior y resulta:

$$b = 25,85 \text{ cm} \qquad c = 19,85 \text{ cm}$$



- 025 Razona si es posible que en un triángulo se cumplan estas igualdades.

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \qquad a = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Es posible si el triángulo es rectángulo, porque entonces $\hat{A} = 90^\circ$ y $\operatorname{sen} \hat{A} = 1$.

026 Un triángulo \widehat{ABC} es rectángulo y la longitud de su hipotenusa es a .

- a) Aplica el teorema del coseno al ángulo recto \widehat{A} .
 b) ¿En qué teorema se transforma el teorema del coseno en este caso?

$$a) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ = b^2 + c^2$$

b) Se transforma en el teorema de Pitágoras.

027 Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

- a) 12, 11 y 9 cm b) 23, 14 y 8 cm c) 26, 24 y 10 cm d) 40, 30 y 20 m

$$a) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0,2929 \rightarrow \widehat{A} = 72^\circ 57' 59,7'' \rightarrow \text{El triángulo es acutángulo.}$$

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

$$c) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90^\circ \rightarrow \text{El triángulo es rectángulo.}$$

$$d) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0,25 \rightarrow \widehat{A} = 104^\circ 28' 39'' \rightarrow \text{El triángulo es obtusángulo.}$$

028 En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.

Llamamos $a = 15$ m, $b = 10$ m y $c = 10$ m.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 15^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\widehat{A} = 97^\circ 10' 50,7''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow 10^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$$

$$\widehat{B} = 41^\circ 24' 34,6''$$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180° , para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 97^\circ 10' 50,7'' + 41^\circ 24' 34,6'' + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow \widehat{C} = 41^\circ 24' 34,6''$$

029 En un romboide, los lados miden 5 cm y 8 cm y una de sus diagonales mide 10 cm. Calcula la medida de sus cuatro ángulos.

Llamamos $a = 5$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\widehat{A} = 29^\circ 41' 10,7''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow 8^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$$

$$\widehat{B} = 52^\circ 24' 37,8''$$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180° , para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 29^\circ 41' 10,7'' + 52^\circ 24' 37,8'' + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow \widehat{C} = 97^\circ 54' 11,5''$$

Trigonometría

030 Resuelve el triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 14 cm y 18 cm, respectivamente, y el ángulo opuesto a uno de ellos mide 70° . Dibuja el triángulo.

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

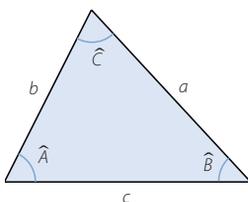
$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{14}{\widehat{A}} = \frac{18}{\widehat{B}} = \frac{18}{\widehat{C}} \rightarrow \widehat{B} = 46^\circ 57' 34,4''$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180° , para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow \widehat{A} + 46^\circ 57' 34,4'' + 70^\circ = 180^\circ \rightarrow \widehat{A} = 63^\circ 2' 25,6''$$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{a}{\widehat{A}} = \frac{18}{\widehat{C}} \rightarrow a = 17,07 \text{ cm}$$



031 Al resolver el triángulo con $a = 4 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$ y $\widehat{A} = 25^\circ$, obtenemos como soluciones dos triángulos obtusángulos. Comprueba que esto es posible y dibuja las soluciones.

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{A}} = \frac{6}{\widehat{C}} \rightarrow \begin{cases} \widehat{C} = 39^\circ 20' 25,7'' \\ \widehat{C} = 140^\circ 39' 34'' \end{cases}$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180° , para calcular el tercer ángulo:

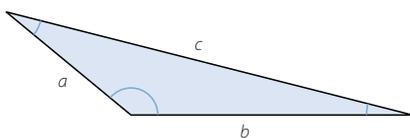
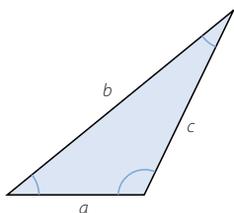
$$1.^\text{a} \text{ solución: } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow 25^\circ + \widehat{B} + 39^\circ 20' 25,7'' = 180^\circ \rightarrow \widehat{B} = 115^\circ 39' 34''$$

$$2.^\text{a} \text{ solución: } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow 25^\circ + \widehat{B} + 140^\circ 39' 34'' = 180^\circ \rightarrow \widehat{B} = 14^\circ 20' 26''$$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

$$1.^\text{a} \text{ solución: } \frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{6}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{4}{\widehat{A}} \rightarrow b = 8,53 \text{ m}$$

$$2.^\text{a} \text{ solución: } \frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{6}{\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{4}{\widehat{A}} \rightarrow b = 2,34 \text{ m}$$



032

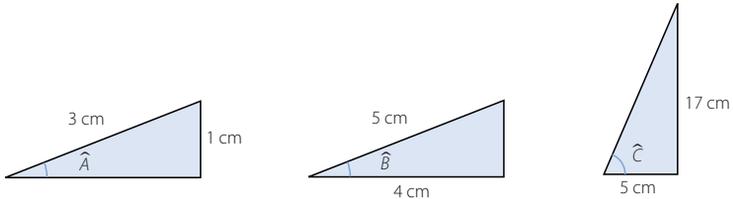
Transforma los siguientes ángulos en grados o radianes, según corresponda.

- a) 225° d) $-1,5 \text{ rad}$ g) -270° j) $0,3 \text{ rad}$ m) $264^\circ 25'$
 b) 75° e) 2 rad h) $140^\circ 40'$ k) 120° n) $\frac{7\pi}{2} \text{ rad}$
 c) 160° f) 540° i) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ l) 315° ñ) $\frac{-6\pi}{5} \text{ rad}$
- a) $\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$ d) $85^\circ 56' 37,2''$ g) $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ j) $17^\circ 11' 19,44''$ m) $4,61 \text{ rad}$
 b) $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ e) $114^\circ 35' 30''$ h) $2,46 \text{ rad}$ k) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ n) 630°
 c) $\frac{8\pi}{9} \text{ rad}$ f) $3\pi \text{ rad}$ i) 60° l) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$ ñ) 144°

033

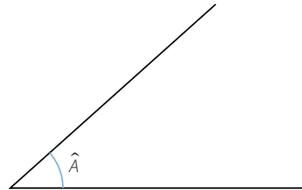
Dibuja tres ángulos agudos \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} , tales que:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{1}{3} \quad \cos \hat{B} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = 3,4$$

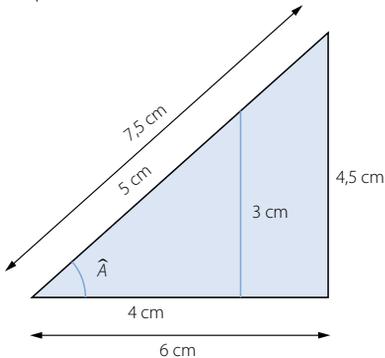


034

Dibuja dos rectas perpendiculares a uno de los lados de este ángulo, de modo que se formen dos triángulos rectángulos.

Mide los lados de los dos triángulos y verifica que las razones del ángulo \hat{A} son idénticas en ambos.

Respuesta abierta:



$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6 \quad \cos \hat{A} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = 0,8 \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = 0,75$$

Trigonometría

035

Comprueba si son ciertas o no las siguientes igualdades, sin usar la calculadora.

a) $\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 45^\circ = \text{sen } 75^\circ$

b) $\text{cos } 90^\circ - \text{cos } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ$

c) $\text{tg } 60^\circ = 2 \text{tg } 30^\circ$

d) $\text{sen } 60^\circ = 2 \text{sen } 30^\circ \text{cos } 30^\circ$

e) $\text{cos } 45^\circ = \frac{\text{cos } 90^\circ}{2}$

f) $\text{cos } 60^\circ = \text{cos}^2 30^\circ - \text{sen}^2 30^\circ$

a) Falsa

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (30^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 30^\circ \cdot \text{cos } 45^\circ + \text{cos } 30^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ \neq \text{sen } 30^\circ + \text{sen } 45^\circ$$

b) Falsa

$$\text{cos } 60^\circ = \text{cos } (90^\circ - 30^\circ) = \text{cos } 90^\circ \cdot \text{cos } 30^\circ - \text{sen } 90^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \neq \text{cos } 90^\circ - \text{cos } 30^\circ$$

c) Falsa

$$\text{tg } 60^\circ = \text{tg } (2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg}^2 30^\circ} \neq 2 \text{tg } 30^\circ$$

d) Verdadera

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } (2 \cdot 30^\circ) = 2 \text{sen } 30^\circ \cdot \text{cos } 30^\circ$$

e) Falsa

$$\text{cos } 45^\circ = \text{cos } \frac{90^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 90^\circ}{1 + \text{cos } 90^\circ}} \neq \frac{\text{cos } 90^\circ}{2}$$

f) Verdadera

$$\text{cos } 60^\circ = \text{cos } (2 \cdot 30^\circ) = \text{cos}^2 30^\circ - \text{sen}^2 30^\circ$$

036

Los ángulos \widehat{A} , \widehat{B} y \widehat{C} son agudos. Completa la siguiente tabla sin determinarlos.

Senos	Cosenos	Tangente
$\text{sen } \widehat{A} = 0,5602$	$\text{cos } \widehat{A} = 0,8284$	$\text{tg } \widehat{A} = 0,6763$
$\text{sen } \widehat{B} = 0,9828$	$\text{cos } \widehat{B} = 0,1849$	$\text{tg } \widehat{B} = 5,3151$
$\text{sen } \widehat{C} = 0,6616$	$\text{cos } \widehat{C} = 0,3384$	$\text{tg } \widehat{C} = 2,7804$

$$0,5602^2 + \text{cos}^2 \widehat{A} = 1 \rightarrow \text{cos } \widehat{A} = \sqrt{1 - 0,5602^2} = 0,8284$$

$$\text{tg } \widehat{A} = \frac{0,5602}{0,8284} = 0,6763$$

$$\text{sen}^2 \widehat{B} + 0,1849^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \sqrt{1 - 0,1849^2} = 0,9828$$

$$\text{tg } \widehat{B} = \frac{0,5602}{0,8284} = 0,6763$$

$$\text{cos } \widehat{C} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2,7804^2}} = 0,3384$$

$$\text{sen}^2 \widehat{C} + 0,3384^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \sqrt{1 - 0,3384^2} = 0,6616$$

037



Emplea la calculadora para determinar los ángulos agudos que cumplen:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a) $\cos \hat{A} = 0,3453$ | e) $tg \hat{E} = 0,3554$ |
| b) $tg \hat{B} = 2,3688$ | f) $sen \hat{F} = 0,0968$ |
| c) $cosec \hat{C} = 1,9044$ | g) $sen \hat{G} = 0,2494$ |
| d) $cos \hat{D} = 0,9726$ | h) $cotg \hat{H} = 2,5$ |

- a) $\cos \hat{A} = 0,3453 \rightarrow \hat{A} = 69^\circ 47' 59,6''$
 b) $tg \hat{B} = 2,3688 \rightarrow \hat{B} = 67^\circ 6' 45,84''$
 c) $cosec \hat{C} = 1,9044 \rightarrow sen \hat{C} = 0,5251 \rightarrow \hat{C} = 31^\circ 40' 29,9''$
 d) $cos \hat{D} = 0,9726 \rightarrow \hat{D} = 13^\circ 26' 36,3''$
 e) $tg \hat{E} = 0,3554 \rightarrow \hat{E} = 19^\circ 33' 54,8''$
 f) $sen \hat{F} = 0,0968 \rightarrow \hat{F} = 5^\circ 33' 17,75''$
 g) $sen \hat{G} = 0,2494 \rightarrow \hat{G} = 14^\circ 26' 31,2''$
 h) $cotg \hat{H} = 2,5 \rightarrow tg \hat{H} = 0,4 \rightarrow \hat{H} = 21^\circ 48' 5,07''$

038



Determina las siguientes razones.

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $sen 19^\circ 22' 37''$ | e) $sec 54^\circ 28'$ | i) $tg \frac{\pi}{8}$ |
| b) $cos 44^\circ 52'$ | f) $cosec \pi$ | j) $cos 0,845$ |
| c) $cos 1,03$ | g) $tg 83^\circ 41' 57''$ | k) $cotg 35^\circ 40'$ |
| d) $sen \frac{2\pi}{5}$ | h) $sen 37^\circ 25''$ | l) $sec \frac{\pi}{6}$ |

- a) $sen 19^\circ 22' 37'' = 0,3318$
 b) $cos 44^\circ 52' = 0,7088$
 c) $cos 1,03 = 0,5148$
 d) $sen \frac{2\pi}{5} = 0,9511$
 e) $sec 54^\circ 28' = 1,7206$
 f) No está definida.
 g) $tg 83^\circ 41' 57'' = 9,0567$
 h) $sen 37^\circ 25'' = 0,6019$
 i) $tg \frac{\pi}{8} = 0,4142$
 j) $cos 0,845 = 0,6637$
 k) $cotg 35^\circ 40' = 1,3934$
 l) $sec \frac{\pi}{6} = 1,1547$

Trigonometría

039
•••

Resuelve los triángulos rectángulos correspondientes, considerando que \hat{A} es el ángulo recto.

a) $b = 7 \text{ m}, \hat{B} = 48^\circ$

d) $a = 6 \text{ cm}, \hat{C} = 42^\circ 12'$

b) $c = 12 \text{ m}, \hat{B} = 28^\circ$

e) $b = 3 \text{ m}, c = 6 \text{ m}$

c) $a = 13 \text{ m}, c = 5 \text{ m}$

f) $b = 8 \text{ m}, a = 10 \text{ m}$

- a) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$$\hat{C} = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{7}{\text{sen } 48^\circ} = a \rightarrow a = 9,42 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$$c = \sqrt{9,42^2 - 7^2} = 6,3 \text{ m}$$

- b) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$$\hat{C} = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para obtener otro de sus lados:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 28^\circ} = \frac{12}{\text{sen } 62^\circ} \rightarrow b = 6,38 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$$a = \sqrt{12^2 + 6,38^2} = 13,59 \text{ m}$$

- c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{12}{13} \rightarrow \hat{B} = 67^\circ 22' 48,5''$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{5}{13} \rightarrow \hat{C} = 22^\circ 37' 11,5''$$

- d) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para obtener el tercer ángulo:

$$\hat{B} = 90^\circ - 42^\circ 12' = 47^\circ 48'$$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 47^\circ 48'} = 6 \rightarrow b = 4,44 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$$c = \sqrt{6^2 - 4,44^2} = 4,04 \text{ m}$$

- e) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71 \text{ m}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{3}{6,71} \rightarrow \hat{B} = 26^\circ 33' 26,6''$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{6}{6,71} \rightarrow \hat{C} = 63^\circ 26' 33,4''$$

f) Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$$c = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8}{10} \rightarrow \hat{B} = 53^\circ 7' 48,37''$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{6}{10} \rightarrow \hat{C} = 36^\circ 52' 11,63''$$

040

Si nos situamos a 40 metros de la chimenea de una fábrica la vemos bajo un ángulo de 26° . ¿Qué altura tiene? Considera que los ojos del observador están situados a 175 cm del suelo.

$$\operatorname{tg} 26^\circ = \frac{a}{40} \rightarrow a = 19,51 \text{ m}$$

$$19,51 + 1,75 = 21,26 \text{ m}$$

La altura de la chimenea es 21,26 m.

041

Una barca está atada a la orilla de un canal con una cuerda que mide 8 metros. En cierto momento, esta cuerda forma un ángulo de 38° con el borde. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra la barca?

$$\operatorname{sen} 38^\circ = \frac{b}{8} \rightarrow b = 4,93 \text{ m}$$

La barca se encuentra a 4,93 m de la orilla.



042

Las bases de un trapecio isósceles miden 8 cm y 14 cm, y los lados iguales, 5 cm. Calcula la medida de sus ángulos.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{3}{5} \rightarrow \hat{B} = 53^\circ 7' 48,37''$$

$$\hat{C} = 90^\circ - 53^\circ 7' 48,37'' = 36^\circ 52' 11,63''$$

$$\hat{D} = 90^\circ + 36^\circ 52' 11,63'' = 126^\circ 52' 11,63''$$



043

¿Qué ángulo forman entre sí las diagonales de un rectángulo de 10 cm de base y 6 cm de altura?

Hallamos la longitud de la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11,66 \text{ cm}$$

Calculamos el ángulo opuesto al lado de 6 cm, en el triángulo isósceles que tiene por lados iguales la mitad de la diagonal:

$$5,83^2 = 5,83^2 + 6^2 - 2 \cdot 5,83 \cdot 6 \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 59^\circ 1' 50,27''$$

El ángulo que forman entre sí las diagonales del rectángulo es $59^\circ 1' 50,27''$.

Trigonometría

044



Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. Determina la medida de su lado.

El pentágono regular se puede dividir en cinco triángulos isósceles.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

El ángulo central mide 72° .

Hallamos los restantes ángulos del triángulo:

$$180^\circ = 72^\circ + 2\hat{A} \rightarrow \hat{A} = 54^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 72^\circ} = \frac{20}{\text{sen } 54^\circ} \rightarrow b = 23,51 \text{ cm}$$

El lado mide 23,51 cm.

045



Calcula la longitud del lado de un dodecágono regular circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm

El dodecágono regular se divide en 24 triángulos rectángulos.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$

El ángulo central mide 15° .

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 15^\circ} = 6 \rightarrow b = 1,55 \text{ cm}$$

El lado mide 3,1 cm.

046



La tabla muestra razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. Sin determinarlos, complétala con las razones que faltan.

Cuadrante	sen	cos	tg
Segundo	0,6702	-0,7422	-0,903
Tercero	0,8911	-0,4539	-1,9631
Cuarto	0,8016	-0,5979	-0,7459
Tercero	-0,7822	-0,623	1,2555
Segundo	0,8849	-0,4657	-1,9004
Cuarto	-0,7158	0,6983	-1,0251

$$0,6702^2 + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \cos \hat{A} = \sqrt{1 - 0,6702^2} = -0,7422$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{0,6702}{-0,7422} = -0,903$$

$$\text{sen}^2 \hat{B} + (-0,4539)^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \sqrt{1 - 0,4539^2} = 0,8911$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{0,8911}{-0,4539} = -1,9631$$

$$\cos \hat{C} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,7459)^2}} = 0,8016$$

$$\text{sen}^2 \hat{C} + 0,8016^2 = 1 \rightarrow \text{sen} \hat{C} = \sqrt{1 - 0,8016^2} = -0,5979$$

$$(-0,7822)^2 + \cos^2 \hat{D} = 1 \rightarrow \cos \hat{D} = \sqrt{1 - 0,7822^2} = -0,623$$

$$\text{tg} \hat{D} = \frac{-0,7822}{-0,623} = 1,2555 \quad \cos \hat{E} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-1,9004)^2}} = -0,4657$$

$$\text{sen}^2 \hat{E} + (-0,4657)^2 = 1 \rightarrow \text{sen} \hat{E} = \sqrt{1 - 0,4657^2} = 0,8849$$

$$\text{sen}^2 \hat{F} + 0,6983^2 = 1 \rightarrow \text{sen} \hat{F} = \sqrt{1 - 0,6983^2} = -0,7158$$

$$\text{tg} \hat{F} = \frac{-0,7158}{0,6983} = -1,0251$$

047

Sin usar la calculadora, determina.

a) $\text{sen} \pi - \text{tg} \pi + 2 \cos \pi$

c) $\text{tg} 2\pi - \text{sen} \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos \frac{\pi}{2} - \text{sen} \frac{3\pi}{2}$

d) $\cos 2\pi - \text{sen} 2\pi$

a) $\text{sen} \pi - \text{tg} \pi + 2 \cos \pi = 0 - \frac{0}{1} + 2 \cdot 1 = 2$

b) $\cos \frac{\pi}{2} - \text{sen} \frac{3\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

c) $\text{tg} 2\pi - \text{sen} \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} - 1 - 2 \cdot 0 = -1$

d) $\cos 2\pi - \text{sen} 2\pi = 1 - 0 = 1$

048

Completa, sin usar la calculadora, los valores del seno de los siguientes ángulos.

$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
-1	0	1	0	-1	0	1	0

049

Completa, sin usar la calculadora, los valores del coseno de los siguientes ángulos.

$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
0	1	0	-1	0	1	0	-1

Trigonometría

050



Completa, sin usar la calculadora, los valores de la tangente de los siguientes ángulos.

-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definido
120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definido

051



Utiliza la calculadora para hallar las razones.

- a) $\text{sen } 319^\circ 12' 52''$ e) $\text{cosec } 200^\circ 16'$ i) $\text{tg } \frac{11\pi}{8}$
 b) $\text{cos } 434^\circ 26'$ f) $\text{sec } \frac{5\pi}{4}$ j) $\text{cos } 3,845$
 c) $\text{tg } 7,03$ g) $\text{tg } 183^\circ 13' 53''$ k) $\text{cotg } \frac{11\pi}{6}$
 d) $\text{sen } \frac{8\pi}{5}$ h) $\text{sen } 333^\circ 55''$ l) $\text{cosec } 5,24$

- a) $\text{sen } 319^\circ 12' 52'' = -0,6532$ g) $\text{tg } 183^\circ 13' 53'' = 0,0565$
 b) $\text{cos } 434^\circ 26' = 0,2684$ h) $\text{sen } 333^\circ 55'' = -0,4538$
 c) $\text{tg } 7,03 = 0,9257$ i) $\text{tg } \frac{11\pi}{8} = 2,4142$
 d) $\text{sen } \frac{8\pi}{5} = -0,9511$ j) $\text{cos } 3,845 = -0,7626$
 e) $\text{cosec } 200^\circ 16' = -2,8869$ k) $\text{cotg } \frac{11\pi}{6} = -1,7321$
 f) $\text{sec } \frac{5\pi}{4} = -1,4142$ l) $\text{cosec } 5,24 = -1,1574$

052



Reduce los ángulos al 1.º cuadrante y calcula estas razones.

- a) $\text{sen } 131^\circ$ e) $\text{sec } 156^\circ 23' 6''$ i) $\text{cotg } 295^\circ 12' 45''$
 b) $\text{cos } 334^\circ 46'$ f) $\text{tg } 238^\circ 24'$ j) $\text{sec } 203^\circ 36' 54''$
 c) $\text{tg } 146^\circ 22''$ g) $\text{sen } 302^\circ 15''$
 d) $\text{cosec } 122^\circ 53'$ h) $\text{cos } 192^\circ 21' 32''$

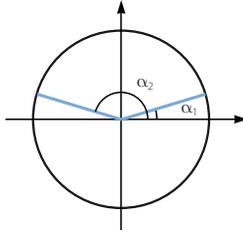
- a) $\text{sen } 131^\circ = \text{sen } 49^\circ = 0,7547$
 b) $\text{cos } 334^\circ 46' = \text{cos } 25^\circ 14' = 0,9046$
 c) $\text{tg } 146^\circ 22'' = -\text{tg } 33^\circ 59' 38'' = -0,6744$
 d) $\text{cosec } 122^\circ 53' = \text{cosec } 57^\circ 7' = 1,1908$
 e) $\text{sec } 156^\circ 23' 6'' = -\text{sec } 23^\circ 36' 54'' = -1,0914$
 f) $\text{tg } 238^\circ 24' = \text{tg } 58^\circ 24' = 1,6255$
 g) $\text{sen } 302^\circ 15'' = -\text{sen } 57^\circ 45' = -0,8480$
 h) $\text{cos } 192^\circ 21' 32'' = -\text{cos } 12^\circ 21' 32'' = -0,9767$
 i) $\text{cotg } 295^\circ 12' 45'' = -\text{cotg } 64^\circ 47' 15'' = -0,4708$
 j) $\text{sec } 203^\circ 36' 54'' = -\text{sec } 23^\circ 36' 54'' = -1,0914$

053

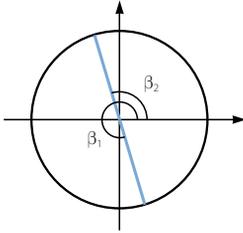
En la circunferencia goniométrica, dibuja y obtén con ayuda de la calculadora.

- a) Dos ángulos cuyo seno valga 0,36.
 b) Dos ángulos cuya tangente valga $-3,54$.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,36$
 $\alpha_1 = 21^\circ 6' 0,706''$
 $\alpha_2 = 158^\circ 53' 59,2''$



b) $\operatorname{tg} \beta = -3,54$
 $\beta_1 = 285^\circ 46' 27''$
 $\beta_2 = 105^\circ 46' 27''$



054

Halla los siguientes ángulos.

- a) $\operatorname{arc} \cos 0,4539$ d) $\operatorname{arc} \cos (-0,3996)$ g) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,6862$
 b) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,9284$ e) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,1618$ h) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0,3308)$
 c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-0,5459)$ f) $\operatorname{arc} \cos (-0,2926)$

a) $\operatorname{arc} \cos 0,4539 = 63^\circ 20,95''$ e) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,1618 = 65^\circ 10' 32,9''$
 b) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,9284 = 68^\circ 11' 12,3''$ f) $\operatorname{arc} \cos (-0,2926) = 107^\circ 49,2''$
 c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-0,5459) = 331^\circ 22' 12''$ g) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,6862 = 43^\circ 19' 48,2''$
 d) $\operatorname{arc} \cos (-0,3996) = 113^\circ 33' 11''$ h) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} (-0,3308) = 340^\circ 40' 58''$

055

Conocidas las razones de 30° , 45° y 60° , obtén, sin usar la calculadora, las razones de 120° , 225° , 240° y 300° .

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 300^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Trigonometría

056



Determina el ángulo α del 1.^{er} cuadrante cuyas razones trigonométricas verifican:

$$\operatorname{sen} \alpha = |\operatorname{sen} 249^\circ 31'| \quad \operatorname{cos} \alpha = |\operatorname{cos} 249^\circ 31'| \quad \operatorname{tg} \alpha = |\operatorname{tg} 249^\circ 31'|$$

Halla cuáles son sus razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} \alpha = |\operatorname{sen} 249^\circ 31'| = 0,9368 \rightarrow \alpha = 69^\circ 31'$$

$$\operatorname{cos} \alpha = |\operatorname{cos} 249^\circ 31'| = 0,3499 \rightarrow \alpha = 69^\circ 31'$$

$$\operatorname{tg} \alpha = |\operatorname{tg} 249^\circ 31'| = 2,6770 \rightarrow \alpha = 69^\circ 31'$$

057



¿Qué ángulo del 3.^{er} cuadrante tiene el mismo coseno que $132^\circ 24' 18''$?

Usa la calculadora para obtener las razones de esos dos ángulos y compáralas.

El ángulo del 3.^{er} cuadrante que tiene el mismo coseno que $132^\circ 24' 18''$ es $227^\circ 35' 42''$.

$$\operatorname{cos} 132^\circ 24' 18'' = \operatorname{cos} 227^\circ 35' 42'' = -0,6744$$

$$\operatorname{sen} 132^\circ 24' 18'' = -\operatorname{sen} 227^\circ 35' 42'' = 0,7384$$

$$\operatorname{tg} 132^\circ 24' 18'' = -\operatorname{tg} 227^\circ 35' 42'' = -1,0949$$

058



¿Qué ángulo del 2.^o cuadrante tiene la misma tangente que $337^\circ 54' 29''$?

Con ayuda de la calculadora, obtén las razones de los ángulos y compáralas.

El ángulo del 2.^o cuadrante que tiene la misma tangente que $337^\circ 54' 29''$ es $157^\circ 54' 29''$.

$$\operatorname{cos} 337^\circ 54' 29'' = -\operatorname{cos} 157^\circ 54' 29'' = 0,9266$$

$$\operatorname{sen} 337^\circ 54' 29'' = -\operatorname{sen} 157^\circ 54' 29'' = -0,3761$$

$$\operatorname{tg} 337^\circ 54' 29'' = \operatorname{tg} 157^\circ 54' 29'' = -0,4059$$

059



Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,23$ y que α es un ángulo agudo, determina las razones trigonométricas.

a) $\operatorname{cos} \alpha$

b) $\operatorname{tg} \alpha$

c) $\operatorname{tg} (-\alpha)$

d) $\operatorname{cos} (180^\circ - \alpha)$

e) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha)$

f) $\operatorname{sen} (720^\circ + \alpha)$

$$\text{a) } 0,23^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - 0,23^2} = 0,9732$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,23}{0,9732} = 0,2363$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -0,2363$$

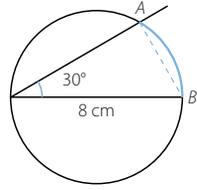
$$\text{d) } \operatorname{cos} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha = -0,9732$$

$$\text{e) } \operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,23$$

$$\text{f) } \operatorname{sen} (720^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,23$$

060

En la siguiente circunferencia, calcula la medida del segmento AB y del arco de circunferencia \widehat{AB} .



Como el ángulo $\widehat{A} = 90^\circ$, el ángulo $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{AB}{8} \rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

El segmento AB mide 4 cm.

Como el ángulo de 30° es inscrito, el ángulo central que abarca el arco \widehat{AB} mide 60° .

Calculamos la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de 4 cm de radio:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3} = 4,19 \text{ cm}$$

El arco \widehat{AB} mide 4,19 cm.

061

Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$, $\cos \gamma = -0,54$ b) $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$, $\operatorname{sen} \delta = 0$

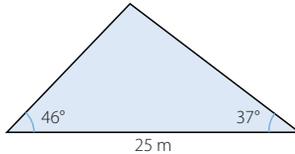
a) $\operatorname{sen}^2 \gamma + (-0,54)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \gamma = -\sqrt{1 - (-0,54)^2} = -0,8417$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-0,8417}{-0,54} = 1,5587$$

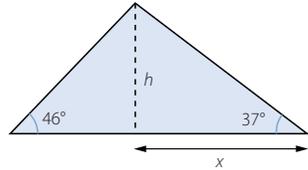
b) No existe ningún ángulo con estas condiciones, pues si $\operatorname{sen} \delta = 0$, entonces $\delta = 2k\pi$.

062

Calcula el área de este triángulo.



La altura sobre el lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{h}{25-x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} h = x \cdot \operatorname{tg} 37^\circ \\ h = (25-x) \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{25 \cdot \operatorname{tg} 46^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ} = 14,47 \text{ m}$$

$$h = 14,47 \cdot \operatorname{tg} 37^\circ = 10,9 \text{ m}$$

La altura del triángulo mide 10,9 m.

$$\text{Calculamos el área: } A = \frac{25 \cdot 10,9}{2} = 136,3 \text{ m}^2$$

El área del triángulo mide 136,3 m².

Trigonometría

063
○○○

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10 \text{ cm}, b = 14 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}$

e) $a = 2,1 \text{ cm}; b = 1,4 \text{ cm}; c = 1,8 \text{ cm}$

b) $b = 6 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \hat{A} = 39^\circ 12'$

f) $a = 9 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}, \hat{B} = 103^\circ 27'$

c) $a = 7 \text{ cm}, \hat{B} = 38^\circ 49', \hat{C} = 66^\circ 40'$

g) $b = 8,3 \text{ cm}; c = 9,1 \text{ cm}; \hat{C} = 112^\circ 50'$

d) $a = 8 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, \hat{B} = 36^\circ 38'$

h) $c = 6 \text{ cm}, \hat{A} = 27^\circ 42', \hat{B} = 98^\circ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-100 + 196 + 64}{2 \cdot 14 \cdot 8} = 0,7143$$

$$\hat{A} = 44^\circ 24' 55,1''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} = -0,2$$

$$\hat{B} = 101^\circ 32' 13''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 44^\circ 24' 55,1'' - 101^\circ 32' 13'' = 34^\circ 2' 51,85''$$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 39^\circ 12' \rightarrow a = 5,77 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 33,3 + 81}{2 \cdot 5,77 \cdot 9} = 0,7534$$

$$\hat{B} = 41^\circ 4' 14,51'' \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 39^\circ 12' - 41^\circ 4' 14,51'' = 99^\circ 43' 45,49''$$

c) $\hat{A} = 180^\circ - 38^\circ 49' - 66^\circ 40' = 74^\circ 31'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\sin 38^\circ 49'} = \frac{7}{\sin 74^\circ 31'} \rightarrow b = 4,55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\sin 66^\circ 40'} = \frac{7}{\sin 74^\circ 31'} \rightarrow c = 6,67 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow \frac{10}{\sin 36^\circ 38'} = \frac{8}{\sin \hat{A}} \rightarrow \sin \hat{A} = 0,4774$$

$$\hat{A} = 28^\circ 30' 45,7''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 36^\circ 38' - 28^\circ 30' 45,7'' = 114^\circ 51' 14,3''$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\sin 114^\circ 51' 14,3''} = \frac{8}{\sin 28^\circ 30' 45,7''} \rightarrow c = 15,21 \text{ cm}$$

e) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-4,41 + 1,96 + 3,24}{2 \cdot 1,4 \cdot 1,8} = 0,1567$$

$$\hat{A} = 80^\circ 58' 54,9''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-1,96 + 4,41 + 3,24}{2 \cdot 2,1 \cdot 1,8} = 0,7606$$

$$\hat{B} = 40^\circ 29' 4,08''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 40^\circ 29' 4,08'' = 58^\circ 32' 1,02''$$

f) Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90 \cdot \cos 103^\circ 27'} = 11,27 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{11,27}{\operatorname{sen} 103^\circ 27'} = \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0,7767$$

$$\widehat{A} = 50^\circ 57' 26,6'' \rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 50^\circ 57' 26,6'' - 103^\circ 27' = 25^\circ 35' 33,4''$$

g) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \frac{9,1}{\operatorname{sen} 112^\circ 50'} = \frac{8,3}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = 0,8406$$

$$\widehat{B} = 57^\circ 12' 18,2'' \rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 112^\circ 50' - 57^\circ 12' 18,2'' = 9^\circ 57' 41,8''$$

$$a = \frac{9,1 \cdot \operatorname{sen} 91^\circ 57' 41,8''}{\operatorname{sen} 112^\circ 50'} = 1,71 \text{ cm}$$

h) $\widehat{C} = 180^\circ - 27^\circ 42' - 98^\circ 20' = 53^\circ 58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{6}{\operatorname{sen} 53^\circ 58'} = \frac{a}{\operatorname{sen} 27^\circ 42'} \rightarrow a = 3,45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \frac{6}{\operatorname{sen} 53^\circ 58'} = \frac{b}{\operatorname{sen} 98^\circ 20'} \rightarrow b = 7,34 \text{ cm}$$

064
○○○

Encuentra las soluciones para estos triángulos.

a) $a = 12 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

d) $b = 6 \text{ cm}; c = 4,5 \text{ cm}; \widehat{C} = 38^\circ 26'$

b) $a = 8 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \widehat{A} = 42^\circ 55'$

e) $c = 12 \text{ cm}, \widehat{A} = 92^\circ, \widehat{B} = 26^\circ 28'$

c) $a = 10 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \widehat{A} = 72^\circ 55'$

f) $a = 11 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}, \widehat{A} = 27^\circ 36'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0,7024$$

$$\widehat{A} = 134^\circ 37' 6''$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0,9097$$

$$\widehat{B} = 24^\circ 31' 58,8''$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 24^\circ 31' 58,8'' - 134^\circ 37' 6'' = 20^\circ 50' 55,2''$$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{8}{\operatorname{sen} 42^\circ 55'} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = 0,7661$$

$$\widehat{C} = 50^\circ 2'' \quad \widehat{B} = 180^\circ - 42^\circ 55' - 50^\circ 2'' = 87^\circ 4' 58''$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 87^\circ 4' 58''} = \frac{8}{\operatorname{sen} 42^\circ 55'} \rightarrow b = 11,73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{10}{\operatorname{sen} 72^\circ 55'} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = 0,8603$$

$$\widehat{C} = 59^\circ 20' 57,2'' \quad \widehat{B} = 180^\circ - 59^\circ 20' 57,2'' - 72^\circ 55' = 47^\circ 44' 2,76''$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 47^\circ 44' 2,76''} = \frac{10}{\operatorname{sen} 72^\circ 55'} \rightarrow b = 7,74 \text{ cm}$$

Trigonometría

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen B}}} \rightarrow \frac{4,5}{\widehat{\text{sen } 38^\circ 26'}} = \frac{6}{\widehat{\text{sen B}}} \rightarrow \widehat{\text{sen B}} = 0,8288$$

$$\widehat{B} = 55^\circ 58' 34,2''$$

$$\widehat{A} = 180^\circ - 55^\circ 58' 34,2'' - 38^\circ 26' = 85^\circ 35' 25,8''$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} \rightarrow \frac{4,5}{\widehat{\text{sen } 38^\circ 26'}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } 85^\circ 35' 25,8''}} \rightarrow a = 7,22 \text{ cm}$$

e) $\widehat{C} = 180^\circ - 92^\circ - 26^\circ 28' = 61^\circ 32'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen B}}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen } 61^\circ 32'}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 26^\circ 28'}} \rightarrow b = 6,08 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen } 61^\circ 32'}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } 92^\circ}} \rightarrow a = 13,64 \text{ cm}$$

f) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen B}}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen B}}} = \frac{11}{\widehat{\text{sen } 27^\circ 36'}} \rightarrow \widehat{\text{sen B}} = 0,5054$$

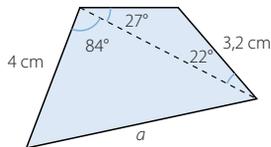
$$\widehat{B} = 30^\circ 21' 31,8''$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ 21' 31,8'' - 27^\circ 36' = 122^\circ 2' 28,2''$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} \rightarrow \frac{11}{\widehat{\text{sen } 122^\circ 2' 28,2''}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 27^\circ 36'}} \rightarrow c = 20,13 \text{ cm}$$

065
●●○

Obtén el valor de a en la siguiente figura.



Calculamos el ángulo desconocido del triángulo menor:

$$180^\circ - 27^\circ - 22^\circ = 131^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno para conocer la longitud de la diagonal:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen B}}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} \rightarrow \frac{b}{\widehat{\text{sen } 131^\circ}} = \frac{3,2}{\widehat{\text{sen } 27^\circ}} \rightarrow b = 5,32 \text{ cm}$$

Utilizamos el teorema del coseno para calcular el valor de a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow a^2 = 5,32^2 + 4^2 - 2 \cdot 5,32 \cdot 4 \cdot \cos 84^\circ \rightarrow a = 6,31 \text{ cm}$$

El valor de a es 6,31 cm.

066
●●○

En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada extremo de una cuerda a las argollas y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.

- ¿Cuánto mide la cuerda?
- ¿A qué distancia está el niño de la pared?

La altura del lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{8-x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \\ \rightarrow h = (8-x) \cdot \operatorname{tg} 37^\circ \end{array} \rightarrow x = \frac{8 \cdot \operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ} = 3,1 \text{ m}$$

$$h = 3,1 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 3,69 \text{ m}$$

El niño está a una distancia de 3,69 m de la pared.

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{3,69}{BA} \rightarrow BA = \frac{3,69}{\operatorname{sen} 50^\circ} = 4,82 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 37^\circ = \frac{3,69}{CA} \rightarrow CA = \frac{3,69}{\operatorname{sen} 37^\circ} = 6,13 \text{ m}$$

Calculamos la longitud de la cuerda:

$$8 + 4,82 + 6,13 = 18,95 \text{ m}$$

La cuerda mide 18,95 m.

067



Dos exploradores se han perdido y deciden seguir caminos distintos para conseguir ayuda. Para saber dónde está el otro en cada momento mantienen un rumbo fijo y sus trayectorias forman un ángulo de 54° . Si uno camina a 5 km/h y el otro lo hace a 4 km/h, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de 2 horas? ¿Y después de 6 horas?



Después de 2 horas, los exploradores y el punto de origen forman un triángulo del que conocemos dos lados, de 10 y 8 km, respectivamente, y el ángulo comprendido es de 54° .

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado que falta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow a^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 54^\circ \rightarrow a = 8,36 \text{ km}$$

Al cabo de 2 horas están a 8,36 km de distancia.

Después de 6 horas, los exploradores han recorrido 30 y 24 km, respectivamente.

El triángulo formado es semejante al anterior, ya que están en posición de Tales.

Calculamos la distancia a la que se encuentran los exploradores:

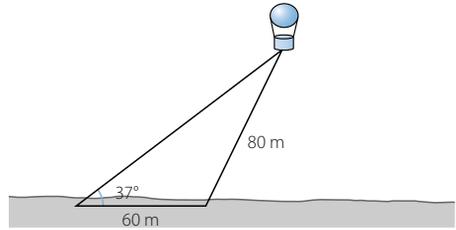
$$8,36 \cdot 3 = 25,08 \text{ km}$$

Después de 6 horas están a 25,08 km de distancia.

Trigonometría

068
●●○

Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° .



Calcula.

- La medida del otro cable.
- La distancia del globo al suelo.

$$a) \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \frac{60}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{80}{\operatorname{sen} 37^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = 0,4514$$

$$\hat{C} = 26^\circ 49' 51,8'' \quad \hat{B} = 180^\circ - 26^\circ 49' 51,8'' - 37^\circ = 116^\circ 10' 8,2''$$

Aplicamos el teorema del seno para calcular la medida del otro cable:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 116^\circ 10' 8,2''} = \frac{80}{\operatorname{sen} 37^\circ} \rightarrow b = 119,31 \text{ m}$$

La medida del otro cable es 119,31 m.

- Calculamos la distancia del globo al suelo:

$$\operatorname{sen} 37^\circ = \frac{h}{119,31} \rightarrow h = 71,8 \text{ m}$$

El globo está a 71,8 m de altura.

069
●●○

Los segmentos que unen los vértices de un triángulo con su circuncentro dividen la circunferencia circunscrita en 3 partes.

- Si el radio de dicha circunferencia mide 4 cm y dos de los arcos tienen una amplitud de 128° y 83° , ¿cuánto mide el otro arco?
- Calcula la medida de los lados y los ángulos del triángulo.

- Calculamos el tercer arco: $360^\circ - 128^\circ - 83^\circ = 149^\circ$

- Tenemos tres triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm y los ángulos comprendidos miden 128° , 83° y 149° , respectivamente.

Aplicamos el teorema del coseno para calcular los lados del triángulo original:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 128^\circ \rightarrow a = 7,19 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow b^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 83^\circ \rightarrow b = 5,3 \text{ cm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \rightarrow c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 149^\circ \rightarrow c = 7,71 \text{ cm}$$

Los lados del triángulo miden 7,19; 5,3 y 7,71 cm, respectivamente.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-51,7 + 28,09 + 59,44}{2 \cdot 5,3 \cdot 7,71} = 0,4384$$

$$\hat{A} = 63^\circ 59' 49,7''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$\rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-28,09 + 51,7 + 59,44}{2 \cdot 7,19 \cdot 7,71} = 0,749$$

$$\hat{B} = 41^\circ 29' 46,2''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 63^\circ 59' 49,7'' - 41^\circ 29' 46,2'' = 74^\circ 30' 24,1''$$

070
●●○

Uno de los ángulos de un trapecio isósceles mide 65° , los lados iguales miden 8 cm y su diagonal es de 15 cm. Determina su área.

Con el teorema del seno calculamos la base mayor:

$$\frac{8}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{15}{\widehat{\text{sen } 65^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } C} = 0,4834$$

$$\widehat{C} = 28^\circ 54' 19,3''$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - 28^\circ 54' 19,3'' - 65^\circ = 86^\circ 5' 40,7''$$

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} \rightarrow \frac{b}{\widehat{\text{sen } 86^\circ 5' 40,7''}} = \frac{15}{\widehat{\text{sen } 65^\circ}} \rightarrow b = 16,51 \text{ cm}$$

$$65^\circ = \widehat{C} + \widehat{D} \rightarrow \widehat{D} = 65^\circ - 28^\circ 54' 19,3'' = 36^\circ 5' 40,7''$$

La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° ; por tanto, como el trapecio es isósceles, los otros dos ángulos iguales miden:

$$\widehat{E} = \frac{360^\circ - 130^\circ}{2} = 115^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno para calcular la base menor:

$$\frac{e}{\widehat{\text{sen } E}} = \frac{d}{\widehat{\text{sen } D}} = \frac{15}{\widehat{\text{sen } 115^\circ}} \rightarrow \frac{d}{\widehat{\text{sen } 36^\circ 5' 40,7''}} \rightarrow d = 9,75 \text{ cm}$$

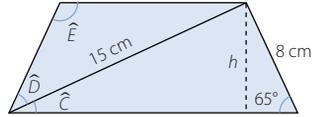
Hallamos la altura:

$$\widehat{\text{sen } 65^\circ} = \frac{h}{8} \rightarrow h = 7,25 \text{ cm}$$

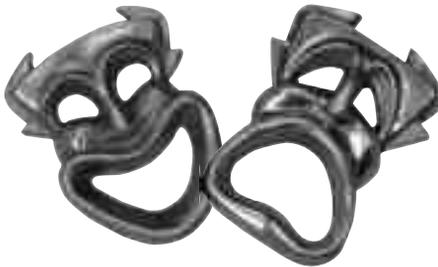
Calculamos el área del trapecio:

$$A = \frac{(d + b)h}{2} = 95,19 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio es $95,19 \text{ cm}^2$.

071
●●○

El ancho de un escenario de teatro mide 8 m. Las localidades que hemos comprado están situadas a una distancia de 6 m y 12 m de cada uno de los extremos laterales del escenario. ¿Cuál es el ángulo de visión que tendremos para ver la representación?



Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \widehat{\text{cos } A} \rightarrow \widehat{\text{cos } A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-64 + 36 + 144}{2 \cdot 6 \cdot 12} = 0,8056$$

$$\widehat{A} = 36^\circ 19' 54,3''$$

Tendremos un ángulo de visión de $36^\circ 19' 54,3''$.

Trigonometría

072



A partir de las razones de 30° , 45° y 60° obtén, sin usar la calculadora, las razones de 75° , 105° y 15° . Comprueba luego los resultados con la calculadora.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen} (30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 105^\circ &= \operatorname{sen} (45^\circ + 60^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos (45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ + 60^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen} (45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

073



Teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas las razones de ángulos conocidos, calcula las razones de los ángulos cuya amplitud es $7^\circ 30'$ y 210° . Comprueba luego los resultados que has obtenido con la calculadora.

$$\operatorname{sen} 7^\circ 30' = \operatorname{sen} \frac{15^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,9659}{2}} = 0,1305$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos \frac{15^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,9659}{2}} = 0,9914$$

$$\operatorname{tg} 7^{\circ} 30' = \operatorname{tg} \frac{15^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^{\circ}}{1 + \cos 15^{\circ}}} = \sqrt{\frac{1 - 0,9659}{1 + 0,9659}} = 0,1316$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 210^{\circ} &= \operatorname{sen} (2 \cdot 105^{\circ}) = 2 \cdot \operatorname{sen} 105^{\circ} \cdot \cos 105^{\circ} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 210^{\circ} &= \cos (2 \cdot 105^{\circ}) = \cos^2 105^{\circ} - \operatorname{sen}^2 105^{\circ} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 210^{\circ} = \operatorname{tg} (2 \cdot 105^{\circ}) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 105^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 105^{\circ}} = \frac{2(-2 - \sqrt{3})}{1 - (-2 - \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

074

Halla las razones de $67^{\circ} 30'$, 195° y $52^{\circ} 30'$. Comprueba los resultados con la calculadora.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (67^{\circ} 30') &= \operatorname{sen} (60^{\circ} + 7^{\circ} 30') = \operatorname{sen} 60^{\circ} \cdot \cos 7^{\circ} 30' + \cos 60^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 7^{\circ} 30' = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,9914 + \frac{1}{2} \cdot 0,1305 = 0,9239 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (67^{\circ} 30') &= \cos (60^{\circ} + 7^{\circ} 30') = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 7^{\circ} 30' - \operatorname{sen} 60^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 7^{\circ} 30' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,9914 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,1305 = 0,3827 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} (67^{\circ} 30') = \operatorname{tg} (60^{\circ} + 7^{\circ} 30') = \frac{\operatorname{tg} 60^{\circ} + \operatorname{tg} 7^{\circ} 30'}{1 - \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 7^{\circ} 30'} = \frac{\sqrt{3} + 0,1316}{1 - \sqrt{3} \cdot 0,1316} = 2,4142$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 195^{\circ} &= \operatorname{sen} (210^{\circ} - 15^{\circ}) = \operatorname{sen} 210^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ} - \cos 210^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 15^{\circ} = \\ &= -0,5 \cdot 0,9659 - (-0,8660) \cdot 0,2588 = -0,2588 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 195^{\circ} &= \cos (210^{\circ} - 15^{\circ}) = \cos 210^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ} + \operatorname{sen} 210^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 15^{\circ} = \\ &= -0,8660 \cdot 0,9659 + (-0,5) \cdot 0,2588 = -0,9659 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 195^{\circ} = \operatorname{tg} (210^{\circ} - 15^{\circ}) = \frac{\operatorname{tg} 210^{\circ} - \operatorname{tg} 15^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 210^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 15^{\circ}} = \frac{0,5773 - 0,2679}{1 + 0,5773 \cdot 0,2679} = 0,2679$$

$$\operatorname{sen} 52^{\circ} 30' = \operatorname{sen} \frac{105^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 105^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-0,2588)}{2}} = 0,7933$$

$$\cos 52^{\circ} 30' = \cos \frac{105^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 105^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-0,2588)}{2}} = 0,6088$$

$$\operatorname{tg} 52^{\circ} 30' = \operatorname{tg} \frac{105^{\circ}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 105^{\circ}}{1 + \cos 105^{\circ}}} = \sqrt{\frac{1 - (-0,2588)}{1 + (-0,2588)}} = 1,3032$$

Trigonometría

075



Sabemos que $\text{sen } 56^\circ = 0,83$ y $\text{cos } 23^\circ = 0,92$.

- Calcula el resto de razones de esos ángulos.
- Halla las razones trigonométricas de 79° .
- Determina las razones de 33° .
- ¿Podrías hallar las razones de 28° ?
- ¿Y las de 46° ?

$$\text{a) } 0,83^2 + \text{cos}^2 56^\circ = 1 \rightarrow \text{cos } 56^\circ = \sqrt{1 - 0,83^2} = 0,56$$

$$\text{tg } 56^\circ = \frac{0,83}{0,56} = 1,48$$

$$\text{sen}^2 23^\circ + 0,92^2 = 1 \rightarrow \text{sen } 23^\circ = \sqrt{1 - 0,92^2} = 0,39$$

$$\text{tg } 23^\circ = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

$$\text{b) } \text{sen } 79^\circ = \text{sen } (56^\circ + 23^\circ) = \text{sen } 56^\circ \cdot \text{cos } 23^\circ + \text{cos } 56^\circ \cdot \text{sen } 23^\circ =$$
$$= 0,83 \cdot 0,92 + 0,56 \cdot 0,39 = 0,98$$

$$\text{cos } 79^\circ = \text{cos } (56^\circ + 23^\circ) = \text{cos } 56^\circ \cdot \text{cos } 23^\circ - \text{sen } 56^\circ \cdot \text{sen } 23^\circ =$$
$$= 0,56 \cdot 0,92 - 0,83 \cdot 0,39 = 0,19$$

$$\text{tg } 79^\circ = \text{tg } (56^\circ + 23^\circ) = \frac{\text{tg } 56^\circ + \text{tg } 23^\circ}{1 - \text{tg } 56^\circ \cdot \text{tg } 23^\circ} = \frac{1,48 + 0,42}{1 - 1,48 \cdot 0,42} = 5,02$$

$$\text{c) } \text{sen } 33^\circ = \text{sen } (56^\circ - 23^\circ) = \text{sen } 56^\circ \cdot \text{cos } 23^\circ - \text{cos } 56^\circ \cdot \text{sen } 23^\circ =$$
$$= 0,83 \cdot 0,92 - 0,56 \cdot 0,39 = 0,55$$

$$\text{cos } 33^\circ = \text{cos } (56^\circ - 23^\circ) = \text{cos } 56^\circ \cdot \text{cos } 23^\circ + \text{sen } 56^\circ \cdot \text{sen } 23^\circ =$$
$$= 0,56 \cdot 0,92 + 0,83 \cdot 0,39 = 0,84$$

$$\text{tg } 33^\circ = \text{tg } (56^\circ - 23^\circ) = \frac{\text{tg } 56^\circ - \text{tg } 23^\circ}{1 + \text{tg } 56^\circ \cdot \text{tg } 23^\circ} = \frac{1,48 - 0,42}{1 + 1,48 \cdot 0,42} = 0,65$$

$$\text{d) } \text{sen } 28^\circ = \text{sen } \frac{56^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 56^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,56}{2}} = 0,47$$

$$\text{cos } 28^\circ = \text{cos } \frac{56^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{cos } 56^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,56}{2}} = 0,88$$

$$\text{tg } 28^\circ = \text{tg } \frac{56^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 56^\circ}{1 + \text{cos } 56^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,56}{1 + 0,56}} = 0,53$$

$$\text{e) } \text{sen } 46^\circ = \text{sen } (2 \cdot 23^\circ) = 2 \cdot \text{sen } 23^\circ \cdot \text{cos } 23^\circ = 2 \cdot 0,39 \cdot 0,92 = 0,72$$

$$\text{cos } 46^\circ = \text{cos } (2 \cdot 23^\circ) = \text{cos}^2 23^\circ - \text{sen}^2 23^\circ = 0,92^2 - 0,39^2 = 0,69$$

$$\text{tg } 46^\circ = \text{tg } (2 \cdot 23^\circ) = \frac{2 \cdot \text{tg } 23^\circ}{1 - \text{tg}^2 23^\circ} = \frac{2 \cdot 0,42}{1 - 0,42^2} = 1,02$$

076



Obtén una fórmula simplificada de:

a) $\text{sen } (30^\circ + \hat{A})$

c) $\text{tg } (45^\circ - \hat{C})$

b) $\text{cos } (\hat{B} - 60^\circ)$

d) $\text{cos } (\hat{D} + 30^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}(30^\circ + \hat{A}) &= \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos \hat{A} + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{1}{2} \cos \hat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \hat{A} = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \hat{A} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \hat{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(\hat{B} - 60^\circ) &= \cos \hat{B} \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} \cos \hat{B} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \hat{B} = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \hat{B} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \hat{B}) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(45^\circ - \hat{C}) = \frac{1 - \operatorname{tg} \hat{C}}{1 + \operatorname{tg} \hat{C}}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos(\hat{D} + 30^\circ) &= \cos \hat{D} \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} \hat{D} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{D} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \hat{D} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos \hat{D} - \operatorname{sen} \hat{D}) \end{aligned}$$

077

Si $\operatorname{sen} x = 0,6$ y $\cos x = -0,8$; calcula las siguientes razones trigonométricas.

$$\text{a) } \cos(x - \pi) \qquad \text{c) } \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{e) } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{b) } \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{d) } \operatorname{sen}(x - \pi) \qquad \text{f) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Razona en qué cuadrante se encuentra cada uno de esos ángulos.

El ángulo x está en el 2.º cuadrante, ya que su seno es positivo y su coseno es negativo.

$$\text{a) } \cos(x - \pi) = -\cos x = 0,8$$

El ángulo está en el 4.º cuadrante.

$$\text{b) } \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -0,8$$

El ángulo está en el 3.º cuadrante.

$$\text{c) } \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{-0,75 + 1}{1 + 0,75} = 0,14$$

El ángulo está en el 3.º cuadrante.

$$\text{d) } \operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x = -0,6$$

El ángulo está en el 4.º cuadrante.

$$\text{e) } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,99$$

El ángulo está en el 3.º cuadrante.

$$\text{f) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + 0,75}{1 - 0,75} = 7$$

El ángulo está en el 3.º cuadrante.

Trigonometría

078



El ángulo que se forma entre cada dos nervios de un abanico es de 15° . Si el abanico tiene cuatro nervios centrales, calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se forman al desplegarlo nervio a nervio.



Tenemos que calcular las razones trigonométricas de 15° , 30° , 45° , 60° y 75° .

Las razones de 30° , 45° y 60° son conocidas.

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = 0,25$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = 0,96$$

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} (45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 0,96$$

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 0,26$$

079



Sabiendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x .

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

- a) Expresa los resultados utilizando radicales.
 b) Explica cómo determinarías las razones de $\frac{\pi}{4}$ rad y $\frac{\pi}{3}$ rad.

Hallamos las razones trigonométricas de x :

$$\cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

a) y b) Las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ rad, 45° y $\frac{\pi}{3}$ rad, 60° son conocidas.

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{42}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} = -\frac{8\sqrt{21} + 25\sqrt{3}}{9}$$

080



Se sabe que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

- a) Halla $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
 b) Determina, utilizando radicales, las razones de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$.

c) Sin determinar el ángulo x , calcula.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

d) Sin determinar el ángulo x , decide razonadamente en qué cuadrante están los ángulos.

$$x - \frac{\pi}{4} \quad x + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{a) } \cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,75^2}} = -0,8 \quad \text{sen}^2 x + 0,8^2 = 1 \rightarrow \text{sen } x = \sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6$$

$$\text{b) } \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{c) } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen } x \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} = -0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,7\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } \frac{\pi}{6}}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

d) Como el seno del ángulo $x - \frac{\pi}{4}$ es positivo, el ángulo está en el 2.º cuadrante.

Y como la tangente del ángulo $x + \frac{\pi}{6}$ es positiva, el ángulo está en el 3.º cuadrante.

081
●●●

Sabiendo que las razones de 32° son: $\text{sen } 32^\circ = 0,53$ $\cos 32^\circ = 0,848$

a) Calcula las razones trigonométricas de 62° .

b) Halla las razones de 31° .

c) ¿Puedes medir cualquier ángulo cuya medida en grados no tenga minutos ni segundos?

$$\text{a) } \text{sen } 62^\circ = \text{sen}(32^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 32^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 32^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ =$$

$$= 0,53 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,848 \cdot \frac{1}{2} = 0,88$$

$$\cos 62^\circ = \cos(32^\circ + 30^\circ) = \cos 32^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 32^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ =$$

$$= 0,848 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,53 \cdot \frac{1}{2} = 0,46$$

$$\text{tg } 62^\circ = \frac{0,88}{0,46} = 1,91$$

$$\text{b) } \text{sen } 31^\circ = \text{sen } \frac{62^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 62^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,46}{2}} = 0,52$$

$$\cos 31^\circ = \cos \frac{62^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 62^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,46}{2}} = 0,85$$

$$\text{tg } 31^\circ = \frac{0,52}{0,85} = 0,61$$

c) Sí podemos calcular las razones de cualquier ángulo, ya que a partir de las medidas de 32° y de 31° hallamos las medidas de 1° , y a partir de ellas, las demás.

Trigonometría

082
●●○

Expresa en función de la razón de un solo ángulo.

$$1 + \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha &= \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

083
●●○

Demuestra que se verifican estas igualdades.

a) $1 + \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ)$

b) $\cos 2\alpha = 2 \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha + 45^\circ)$

a) $2 \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ) =$
 $= 2(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 45^\circ + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 45^\circ)(\cos \alpha \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 45^\circ) =$
 $= 2 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \right) =$
 $= 2 \left(\frac{2 \cdot \cos^2 \alpha}{4} + \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{4} + \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{4} \right) =$
 $= \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

b) $2 \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha + 45^\circ) =$
 $= 2(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 45^\circ + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 45^\circ)(\cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 45^\circ) =$
 $= 2 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \right) =$
 $= 2 \left(\frac{2 \cdot \cos^2 \alpha}{4} - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{4} \right) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$

084
●●○

Comprueba la siguiente relación entre las razones trigonométricas de un ángulo.

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

085
●●○

Demuestra que es cierta la igualdad.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

086
●●○Simplifica la expresión: $\frac{2 \cos (45^\circ - \alpha) \cos (45^\circ + \alpha)}{\cos 2\alpha}$

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos (45^\circ - \alpha) \cos (45^\circ + \alpha)}{\cos 2\alpha} = \\ & \frac{2 \left(\frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha}{2} \right)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

087
●●○Busca una fórmula simplificada para calcular las razones del ángulo triple: $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$. Comprueba el resultado obtenido para el ángulo $\alpha = 40^\circ$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen} (2\alpha + \alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha = \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= \cos (2\alpha + \alpha) = (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = -3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^3 \alpha \\ \operatorname{sen} 120^\circ &= 3 \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \cos^2 40^\circ - \operatorname{sen}^3 40^\circ = 0,866 \\ \cos 120^\circ &= -3 \cos 40^\circ \cdot \operatorname{sen}^2 40^\circ + \cos^3 40^\circ = -0,5 \end{aligned}$$

088
●●○Demuestra la siguiente igualdad: $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) = \cos \beta$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \cos (\alpha - \beta) &= \\ &= \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \\ &= \cos \beta (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \cos \beta \end{aligned}$$

089
●●○

Demuestra que se verifica la igualdad.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} &= \frac{\operatorname{sen} (a + b)}{\operatorname{sen} (a - b)} \\ \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\cos a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\cos a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} (a + b)}{\operatorname{sen} (a - b)} \end{aligned}$$

090
●●○Comprueba, sustituyendo α por un ángulo conocido, que la siguiente igualdad es cierta.

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Demuestra que esta propiedad se cumple para cualquier ángulo α .Elegimos el ángulo de 30° .

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{tg} 2 \cdot 30^\circ} &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} & \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Trigonometría

091
●●○

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$

h) $\frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$

i) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

j) $\operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
 $\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \operatorname{sen} 2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22,5^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 112,5^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = (2 \operatorname{sen} x + 1) \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k & x_3 = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ \cdot k & x_4 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$

e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

$\frac{1}{\cos x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (1 - 2 \cos^2 x) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

$1 - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k$

h) $\frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x}{2 \cos x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = 2$

$\rightarrow \operatorname{tg} x = -0,2679 \rightarrow x = 345^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\begin{aligned} \text{i) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0 &\rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0 \\ &\rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\text{j) } \operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \operatorname{cos}(x + 60^\circ) = 1 + \operatorname{cos} 2x$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{cos} x}{2} + \frac{\operatorname{cos} x}{2} - \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \operatorname{cos} x = 2 \operatorname{cos}^2 x \rightarrow \operatorname{cos} x(2 \operatorname{cos} x - 1) = 0$$

$$\operatorname{cos} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$2 \operatorname{cos} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

092

Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^2 y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ \operatorname{cos} x = \frac{1}{2 \operatorname{cos} y} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} y \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^2 y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{cos}^2 y \\ \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{cos} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k$$

$$\operatorname{cos}^2 y = \operatorname{sen}^2 30^\circ \rightarrow \operatorname{cos} y = \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow y = 60^\circ + 180^\circ \cdot k$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ \operatorname{cos} x = \frac{1}{2 \operatorname{cos} y} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} y \end{array} \right\} &\xrightarrow{x = 120^\circ - y} \operatorname{cos}(120^\circ - y) = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{cos} y} + \operatorname{sen}(120^\circ - y) \operatorname{tg} y \end{aligned}$$

$$-\operatorname{cos}^2 y + \sqrt{3} \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{cos} y = 1 + \sqrt{3} \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{cos} y - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\rightarrow \operatorname{cos}^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow \operatorname{cos} 2y = -1 \rightarrow y = 90^\circ + 180^\circ \cdot k$$

$$x = 120^\circ - y = 120^\circ - 90^\circ - 180^\circ \cdot k = 30^\circ - 180^\circ \cdot k$$

Trigonometría

093
●●●

Resuelve las ecuaciones trigonométricas.

a) $4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sec} x = 0$

b) $\frac{\cos^2 x}{2 \cos x + \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$

c) $\frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \cos x$

d) $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 5 \cos^2 x - 4$

e) $2 \cos x - 1 = \operatorname{sec} x$

f) $2 \cos x + \operatorname{sen} x = 1$

g) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

a) $4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sec} x = 0 \rightarrow 4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$
 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 75^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$

b) $\frac{\cos^2 x}{2 \cos x + \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \rightarrow \cos^2 x = 2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos 2x = \operatorname{sen} 2x$
 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 22,5^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 112,5^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$

c) $\frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \cos x \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2 \operatorname{sen}^2 x}{2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = 1$
 $\rightarrow \frac{\operatorname{sen} x (\cos x + \operatorname{sen} x)}{\cos x (\cos x + \operatorname{sen} x)} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 5 \cos^2 x - 4 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 5(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 4$
 $6 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$
 $\rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 340^\circ 31' 44'' + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 199^\circ 28' 16'' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$
 $\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

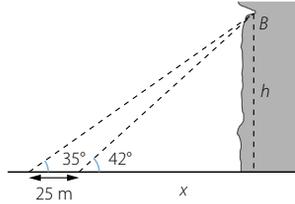
e) $2 \cos x - 1 = \operatorname{sec} x \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
 $\rightarrow \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$
 $\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

f) $2 \cos x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - 2 \cos x \rightarrow 5 \cos^2 x - 4 \cos x = 0$
 $\rightarrow \cos x (5 \cos x - 4) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36^\circ 52' 11,6'' + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 323^\circ 7' 48,4'' + 360^\circ \cdot l \end{cases}$

g) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 315^\circ + 360^\circ \cdot l \end{cases}$

094

Observa la situación y, con ayuda de la trigonometría, calcula la altura h a la que está el punto B .



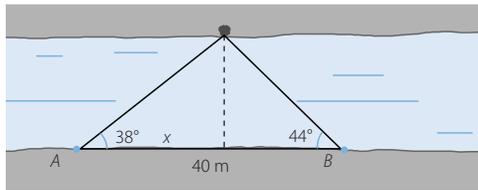
Llamamos h a la altura a la que está B .

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{25 + x} \\ \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1,11h \\ \rightarrow h = 17,51 + 0,63h \rightarrow h = 47,38 \text{ m} \end{array}$$

El punto B está a una altura de 47,38 m.

095

Dos amigos están separados por una distancia de 40 metros y ven un árbol en la orilla opuesta de un río, como indica la figura. Calcula la anchura del río.



Llamamos h a la anchura del río.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 44^\circ = \frac{h}{40 - x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1,28h \\ \rightarrow 38,63 - 1,24h = h \rightarrow h = 17,25 \text{ m} \end{array}$$

La anchura del río es 17,25 m.

096

Un mástil se sujeta al suelo por dos cables de acero que forman ángulos de 43° y $57^\circ 50'$, respectivamente. Si las distancias de los cables al pie del mástil suman 15 m, ¿cuál es la altura del mástil?

Llamamos h a la altura del mástil.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 43^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 57^\circ 50' = \frac{h}{15 - x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1,07h \\ \rightarrow 23,85 - 1,7h = h \rightarrow h = 8,83 \text{ m} \end{array}$$

La altura del mástil es 8,83 m.

Trigonometría

097



Sabiendo que el área de un triángulo rectángulo es 28 cm^2 y que uno de sus ángulos mide 60° :

- ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?
- Calcula la longitud de sus lados y su perímetro.

a) El ángulo desconocido mide: $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{56}{a} \rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{\operatorname{tg} 30^\circ}} = 9,85 \text{ cm}$$

$$b = 5,68 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$$c = \sqrt{9,85^2 + 5,68^2} = 11,37 \text{ cm}$$

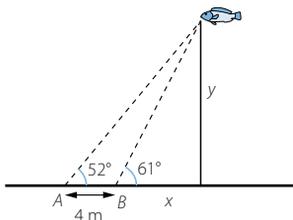
Los lados miden $11,37$; $5,68$ y $9,85$ cm.

El perímetro es $26,9$ cm.

098



Dos personas han ido a pescar y están colocadas en la orilla a una distancia de 4 m entre sí, por lo que ven saltar un pez con los ángulos que indica la figura.



¿Qué cantidad de sedal necesita cada uno para lanzar el anzuelo hasta el lugar donde saltó el pez?

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 52^\circ = \frac{y}{x+4} \\ \operatorname{tg} 61^\circ = \frac{y}{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{y=1,8x} 1,28x + 5,12 = 1,8x \rightarrow x = 9,84 \rightarrow y = 17,75$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador A:

$$9,84 + 4 = 13,84$$

$$a = \sqrt{13,84^2 + 17,75^2} = 22,51 \text{ m}$$

El pescador A necesita $22,51$ m de sedal.

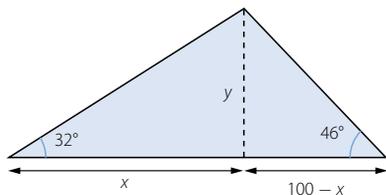
Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador B:

$$a = \sqrt{9,84^2 + 17,75^2} = 20,3 \text{ m}$$

El pescador B necesita $20,3$ m de sedal.

099

Dos focos situados en el suelo y en lados distintos, iluminan el campanario de una iglesia. La suma de las distancias de los focos hasta el pie de la torre es de 100 m. Si los ángulos que forman los haces de luz con el suelo son 32° y 46° , respectivamente, ¿qué altura tiene el campanario?



Llamamos y a la altura del campanario.

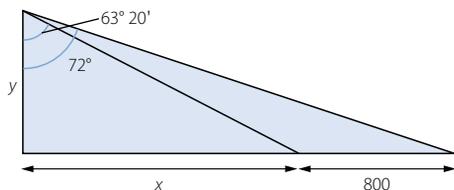
$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{y}{100 - x} \end{array} \right\} \xrightarrow{x = 1,64} 103,55 - 1,66y = y \rightarrow y = 38,93 \text{ m}$$

La altura del campanario es 38,93 m.

100

En una colina se ven, en línea recta hacia el Este, dos barrios que están separados por 800 metros. Desde la cima, se observan con ángulos de 18° y $26^\circ 40'$, respectivamente.

- ¿Cuál es la altura de la colina?
- ¿A qué distancia se encuentra cada barrio del observador?



- Llamamos y a la altura de la colina.

$$90^\circ - 18^\circ = 72^\circ \quad 90^\circ - 26^\circ 40' = 63^\circ 20'$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 72^\circ = \frac{x + 800}{y} \\ \operatorname{tg} 63^\circ 20' = \frac{x}{y} \end{array} \right\} \xrightarrow{x = 1,99y} 3,08y = 1,99y + 800 \rightarrow y = 735,94 \text{ m}$$

- $x = 199y = 1.504,42 \text{ m}$ $800 + x = 2.304,42 \text{ m}$

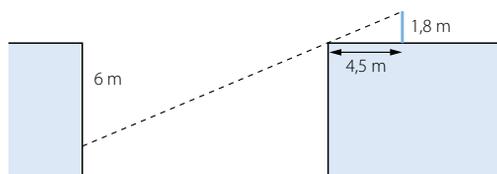
La distancia del observador a cada barrio es 1.674,78 m y 2.419,18 m, respectivamente.

Trigonometría

101



Esther y María desean medir la anchura de un desfiladero. Para ello se colocan en uno de los bordes del mismo. Esther deja deslizarse una cuerda que tiene 6 m de largo, sosteniéndola desde el borde del precipicio. Por su parte, María, cuyos ojos se hallan a 1,8 m del suelo, debe retirarse 4,5 m para ver el borde más próximo coincidiendo con el final de la cuerda.



- a) ¿Qué anchura tiene?
b) ¿Se podría calcular sin hacer uso de la trigonometría?

Llamamos x a la anchura del desfiladero.

$$\operatorname{tg} a = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$$

$$0,4 = \frac{6}{x} \rightarrow x = 15 \text{ m}$$

- a) La anchura del desfiladero es 15 m.
b) Se podría aplicar la semejanza de triángulos para resolver el problema.

102



Antonio mide 1,70 m y observa que su sombra es de 50 cm a cierta hora del día. ¿Con qué inclinación llegan los rayos solares a esa hora?

$$\operatorname{tg} a = \frac{1,7}{0,5} = 3,4 \rightarrow a = 73^\circ 36' 37,7''$$

Los rayos solares llegan con una inclinación de $73^\circ 36' 37,7''$.

103



Una casa de planta rectangular mide 12 metros de largo y 8 metros de ancho. El tejado, con una inclinación de 18° , es una superficie plana inclinada cuya parte más elevada está situada sobre uno de los lados mayores del rectángulo. Calcula el área del tejado.



Como sabemos que el tejado tiene forma rectangular y que uno de sus lados mide 12 m, hallamos la longitud del otro lado, x .

$$\cos 18^\circ = \frac{8}{x} \rightarrow x = 8,41 \text{ m}$$

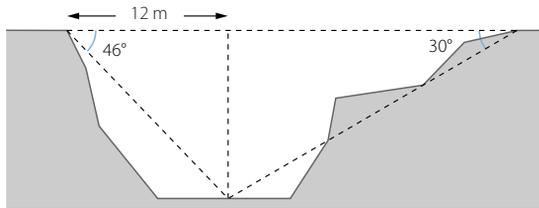
Calculamos el área del tejado:

$$A = 12 \cdot 8,41 = 100,92 \text{ m}^2$$

El área del tejado es $100,92 \text{ m}^2$.

104

Para construir un viaducto se han tomado estas medidas.



- a) ¿Qué longitud tendrá el viaducto?
b) ¿Cuál es la altura máxima de los pilares que lo sujetan?

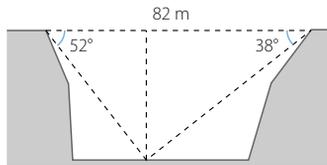
Llamamos x a la longitud del viaducto e y es su altura máxima.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{y}{12} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{x - 12} \end{array} \right\} \rightarrow y = 12,43 \text{ m} \rightarrow x = 33,53 \text{ m}$$

- a) La longitud del viaducto es 33,53 m.
b) La altura máxima de los pilares es 12,43 m.

105

Calcula la altura a la que caminan los viajeros cuando cruzan un desfiladero por un puente colgante como el de la figura.



Llamamos y a la altura del puente colgante.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 52^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{y}{82 - x} \end{array} \right\} \xrightarrow{x = 0,78y} 64,07 - 0,61y = y \rightarrow y = 39,8 \text{ m}$$

La altura del puente colgante es 39,8 m.

Trigonometría

106



Sabiendo que x es un ángulo del 2.º cuadrante y que $\operatorname{tg} x = -0,5322$ determina, sin calcular el ángulo x :

a) $\operatorname{sen} 2x$

b) $\cos\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right)$

a) $\cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \rightarrow \cos x = -0,8828$

$$\operatorname{sen}^2 x + (-0,8828)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - 0,7793} = 0,4698$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot (-0,8828) \cdot 0,4698 = -0,8295$$

b) $\cos\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,8828}{2}} = 0,9703$

107



Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual que su producto.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

$$a + b + c = 180^\circ$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg}[180^\circ - (a + b)] = -\operatorname{tg}(a + b) = -\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Por tanto, la suma de las tangentes es:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg} c = -\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \rightarrow \operatorname{tg} c(1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b) = -\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c = -\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$$

108



Las medidas de los lados de un triángulo son proporcionales a 5, 6 y 7, respectivamente y su área es $24\sqrt{6}$. Determina la medida de sus lados y de sus ángulos.

Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y sus ángulos son iguales. Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-49 + 36 + 25}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0,2$$

$$\hat{A} = 78^\circ 27' 46,9''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 49 + 25}{2 \cdot 7 \cdot 5} = 0,5429$$

$$\hat{B} = 57^\circ 7' 7,42''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 78^\circ 27' 46,9'' - 57^\circ 7' 7,42'' = 44^\circ 25' 5,68''$$

Para hallar la longitud de los lados aplicamos la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$a = 5t; b = 6t; c = 7t; p = \frac{5t + 6t + 7t}{2} = \frac{18t}{2} = 9t$$

$$24\sqrt{6} = \sqrt{9t(9t-7t)(9t-6t)(9t-5t)} \rightarrow 3,456 = 9t \cdot 2t \cdot 3t \cdot 4t \rightarrow t = 2$$

Los lados miden 10, 12 y 14, respectivamente.

109

Comprueba que la siguiente fórmula se cumple si \hat{A} mide 45° .

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{A} + 30^\circ}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2} \cos 30^\circ + \sqrt{2} \operatorname{sen} 30^\circ}{4}$$

Demuestra que es una igualdad que solo se cumple para otro valor de \hat{A} . Encuéntralo.

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{45^\circ + 30^\circ}{2}\right) = 0,3706$$

$$\frac{2 - \sqrt{2} \cos 30^\circ + \sqrt{2} \operatorname{sen} 30^\circ}{4} = 0,3706$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{A} + 30}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\hat{A} + 30^\circ)}{2} = \frac{1 - \cos \hat{A} \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2}$$

$$\frac{1 - \cos \hat{A} \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} \cos 30^\circ + \sqrt{2} \operatorname{sen} 30^\circ}{4}$$

$$\frac{-\sqrt{3} \cos \hat{A} + \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}$$

$$4 \cos^2 \hat{A} + (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos \hat{A} + \sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \hat{A}_2 = 165^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

110

Obtén la relación que existe entre el lado de un pentágono regular y el radio de la circunferencia donde se halla inscrito.

En el pentágono regular se pueden formar cinco triángulos isósceles cuyo lado desigual coincide con el lado del pentágono y los lados iguales son radios de la circunferencia.

El ángulo opuesto al lado desigual mide 72° y los otros dos ángulos miden 54° .

Llamamos a al lado desigual y r al radio.

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{r}{\frac{a}{2}} \rightarrow a = \frac{2r}{\operatorname{tg} 54^\circ}$$

111

En un triángulo rectángulo se verifica también el teorema del seno. Averigua si esto nos da información adicional sobre los elementos de ese triángulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Como \hat{A} es un ángulo recto y \hat{B} y \hat{C} son ángulos complementarios:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\cos \hat{C}} \rightarrow \begin{cases} b = a \operatorname{sen} \hat{B} \\ c = a \cos \hat{C} \end{cases}$$

Obtenemos que los catetos son proyecciones de la hipotenusa.

Trigonometría

112



El teorema del coseno tiene tres enunciados, uno para cada lado del triángulo. Si el triángulo es rectángulo y a es la hipotenusa, la fórmula del teorema del coseno que empieza por a es, realmente, el teorema de Pitágoras. Investiga si los otros dos enunciados nos dan alguna propiedad nueva del triángulo.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{c}{a} \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C} \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{b}{a} \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Se da el cateto desconocido en función del otro cateto y la hipotenusa.

Además, si sumamos las dos primeras ecuaciones resulta:

$$b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(c \cos \widehat{B} - b \cos \widehat{C})$$

$$a = c \cos \widehat{B} - b \cos \widehat{C}$$

113



Sabemos que $\operatorname{tg} z = 1,5$. Con estos datos, ¿puedes calcular $\operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ sin determinar el ángulo z ?

Si aplicas la fórmula del ángulo suma tendrás dificultades. Utiliza esta expresión.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tg} z + 1}{1 - \operatorname{tg} z}}{1 - \frac{\operatorname{tg} z + 1}{1 - \operatorname{tg} z}} = \\ &= \frac{2}{-2 \operatorname{tg} z} = -\operatorname{cotg} z \end{aligned}$$

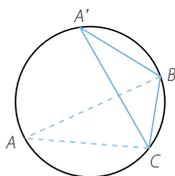
114



Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden igual. Utilízalo para demostrar que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

siendo d el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



El triángulo \widehat{CBA}' es recto por ser uno de sus lados el diámetro de la circunferencia. Los lados opuestos a los ángulos \widehat{B} y \widehat{D} son iguales.

Los ángulos \widehat{A} y \widehat{A}' son iguales por abarcar el mismo arco, luego sus senos son iguales.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}'} = \frac{a}{\frac{a}{d}} = d$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = d$$

PARA FINALIZAR...

115 ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $\operatorname{sen} x \cos x = k$?

Acota las posibles soluciones.

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = k \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2k \rightarrow \operatorname{sen} 2x = 2k$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} x < |1| \rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

Las soluciones estarán acotadas en $[0^\circ, 180^\circ] + 180^\circ \cdot k$.

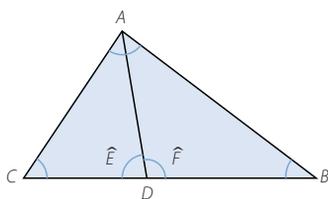
116 Demuestra que la bisectriz interior del ángulo \widehat{A} , en el triángulo \widehat{ABC} , divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados AB y AC .

Llamamos D al punto de corte de la bisectriz con el lado CB .

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{CD}{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AD}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \widehat{E}} \rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \widehat{E}}$$

$$\frac{DB}{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AD}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \widehat{F}} \rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \widehat{F}}$$



Como los ángulos son suplementarios, sus senos son iguales.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

117 Demuestra que la suma del seno y el coseno de un ángulo es siempre menor o igual que el doble del seno de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

¿Para qué ángulos se verifica la igualdad?

$$\text{Suponemos } \operatorname{sen} x + \cos x > 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x + 1 < 0$$

El discriminante de esta ecuación es cero, y salvo la igualdad, siempre es positivo o siempre es negativo; en este caso siempre es positivo, lo que contradice

la hipótesis. Es decir: $\operatorname{sen} x + \cos x \leq \sqrt{2}$

La igualdad se verifica para:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} &= \sqrt{2} \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x + 1 = 0 \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k$$

Trigonometría

118 Averigua el perímetro y el área de un polígono regular de radio r y n lados.

Dividimos el polígono en triángulos isósceles, y llamamos r a los lados iguales y l al lado desigual.

Si el polígono tiene n lados, los ángulos iguales de los triángulos miden: $90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$

Relacionamos el radio de la circunferencia circunscrita con el lado del polígono utilizando el coseno de este ángulo:

$$\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{r} \rightarrow l = 2r \cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$$

Relacionamos la apotema del polígono, altura del triángulo, con el radio utilizando el seno del ángulo:

$$\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{a_p}{r} \rightarrow a_p = r \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$$

Por tanto, el perímetro mide: $2r \cdot n \cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$

Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= r \cdot n \cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \\ &= r^2 \cdot n \cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) \end{aligned}$$

119 En un triángulo equilátero de lado l se han trazado las circunferencias inscrita y circunscrita. Calcula la altura del triángulo y la medida de los radios de ambas circunferencias en función de l .

Aplicamos el teorema de Pitágoras para expresar la altura en función del lado del triángulo:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

Llamamos R y r a los radios de las circunferencias mayor y menor, respectivamente.

Consideramos el triángulo que forman los radios con la mitad del lado.

Este triángulo es semejante con el triángulo que resulta al dividir el triángulo equilátero por una bisectriz.

Por tanto, los ángulos de este triángulo son 30° , 60° y 90° .

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

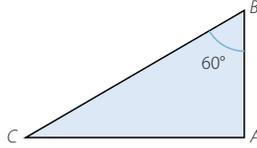
La altura del triángulo es la suma de los radios de las circunferencias.

$$R + r = \frac{\sqrt{3}}{2} l \rightarrow R + \frac{\sqrt{3}}{3} R = \frac{\sqrt{3}}{2} l \rightarrow R = \frac{3\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} l = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{4} l$$

$$r = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} l$$

120 En un triángulo \widehat{ABC} , se cumplen estas condiciones:

- El lado BC mide el doble que el lado AB .
- El ángulo \widehat{B} mide 60° .



Halla los otros dos ángulos.

Llamamos a al lado BC y c al lado AB , y se tiene que $a = 2c$.

Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow b^2 = (2c)^2 + c^2 - 4c^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow b^2 = 3c^2 \rightarrow b = \sqrt{3} c$$

Utilizamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{\sqrt{3}c}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{\sqrt{3}c}{2\sqrt{3}c} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{C} = 30^\circ \rightarrow A = 90^\circ$$