

1B. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$.
(0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

- a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. **(1 punto)**
b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. **(1,5 puntos)**

4B. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z - 1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Estudia su posición relativa. **(1,25 puntos)**
b) Calcula la distancia entre r y s . **(1,25 puntos)**

$$1B) \text{ si } a > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} ?$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x - (1+x)}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = \\ &= \frac{-2}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x)} = \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x)} = e^{-2a} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(\cos 2x)}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \uparrow}} \frac{\frac{3}{\cos(2x)}(-2 \sin(2x))}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \sin(2x)}{2x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \uparrow}} \frac{-\frac{4a}{\cos^2(2x)}}{2} = -2a \quad \text{L'Hôpital} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ De } (*) \text{ et } (*) : e^{-1} = e^{-2a} \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

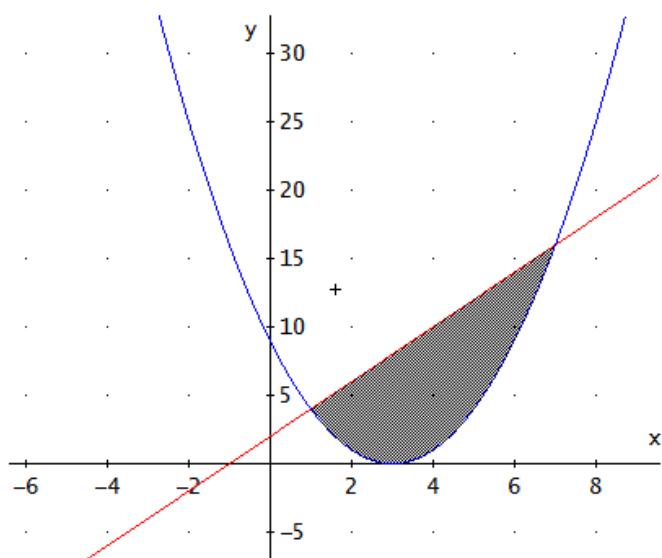
$$2B) f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{6}{2} = 3 \quad \left. \begin{array}{l} y_v = 0 \\ V(3,0) \end{array} \right\}$$

$$\text{Tabla} \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 5 \\ \hline y & 4 & 4 \end{array}$$

$$g(x) = 2x + 2$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{array}$$



b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Área

$$\boxed{A = \int_1^7 [(2x+2) - (x^2 - 6x + 9)] dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx =} \\ = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 7x \right]_1^7 = \left(-\frac{7^3}{3} + \frac{8 \cdot 7^2}{2} - 7 \cdot 7 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{8 \cdot 1^2}{2} - 7 \cdot 1 \right) = \\ = \boxed{36 \text{ u}^2}$$

3B) a) $x =$ precio de un café
 $y =$ " de un refresco
 $z =$ " de una infusión

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y + 2z = 15,40 \\ 5x + 4y + 3z = 14,40 \\ 3x + 8y + z = 18 \end{array} \right.$$

b) Para razonar que hay un error, vamos a demostrar que el sistema es incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 15,40 \\ 5 & 4 & 3 & 14,40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3,85 \\ 5 & 4 & 3 & 14,40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow[-5F_1+F_2]{-3F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3,85 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -24,2 \\ 0 & 7 & -1 & -5,2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3,85 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -24,2 \\ 0 & 0 & 0 & -29,2 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -29,2$$

Sistema incompatible.

$$4B) \Gamma = \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Posición relativa

$$\Gamma \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y + 1 \Rightarrow x - 2y - 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv x = y = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Por tanto, r y s se cruzan.

$$b) d(r, s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_s P_r})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\vec{u}_r = (2, 1, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{P_s P_r} = (0, -1, 1) - (0, 0, 1) = (0, -1, 0) \\ \vec{P_r} = (0, -1, 1) \\ \vec{P_s} = (0, 0, 1) \end{array} \right.$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-4, 5, 1)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_s P_r}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Por tanto:

$$\boxed{d(r, s) = \left| \frac{-5}{\sqrt{42}} \right| = \frac{5\sqrt{42}}{42} u}$$