1B. Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,25 puntos)

b) Asíntotas verticales y oblícuas. (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = -x^2 + 2x - 2}$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. (0,5 puntos)

b) Considera el sistema $\boldsymbol{A \cdot X = B}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz 3×4 , $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}$ es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz $\boldsymbol{B}$? (0,50 puntos)

c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado? (0,75 puntos)

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $\boldsymbol{(A|B)}$? (0,75 puntos)

4B. Dados los puntos $\boldsymbol{P(1,1,2)}$ y $\boldsymbol{Q(1,1,0)}$, y la recta $\boldsymbol{r} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x + 2y} & = & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{y + z} & = & \boldsymbol{0} \end{array} \right.$, se pide:

a) Ecuación general del plano $\boldsymbol{\pi}$ que contiene al punto $\boldsymbol{P}$ y a la recta $\boldsymbol{r}$. (1,25 punto)

b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ al plano $\boldsymbol{\pi}$ calculado en el apartado anterior. (1,25 puntos)

1A) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ (Cuidado que el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$)

a) $$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \\ (2-x)^2 > 0 \quad \text{Siempre } (\forall x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & + & & - \\ \searrow & 0 & \nearrow & 2 & \nearrow & 4 & \searrow \end{array}$$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (0,4) - \{2\} \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}}$$

b) Asíntotas verticales: ¿$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ es una asíntota vertical}}$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m_1 x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$

La recta $\boxed{y = -x - 2 \text{ es una asíntota oblicua}}$

¡¡OJO!! El haber puesto $\pm\infty$ en los límites ha sido después de asegurarme de que los límites no dependían de que fuese $+\infty$ o $-\infty$. Si no estamos seguros, primero hay que hacerlo con $+\infty$ y luego con $-\infty$, porque hay funciones que tienen 2 asíntotas oblicuas.

1B) a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_v = 1^2 - 2 - 2 = -3 \end{array}\right\} V(1, -3)$

Puntos de corte con OX: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2} \simeq 2{,}7 \\ \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2} \simeq -0{,}7 \end{cases}$

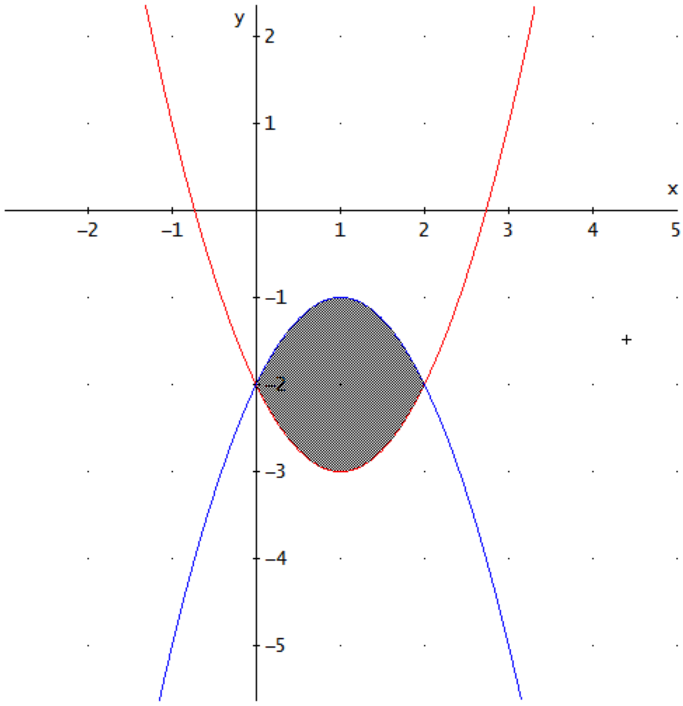
$g(x) = -x^2 + 2x - 2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-2}{2\cdot(-1)} = 1 \\ y_v = -1^2 + 2 - 2 = -1 \end{array}\right\} V(1,-1)$

No corta al eje OX

Tabla

x	0	2
y	−2	−2



b) Puntos de corte de f(x) y g(x)

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

Área

$\boxed{A} = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 \left((-x^2+2x-2) - (x^2-2x-2)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx =$

$= -\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^2}{2} \Big|_0^2 = \dfrac{-2\cdot 8}{3} + \dfrac{4\cdot 4}{2} = \boxed{\dfrac{8}{3}\,u^2}$

3A) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada, $(A|B)$.

b) $A_{3\times 4} X_{4\times 1} = B$ $\boxed{\text{La dimensión de } B \text{ es } 3\times 1}$

c) No, ya que solo hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

d) En principio tenemos dos posibilidades: 1 y 3

Sin embargo, como el rango de la matriz ampliada nunca puede ser menor que el rango de la matriz de coeficientes, el $\boxed{\text{rango de } (A|B) \text{ es tres}}$.

4A) a) π t. q. $\begin{cases} P \in \pi \\ r \subset \pi \end{cases}$

π está determinado por $\begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \vec{PR} \text{ donde } R \in r \text{ (tomaremos } R(1,0,0)) \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (2,-1,1)$$

$$\vec{PR} = (1,0,0) - (1,1,2) = (0,-1,-2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{3x + 4y - 2z - 3 = 0 \equiv \pi}$$

b) Llamamos M al punto medio de P y Q.

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M &= \frac{2+0}{2} = 1 \end{aligned}\right\} M(1,1,1)$$

$$\boxed{d(M,\pi)} = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \boxed{\frac{2\sqrt{29}}{29}\ u}$$