1A. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**

b) Calcula un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$.

(1,5 puntos)

2A. Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\, dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**

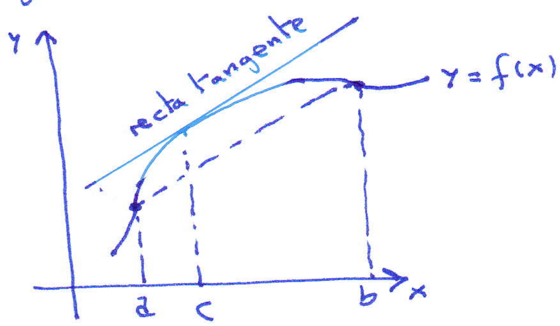
b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s. **(1,25 puntos)**

1A) a) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretación geométrica

Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



b) La función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, luego vamos a aplicar el TVM de Lagrange a f en dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(2)=17 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{17-1}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ f'(c) = 6c+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6c+2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

2A) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$

Factorizamos el denominador

$$x^3+x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (igualando los numeradores y dándole valores a x):

$$Ax^2+Bx(x+1)+C(x+1)=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}$$

Integral

$$\int\frac{x+2}{x^3+x^2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\ln|x+1|-\ln|x|+2\int x^{-2}dx=\ln|x+1|-\ln|x|+2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=$$

$$=\boxed{\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C}$$

3A) a) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I$

Por tanto, $\boxed{A^n=I \text{ cuando } n \text{ es par}}$

b) $6A^{20}X=B-3AX$

Como $A^{20}=I$ se tiene: $6X=B-3AX \Rightarrow 6X+3AX=B \Rightarrow$

$\Rightarrow (6I+3A)X=B \Rightarrow (6I+3A)^{-1}(6I+3A)X=(6I+3A)^{-1}B \Rightarrow$

Cuidado

$\Rightarrow \boxed{X=(6I+3A)^{-1}B}$

Calculamos $6I+3A$

$$6I+3A=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{pmatrix}$$

Calculamos $(6I+3A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&3&1&0&0\\0&9&0&0&1&0\\3&0&6&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&6&0&0&1\\0&9&0&0&1&0\\6&0&3&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1:3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1/3\\0&9&0&0&1&0\\6&0&3&1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{-6F_1+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:(-9)]{F_2:9} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_3+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array}\right) \Rightarrow (6I+3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = (6I+3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

4A) $r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$, $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Para calcular a de forma que se corten en un punto lo que hay que hacer en resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1+2\mu \\ y = \mu \\ z = 1+3\mu \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -1+2\mu = \lambda \\ \mu = a+\lambda \\ 1+3\mu = -\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ \lambda - \mu = -a \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - 3\mu = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 0}} \Rightarrow \lambda - 2\cdot 0 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow -1+0 = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El punto de corte de r y s es:

$$r \equiv \left.\begin{cases} x = -1+2\cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1+3\cdot 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{P(-1,0,1)}$$

b) El plano π que nos piden está determinado por $\vec{u}_r = (2,1,3)$, $\vec{u}_s = (1,1,-1)$ y $\overrightarrow{PG}$ donde P es el punto de intersección de r y s, y G es un punto genérico: $\overrightarrow{PG} = (x,y,z) - (-1,0,1) = (x+1, y, z-1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 5y - z + 5 = 0 \equiv \pi}$$