1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima. **(2 puntos)**

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

3A. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A. **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

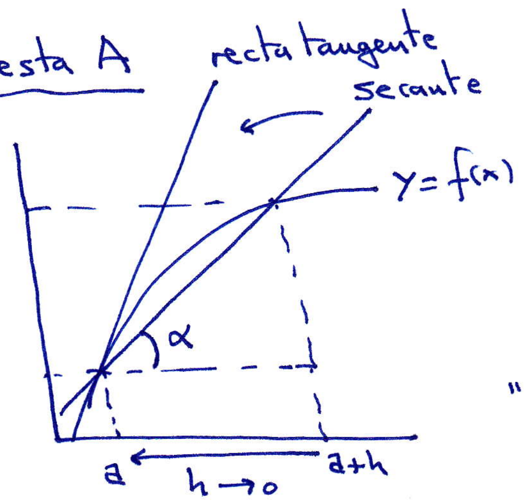
4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

Propuesta A

1A) a)



$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\,\alpha = m_{secantes}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = m_{\substack{recta\\tangente}}$$

"La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto"

b) $m_{\substack{recta\\tangente}} = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 = g(x)$

Queremos optimizar $g(x)$:

$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$

$g''(x) = 24x - 48$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$g''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máx. relativo

$g''(3) = 24 > 0 \Rightarrow x = 3$ " " mín. relativo

La pendiente es mínima en $x=3$ y máxima en $x=1$.

2A) ¿$F(x)$ primitiva de $f(x) = (x^2+1)e^x$ t.q. $F(0)=5$?

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+1 \to du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{bmatrix} = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x\,dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = F(x)$$

$$\int 2xe^x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x \to du = 2\,dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{bmatrix} = 2xe^x - \int 2e^x\,dx =$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$F(0) = (0^2+1)e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0 + 2\cdot e^0 + C = 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$$

$$\boxed{F(x) = \int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + 2}$$

3A) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \neq 0$

a) $AA^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$= a \cdot a^3 - b \cdot (-b^3) = a^4 + b^4 \neq 0$ ya que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

4A) $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$

$\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$

a) ¿$\lambda : \pi_1 \perp \pi_2$?

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, \lambda) \end{array}\right\}$ $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -4}$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} =$$

$$= 9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (9, 6, 3)$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 9\mu \\ y = 2 + 6\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}}$$

¡¡No usar λ, ya que se ha usado en el apartado anterior para otra cosa!!