Representa gráficamente la función $y = x \cdot e^{-x}$.

I) **Dominio**

La función en cuestión se puede escribir como $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. No pertenecerán al dominio los puntos que anulen el denominador, pero en este caso e^x no toma nunca el valor 0. Por tanto:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad 0 = x \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 0$$

Por tanto el punto de corte es (0, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0}{e^0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 0)$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y también $f(-x) \neq -f(x)$, con lo cual la función **no es par ni impar**.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

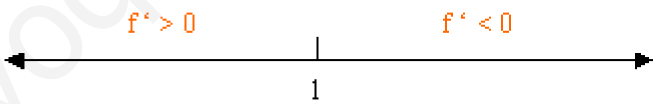
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{(Punto singular)}$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en (–∞, –1).

Es **decreciente** en (1, +∞).

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-1) \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

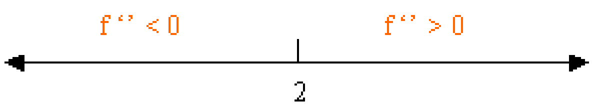
$f''(1) = \dfrac{-1}{e} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f''(x) = 0$.

$$\frac{x-2}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 2$$

Así:



Por tanto, es **convexa** en (2, +∞).

Es **cóncava** en (–∞, 2).

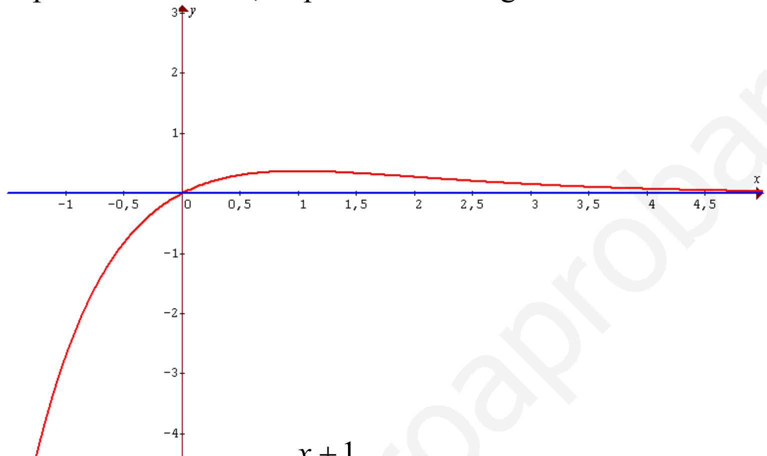
VIII) **Puntos de inflexión**
Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, estudiemos cómo varía la curvatura en ellas. A la izquierda de $x = 2$ la función es cóncava, mientras que a la derecha es convexa, esto es, cambia la curvatura y por tanto habrá un **punto de inflexión** en $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$.

IX) **Asíntotas**
No existen asíntotas verticales, pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$, esto es, no existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \xrightarrow{L'Hopital} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Por tanto sí existe **asíntota horizontal** cuando $x \to +\infty$ y esta es la recta $y = 0$.

Como hay asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.
Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

I) **Dominio**
La función en estudio tiene un denominador y una raíz. Por tanto, no pertenecerán al dominio los valores que anulen el denominador, ni los que hagan el radicando negativo. Sin embargo, se puede observar fácilmente que el radicando siempre toma valores positivos y por tanto se deduce que:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**
Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad 0 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = -1$$

Por tanto el punto de corte es $(-1, 0)$.
Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 1)$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y también $f(-x) \neq -f(x)$, con lo cual la función **no es par ni impar**.

IV) **Periodicidad**
La función **no** es periódica.

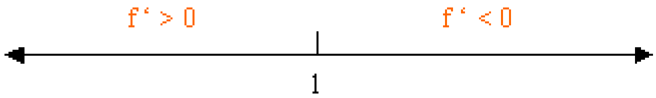
V) **Monotonía**
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - (x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{(x^2+1)-(x^2+x)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \quad \text{(Punto singular)}$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(-\infty, -1)$.
Es **decreciente** en $(1, +\infty)$.

VI) **Extremos relativos**
Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-1)\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1-x)\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]^2} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(-1)\cdot(x^2+1) - (1-x)\cdot 3\cdot x\right]}{(x^2+1)^3} =$$

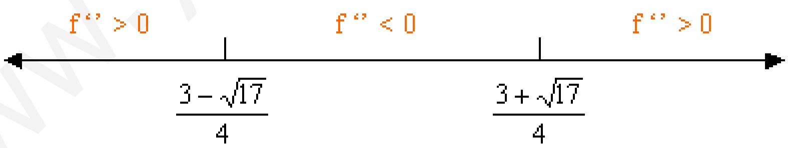
$$= \frac{-x^2-1-3x+3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2-3x-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(1) = \dfrac{-2}{\sqrt{32}} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(1, \sqrt{2}\right)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de $f''(x)$. Sin embargo, el denominador siempre es positivo y por tanto el signo de la derivada segunda coincide con el signo del numerador. Estudiemos su signo:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíces: } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Así:



Por tanto, es **convexa** en $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$.

VIII) **Puntos de inflexión**
Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, estudiemos cómo varía la curvatura en ellas, ya que calcular la derivada tercera sería bastante laborioso. A la izquierda de $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ la función es convexa, mientras que a la derecha es cóncava, esto es, cambia la curvatura y por tanto habrá un **punto de inflexión** en $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$. De igual modo, en $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$, la curvatura cambia de cóncava a convexa y por tanto también habrá otro **punto de inflexión** en $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.

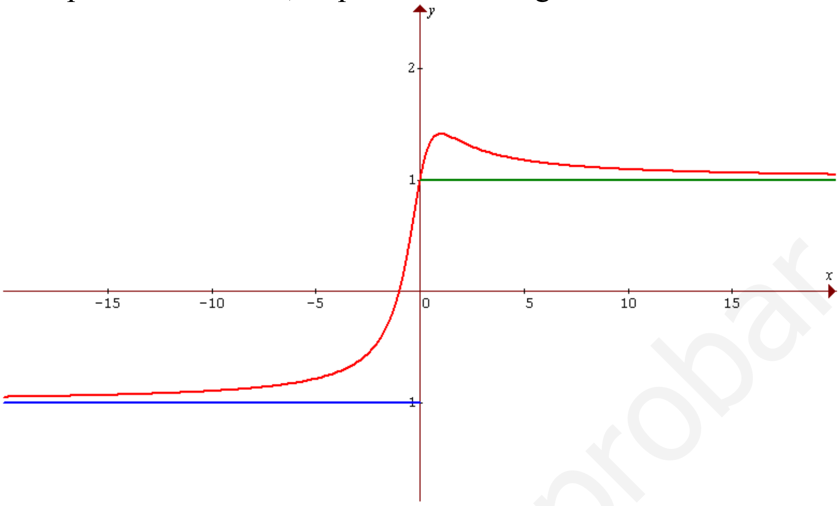
IX) **Asíntotas**
No existen asíntotas verticales, pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$, esto es existe **asíntota horizontal** cuando $x \to -\infty$ y esta es $y = -1$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, por tanto existe **asíntota horizontal** cuando $x \to +\infty$ y esta es las recta $y = 1$.

Como hay asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \frac{\text{Ln}\, x}{x}$.

I) **Dominio**
En la función sometida a estudio aparece un logaritmo y un denominador. Por tanto no pertenecerán al dominio los puntos que hagan negativo o nulo el argumento del logaritmo, ni aquellos que anulen el denominador. Por tanto:

$$Dom\, f(x) = (0, +\infty)$$

II) **Cortes con los ejes**
Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{\text{Ln}\, x}{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = \text{Ln}\, x \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 1$$

Por tanto el punto de corte es (1, 0).
Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y. Sin embargo, en este caso $x = 0$ no pertenece al dominio, lo cual significa, que no cortará al eje OY.

III) **Simetrías**
Por ser $Dom\, f(x) = (0, +\infty)$, no podrá ser simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen de coordenadas. Por tanto la función no es **ni par ni impar**.

IV) **Periodicidad**
La función **no** es periódica.

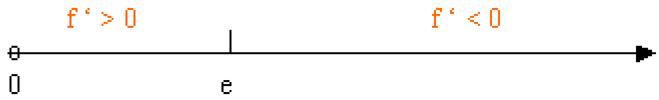
V) **Monotonía**
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \text{Ln}\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \text{Ln}\, x}{x^2}$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - \text{Ln}\, x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Ln}\, x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = e \text{ (Punto singular)}$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(0, e)$.
Es **decreciente** en $(e, +\infty)$.

VI) **Extremos relativos**
Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x^2 - (1 - Ln\, x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\cdot \text{Ln}\, x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\cdot \text{Ln}\, x}{x^4} = \frac{2\text{Ln}\, x - 3}{x^3}$$

$f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de $f''(x)$. Sin embargo, el denominador siempre es positivo (puesto que x únicamente puede tomar valores positivos) y por tanto el signo de la derivada segunda coincide con el signo del numerador. Estudiemos su signo:

$$2\,\text{Ln}\, x - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Ln}\, x = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíz: } x = e^{\frac{3}{2}}$$

Así:

Por tanto, es **convexa** en $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(0,\ e^{\frac{3}{2}}\right)$.

VIII) **Puntos de inflexión**
De momento ya sabemos las raíces de la derivada segunda.

$$f'''(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)\cdot x^3 - (2\,\text{Ln}\, x - 3)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2 - 6x^2\cdot \text{Ln}\, x + 9x^2}{x^6} = \frac{11x^2 - 6x^2\cdot \text{Ln}\, x}{x^6} = \frac{11 - 6\text{Ln}\, x}{x^4}$$

$$f'''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{e^6} > 0$$

Por tanto habrá un **punto de inflexión** en $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

IX) **Asíntotas**
Estudiemos lo que ocurre en $x = 0$ que es el "punto frontera" del dominio de definición de la función.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Ln}\, x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \text{Ln}\, x\right) = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\text{Ln}\, x\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)$$

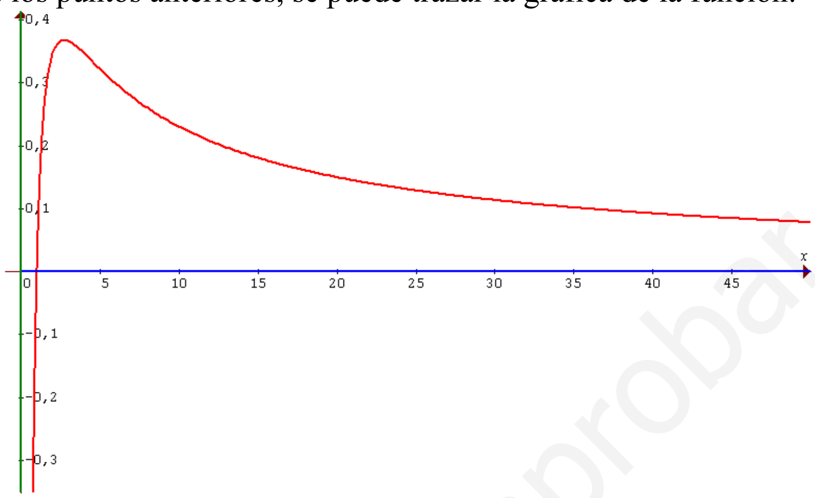
Por tanto, la recta $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la función.
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$, que es un límite indeterminado. Aplicamos la regla de L´Hopital para resolverlo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto existe **asíntota horizontal** cuando $x \to +\infty$ y esta es las recta $y = 0$.
Como hay asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = x + \sqrt[3]{x^2}$.

I) **Dominio**
Se trata de una función en la que aparece una raíz cúbica. Por tratarse de una raíz de índice impar no habrá ningún problema al calcularla y por tanto su dominio es todo $\mathbb{R}$.

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**
Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = x + \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow -x = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow (-x)^3 = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 \Rightarrow -x^3 = x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow \text{Raíces: } x = 0 \text{ (doble) y } x = -1$$

Por tanto los puntos de corte son $(-1, 0)$ y $(0, 0)$.
Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.
$y = 0 + \sqrt[3]{0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Por tanto el punto de corte es $(0, 0)$.

III) **Simetrías**

$$f(-x) = (-x) + \sqrt[3]{(-x)^2} = -x + \sqrt[3]{x^2}$$

Como se observa $f(x) \neq f(-x)$ y además $f(-x) \neq -f(x)$, y por tanto la función no es ni par ni impar.

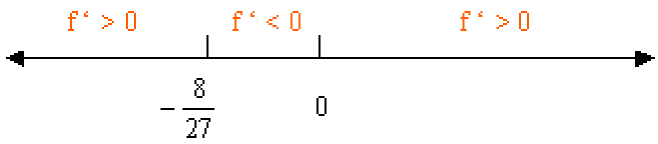
IV) **Periodicidad**
La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f'(x) = 1+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

$$1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=-1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{3}=\sqrt[3]{x} \quad\Rightarrow\quad \text{Raíz: } x=-\frac{8}{27}$$

Pero además debemos tener en cuenta el punto $x = 0$, pues en él la función no es derivable.
Así:



Por tanto, es **creciente** en $\left(-\infty,-\dfrac{8}{27}\right)\cup(0,+\infty)$.

Es **decreciente** en $\left(-\dfrac{8}{27},0\right)$.

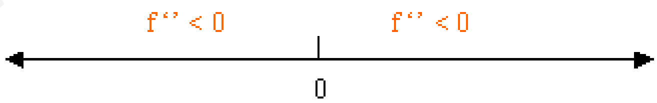
VI) **Extremos relativos**
Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$f''\left(-\dfrac{8}{27}\right) < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(-\dfrac{8}{27},\dfrac{4}{27}\right)$.

Por otra parte, como se dijo anteriormente, también debemos estudiar el punto $x = 0$. En este caso, el estudio lo haremos a través de la monotonía. Como se puede observar, en el intervalo $\left(-\dfrac{8}{27},0\right)$ la función es decreciente, mientras que en el intervalo $(0, +\infty)$ es creciente. Por tanto hay un **mínimo** en el punto $(0, 0)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f''(x) = 0$. Esta no tiene raíces, pero se puede observar fácilmente que no existe para $x = 0$, y por tanto debemos tener en cuenta dicho punto. Así:



Por tanto, es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

VIII) **Puntos de inflexión**
Como ya sabemos la función es siempre cóncava, esto es, no cambia su curvatura y por tanto no tiene puntos de inflexión.

IX) **Asíntotas**
Por ser Dom $f(x) = \mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales.
Veamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)=\infty$$

Por tanto no hay asíntotas horizontales.

Veamos por último si hay asíntotas oblicuas ($y = mx + n$):

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[(x + \sqrt[3]{x^2}) - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^2} \right] = \infty$$

Como el límite que determina n es infinito, no existe la **asíntota oblicua**.^

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función: