Representa gráficamente la función $y = x^4 - 2x^2$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función polinómica, su dominio de definición es $\mathbb{R}$ y además es continua en todo el dominio.

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = x^4 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2\,(x^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0 \text{ (doble) y } x = \pm\sqrt{2}$$

Por tanto los puntos de corte son $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$y = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow$ Por tanto el punto de corte es $(0, 0)$.

III) **Simetrías**

$$f(-x) = (-x)^4 - 2\,(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

Por tanto, $f(x) = f(-x)$, la función es **par**, esto es, simétrica respecto al eje OY.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica. En la mayoría de los casos se estudiará la periodicidad solamente cuando aparezcan funciones trigonométricas.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

$$4x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x\,(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0,\ x = 1 \text{ y } x = -1$$

Así:

$f' < 0$	-1	$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' > 0$

Por tanto, es **creciente** en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Es **decreciente** en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$; $\quad f''(x) = 12x^2 - 4$.

$f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $(-1, -1)$.

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $(0, 0)$.

$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $(1, -1)$.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f''(x) = 0$.

$$12x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Así:

$f'' > 0$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f'' < 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f'' > 0$

Por tanto, es **convexa** en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, calculemos la derivada tercera: $f'''(x) = 24x$.

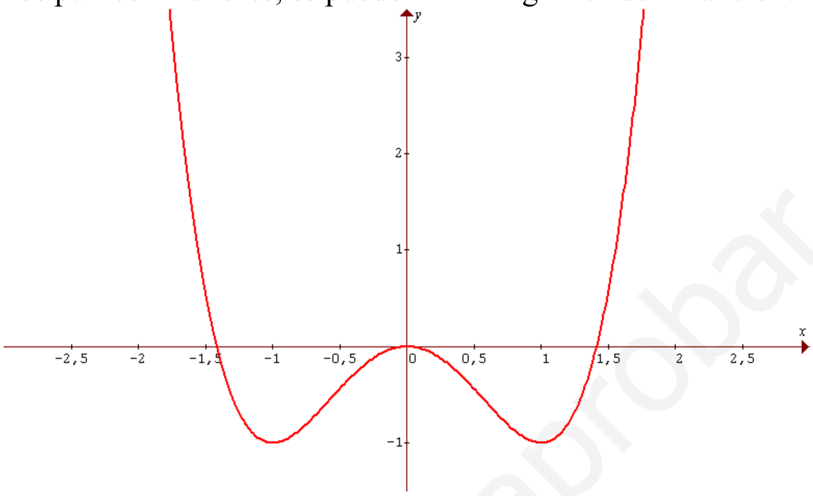
$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0$, hay un **punto de inflexión** en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$.

$f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0$, hay un **punto de inflexión** en $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$.

IX) **Asíntotas**

No existen asíntotas de ningún tipo, pues se trata de una función polinómica.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función racional, no pertenecerán al dominio los puntos que anulen el denominador. Por tanto: $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$.

$$\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad 0 = x^3 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 0 \text{ (triple)}$$

Por tanto el punto de corte es (0, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es (0, 0).}$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

Por tanto, $f(-x) = -f(x)$, la función es **impar**, esto es, simétrica respecto al origen de coordenadas.

IV) **Periodicidad**

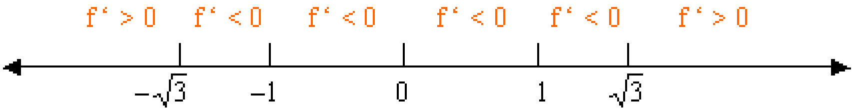
La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$. Debemos estudiar el signo de f', pero podemos darnos cuenta que su signo coincidirá con el signo del numerador dado que el denominador siempre es positivo, por tratarse de un cuadrado. Estudiemos por tanto el signo del numerador, calculando en primer lugar sus raíces:

$x^4 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Raíces: $x = 0$ (doble) y $x = \pm\sqrt{3}$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es **decreciente** en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)\cdot(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

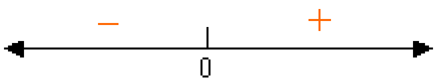
$f''(0) = 0$, y por tanto no se puede decidir todavía si hay máximo, mínimo o punto de inflexión.

$f''(\sqrt{3}) > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

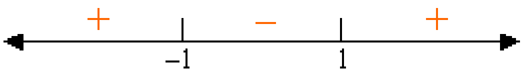
VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de f''. Estudiemos por tanto el signo del numerador, y el signo del denominador por separado, calculando en primer lugar sus raíces:

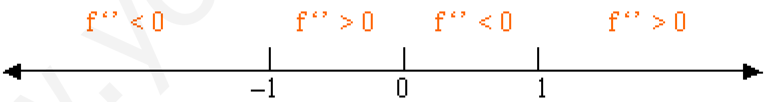
$2x^3 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ (No tiene más raíces reales)



$(x^2 - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Raíces: $x = -1$ y $x = 1$.



Así, resumiendo:



Por tanto, es **convexa** en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Es **cóncava** en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda (son las raíces del numerador), estudiemos como varía la curvatura en ellas.

En $x = 0$, la curvatura cambia de convexa a cóncava, esto es, hay un **punto de inflexión** en $(0, 0)$.

IX) **Asíntotas**

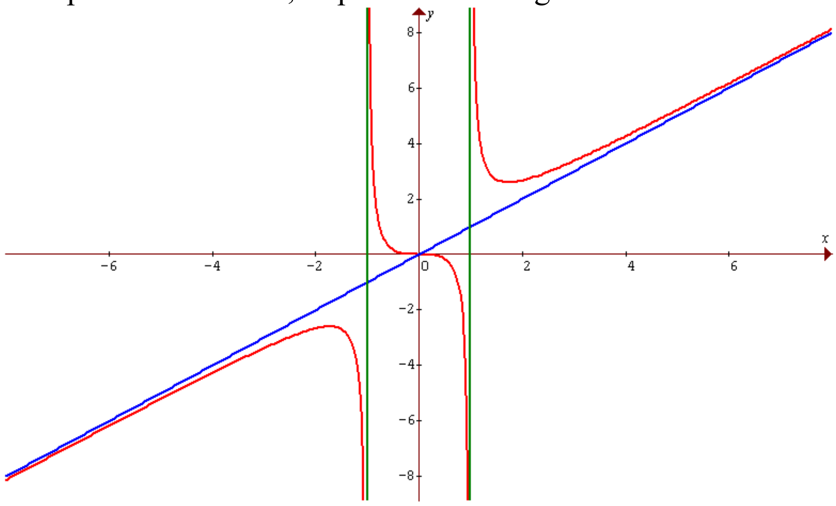
Se presentan dos **asíntotas verticales** en aquellos puntos que no pertenecen al dominio, esto es, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Por otra parte, también se presentará una asíntota oblicua ($y = mx + n$) por tratarse de una función racional en la que el grado del numerador es mayor que el del denominador en una unidad. Calculemos m y n.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x}{x^2-1}\right] = 0$$

Por tanto la **asíntota oblicua** es $y = x$.
Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función racional, no pertenecerán a su dominio de definición los valores que anulen el denominador.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ \text{ y } \ x = 2$$
$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Por tanto la función no será continua ni en $x = 1$ ni en $x = 2$.

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 5x + 6 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 2 \text{ y } x = 3$$

El único punto de corte con los ejes es (3, 0), ya que $x = 2$ no está en el dominio de la función.
Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0^2 - 5\cdot 0 + 6}{0^2 - 3\cdot 0 + 2} = 3 \quad \Rightarrow \text{ Por tanto el punto de corte es } (0, 3).$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5\cdot(-x) + 6}{(-x)^2 - 3\cdot(-x) + 2} = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. La función **no es par ni impar**. Por tanto no presenta estas simetrías.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica. En la mayoría de los casos se estudiará la periodicidad solamente cuando aparezcan funciones trigonométricas.

V) **Monotonía**

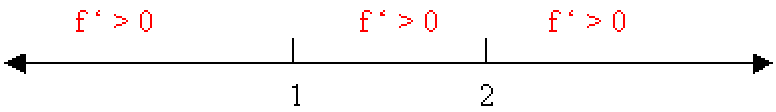
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 5x + 6)\cdot(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)^2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 2 \text{ (doble)}$$

Así:



Por tanto, es **siempre creciente.**

VI) **Extremos relativos**

Debemos darnos cuenta de que único punto singular que calculamos fue $x = 2$, pero este es un punto que no pertenece al dominio de definición de la función, y por tanto no tiene sentido estudiarlo. No habrá ni máximos ni mínimos.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, calculemos $f''(x)$:

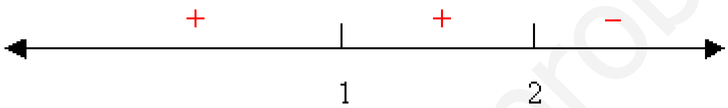
$$f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot(x^2-3x+2)^2-(2x^2-8x+8)\cdot 2\cdot(x^2-3x+2)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4} =$$

$$= \frac{4x^3-20x^2+32x-16-8x^3+44x^2-80x+48}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{-4x^3+24x^2-48x+32}{(x^2-3x+2)^3}$$

Resolvamos la inecuación $f''(x) > 0$.

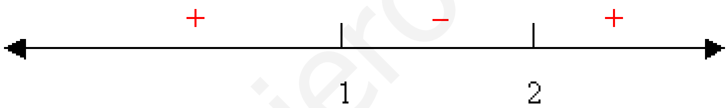
Numerador:

$$-4x^3+24x^2-48x+32 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 2 \text{ (triple)}$$

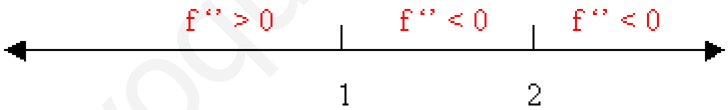


Denominador:

$$(x^2-3x+2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 1 \text{ y } x = 2$$



Así:



Por tanto, es **convexa** en $(-\infty, 1)$.

Es **cóncava** en $(1, +\infty)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Debemos darnos cuenta de que único punto en el que se anula la derivada segunda es $x = 2$, pero este es un punto que no pertenece al dominio de definición de la función, y por tanto no tiene sentido estudiarlo. No habrá puntos de inflexión.

IX) **Asíntotas**

En principio se podría pensar que se presentan dos **asíntotas verticales** en aquellos puntos que no pertenecen al dominio, esto es, en $x = 1$ y en $x = 2$. Sin embargo, en $x = 2$ no se presenta asíntota vertical ya que, aunque el límite es indeterminado, sí existe y es finito.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

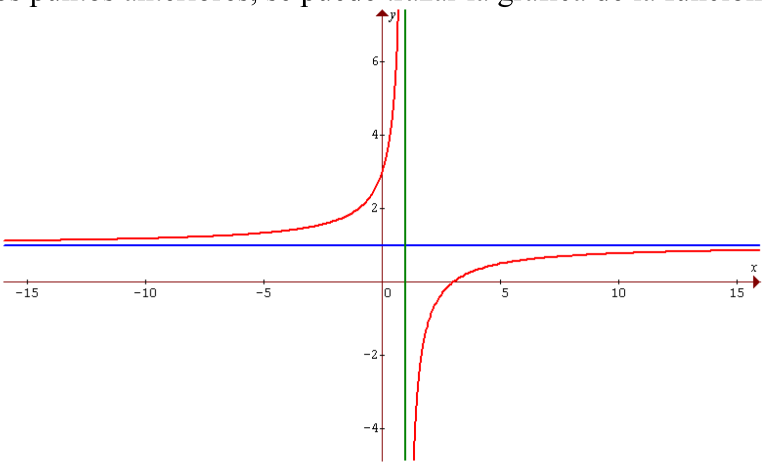
Veamos si existen **asíntotas horizontales**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = 1$$

Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas, pues estas dos son incompatibles.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = x \cdot e^{-x}$.

I) **Dominio**

La función en cuestión se puede escribir como $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. No pertenecerán al dominio los puntos que anulen el denominador, pero en este caso e^x no toma nunca el valor 0. Por tanto:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad 0 = x \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 0$$

Por tanto el punto de corte es (0, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0}{e^0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 0)$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y también $f(-x) \neq -f(x)$, con lo cual la función **no es par ni impar**.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{(Punto singular)}$$

Así: