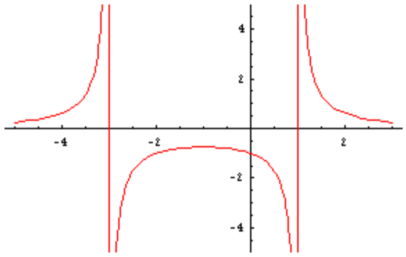
Determina *a*, *b* y *c* para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente:



De la figura se observa que $f(-2) = -1$, y que las rectas $x = -3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.
De $f(-2) = -1$, obtenemos:

$$-1 = \frac{a}{4 - 2b + c} \qquad \Rightarrow \qquad a = -4 + 2b - c$$

Como $x = 1$ es asíntota vertical tenemos $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x^2 + bx + c} = \dfrac{a}{1 + b + c} = +\infty$, de donde:

$$1 + b + c = 0$$

Análogamente como $x = -3$ es asíntota vertical tenemos $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{a}{x^2 + bx + c} = \dfrac{a}{9 - 3b + c} = +\infty$, de donde:

$$9 - 3b + c = 0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a = -4 + 2b + c \\ 1 + b + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases}$

se obtiene $a = 3$, $b = 2$ y $c = -3$, con la cual la función pedida es $y = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$.

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ para $x \neq 1$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Estudia la posición de la gráfica de *f* respecto de sus asíntotas.

En primer lugar, tengamos en cuenta que $Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$, pues para $x = 1$ no está definida.
a) Como:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

entonces $x = 1$ es una asíntota vertical de *f*.
Por otra parte, tenemos que:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$$

y por tanto, no existen asíntotas horizontales.
Veamos si tiene asíntotas oblicuas. Para la función racional dada, existe una asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador. Dicha asíntota es de la forma $y = mx + n$. Calculemos m y n:

$$m = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to \infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x\to \infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 1$.
Veamos la posición relativa. Con respecto a la asíntota vertical $x = 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

www.yoquieroaprobar.es

Con respecto a la asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right)=$$

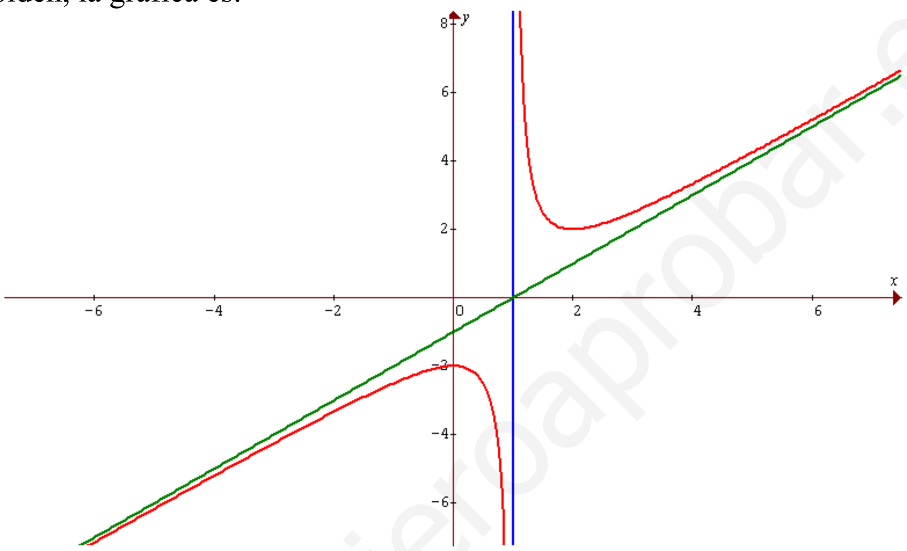
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0^+$$

Luego $f(x)$ está por encima de la asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0^-$$

Luego $f(x)$ está por debajo de la asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$.
Aunque no la piden, la gráfica es:



a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$.

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos relativos y absolutos, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) En primer lugar tengamos en cuenta que al esta la función definida para $x > 0$, su dominio es:

$$Dom\, f(x) = (0, +\infty)$$

Como el punto $x = 0$ es un punto frontera del dominio de la función, veamos si en él se presenta una asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Como la función $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}$ es un cociente de polinomios con el numerador de un grado más que el denominador tiene una asíntota oblicua $y = mx + n$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-m\,x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x^2}{x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x^2-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua es $y = x$ (es la bisectriz del primer).

b) Para ver su monotonía estudiamos su derivada primera:

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x\cdot x-(1+x^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

www.yoquieroaprobar.es

El único punto que estudiaremos será $x = 1$, pues la función únicamente está definida para $x > 0$. Estudiemos el signo de la derivada primera en los distintos intervalos en que queda dividida la recta real:

$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
0	1

De lo anterior se deduce que f decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Por tanto, en $x = 1$ hay un mínimo relativo. Mínimo = $(1, 2)$. Dicho mínimo relativo es también un mínimo absoluto, pues como vimos anteriormente:

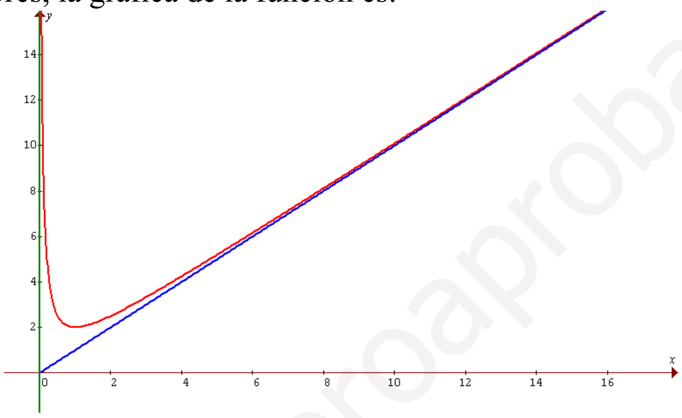
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

y además:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x} = +\infty$$

La función no presenta máximos ni relativos ni absolutos.

b) Con los datos anteriores, la gráfica de la función es:



www.yoquieroaprobar.es

Sea f la función $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

a) **Calcula las asíntotas de la gráfica de f.**
b) **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.**
c) **Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f.**

a) Asíntotas verticales. Las rectas $x = 0$ y $x = 2$ son asuntotas verticales pues en dicho puntos $f(x)$ no está definida.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta } x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^-} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta } x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Por otra parte, como:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$

la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $\pm\infty$ de $f(x)$.

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua (son excluyentes).

b) Monotonía. Estudiemos de $f'(x)$

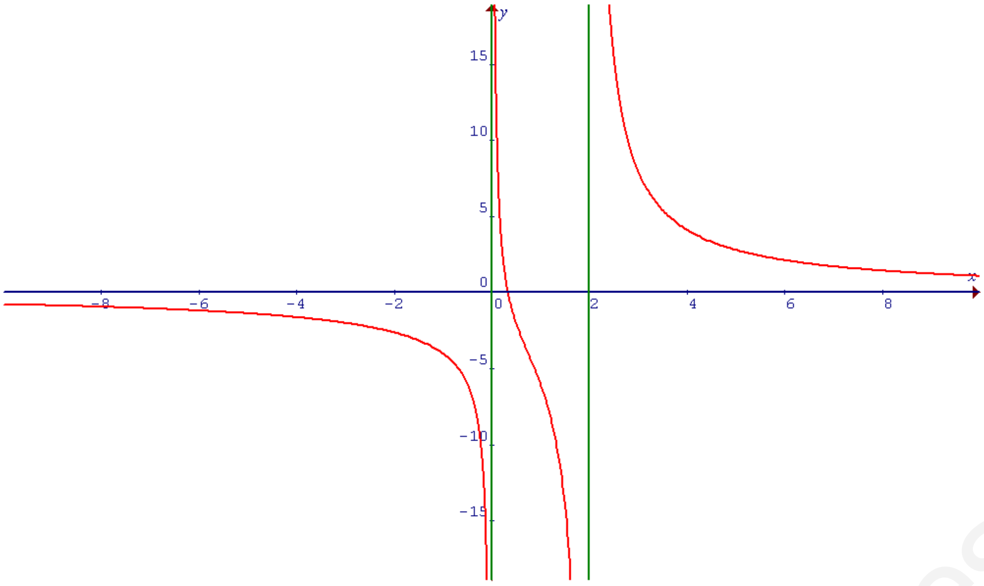
$$f'(x) = \frac{9\cdot(x^2-2x)-(9x-3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -9x^2+6x-6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales}$$

Por tanto la función siempre es creciente o decreciente en su dominio. Para elegir entre ambas opciones, sustituiremos un número cualquiera en la primera derivada. Si nos da positivo la función es creciente y si nos da negativo la función es decreciente. Probamos, por ejemplo, el valor $x = 1$:

$$f'(1) = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{luego la función es decreciente en todo su dominio}$$

c) La gráfica de $f(x)$ es:



Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)\, e^{-x}$.

- **a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.**
- **b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.**
- **c) Esboza la gráfica de f.**

a) En primer lugar, tengamos en cuenta que $Dom\, f(x) = \mathbb{R}$. Por tanto, no hay asíntotas verticales.
Por otra parte, como:

$$\lim_{x\to+\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f cuando $x \to +\infty$.
Además:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty+3}{e^{-\infty}} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Por tanto, no hay asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
Como para $x \to +\infty$ hay una asíntota horizontal, entonces ya no hay asíntota oblicua.
Para $x \to -\infty$, si hay asíntota oblicua, esta será de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$$

Ambos límites han de existir y ser finitos.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3)e^{-x}}{x} = \; = +\infty$$

Por tanto tampoco hay asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

b) Calculemos la derivada de $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$:

$$f'(x) = \frac{1\cdot e^x - (x+3)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x-2}{e^x}$$

Los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x-2}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Para estudiar si es máximo o mínimo, calculemos la derivada segunda de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{-1\cdot e^x - (-x-2)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x+1}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f''(-2) = \frac{-1}{e^{-2}} = -e^2 < 0$$

Por tanto, en $x = -2$ hay un máximo.

Máximo en $(-2, e^2)$

Para estudiar los puntos de inflexión debemos resolver la ecuación $f''(x) = 0$:

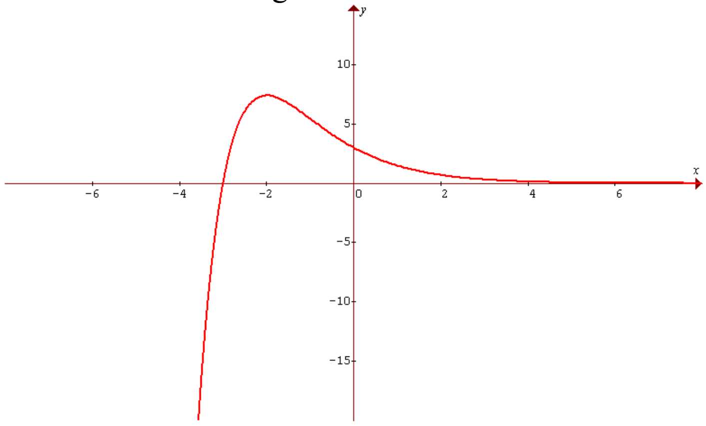
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

www.yoquieroaprobar.es

Se observa fácilmente que a la izquierda de $x = -1$, la derivada segunda es negativa ($f''(-2) < 0$), y por tanto $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$ y a la derecha de $x = -1$ la derivada segunda es positiva ($f''(0) > 0$), y por tanto $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$. Como en $x = -1$ cambia la curvatura, se deduce que en él hay un punto de inflexión.

Punto de inflexión = (–1, 2*e*)

c) Con los datos anteriores un esbozo de su gráfica es:

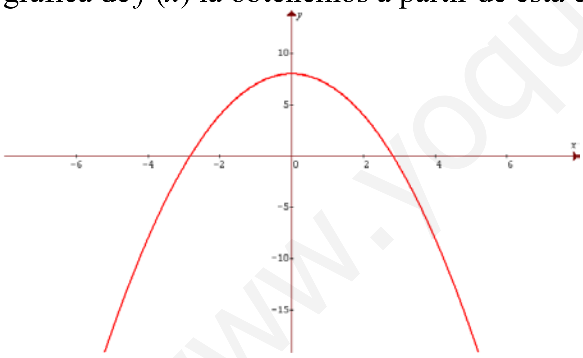


Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$.

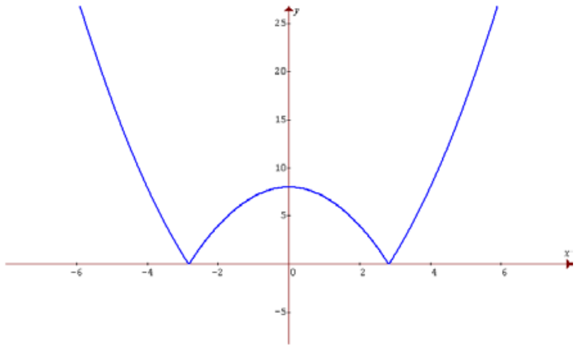
a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de *f* (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores)

b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

a) La gráfica de la función $f(x)$ la podemos dibujar a partir de la de la función $g(x) = 8 - x^2$, pero reflejando sobre el eje de abscisas aquella parte de la gráfica que quede por debajo del mismo. La gráfica de $g(x)$ es una parábola con vértice en el punto (0, 8), que corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{8}, 0)$ y $(\sqrt{8}, 0)$, y que tiene sus ramas dirigidas hacia la parte negativa del eje OY. Entonces la gráfica de $f(x)$ la obtenemos a partir de esta como:



$\Rightarrow$



Como se puede ver en la gráfica anterior, se presentan dos mínimos en los puntos $(-\sqrt{8}, 0)$ y $(\sqrt{8}, 0)$, y un máximo en (0, 8). Hagamos un estudio analítico de *f* para comprobar que es así. Para ello, escribamos la función *f* como una función definida a trozos:

$$f(x) = |8 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{si} \quad x \le -\sqrt{8} \\ -(x^2 - 8) & \text{si} \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & \text{si} \quad x \ge \sqrt{8} \end{cases}$$

(esto es así ya que $8 - x^2 = 0$ tiene como soluciones $x = \pm\sqrt{8}$)

Estudiemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -\sqrt{8} \\ -2x & \text{si} \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ 2x & \text{si} \quad x > \sqrt{8} \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

Se comprueba fácilmente que f no es derivable en $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$. Por otra parte, igualando la derivada a cero, vemos que sólo tiene sentido estudiar el caso en que $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$, ya que es el único intervalo en el que está comprendido el punto singular que obtenemos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

A la izquierda de $x = 0$, $f'(x)$ es creciente y a la derecha decreciente. Por tanto se presenta un máximo en el punto (0, 8).

Además debemos estudiar también los puntos $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$ en los que la función no es derivable. Fácilmente se observa que a la izquierda de $x = -\sqrt{8}$ la función decrece y a la derecha crece, luego hay un mínimo en el punto $(-\sqrt{8}, 0)$. Por otra parte, a la izquierda de $x = \sqrt{8}$ la función decrece y a la derecha crece, luego hay otro mínimo en el punto $(\sqrt{8}, 0)$.

b) La recta tangente en $x = -2$ viene dada por:

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$$

$$f'(x) = -2x \qquad ; \qquad f(-2) = 8 - (-2)^2 = 4 \qquad ; \qquad f'(-2) = (-2) \cdot (-2) = 4$$

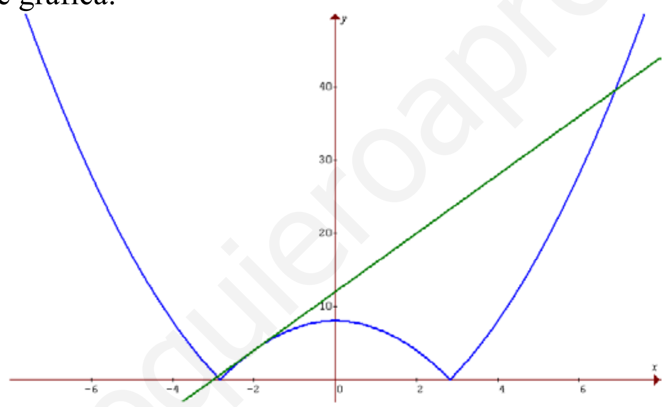
$$y - 4 = 4\,(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = 4x + 12.$$

El corte de la tangente $y = 4x + 12$ con f lo estudiamos del siguiente modo:

$$x^2 - 8 = 4x + 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{24}$$

$$8 - x^2 = 4x + 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

En definitiva, la tangente corta a la función $f(x) = |\,8 - x^2|$ en $x = -2$ y en $x = 2 \pm \sqrt{14}$, como se puede ver en la siguiente gráfica:



www.yoquieroaprobar.es