<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2 & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{senx} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right)$

<u>Ejercicio</u> 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$$

a) (0.5 puntos) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

<u>Ejercicio</u> 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

<u>Ejercicio</u> 1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2 & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>SOLUCIÓN</u>

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = 0$:

  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$
  $$\lim_{x \to 0^-} (e^{-x} - 2) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$$
  $$f(0) = e^0 - 2 = -1$$

  Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

- (1.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$:

  $$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{0 \cdot (x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

  $$\lim_{x \to 0^-} (-e^{-x}) = -1$$
  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

  Como $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Para $x = 1$ se anula el denominador de la función definida para $x > 0$, luego habrá que estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en dicho punto.

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = 1$:

  $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
  $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
  $$f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \nexists$$

  Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 1$.

- (0.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$:

  Por ser $f(x)$ discontinua en $x = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

SOLUCIÓN

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{x\cdot senx}=\frac{0}{0}\,(\text{L´Hopital})=\lim_{x\to 0}\frac{(senx)'-x'}{(x)'\cdot senx+x\cdot(senx)'}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{senx+x\cdot cosx}=\frac{0}{0}\,(\text{L´Hopital})=\lim_{x\to 0}\frac{-senx}{cosx+cosx+x\cdot(-senx)}=\frac{0}{1+1-0}=\frac{0}{2}=0$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{5x}{x+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x)$:

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-1}$$

a) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$.

SOLUCIÓN

a) Buscamos los valores que anulan el denominador:

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \quad\rightarrow\quad Dom\,f(x)=x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

b) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es $y-y_0=m(x-x_0)$

$$x_0=0 \quad\rightarrow\quad y_0=f(0)=\frac{e^0}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$f'(x)=\frac{(e^{2x})'\cdot(x^2-11)-e^{2x}\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot(x^2-1)-e^{2x}\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \quad\rightarrow$$

$$m=f'(0)=\frac{2\cdot 1\cdot(-1)+1\cdot 0}{(-1)^2}=-2$$

Sustituyendo:

$$y+1=-2(x-0) \quad\rightarrow\quad y+1=-2x \quad\rightarrow\quad y=-2x-1$$

Ejercicio 4. Obtener el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

SOLUCIÓN

El dominio de la función será la solución de la inecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$ **(I).**

Buscamos las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

La primera de las raíces buscadas es $x_1 = 1$.

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$x_4 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \rightarrow \quad x_3 = -2$$

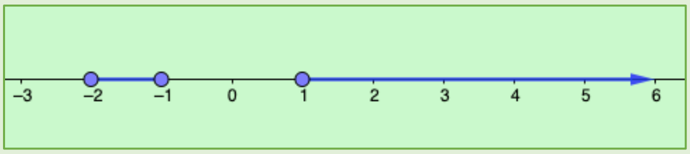
Situamos las raíces obtenidas sobre la recta real y comprobamos si un valor de cada intervalo verifica o no la inecuación **(I):**

$x = -3 \quad \rightarrow \quad -27 + 18 + 3 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -8 \geq 0$ NO

$x = -1{,}5 \quad \rightarrow \quad 3{,}375 + 4{,}5 + 1{,}5 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 0{,}625 \geq 0$ SÍ

$x = 0 \quad \rightarrow \quad -2 \geq 0$ NO

$x = 2 \quad \rightarrow \quad 8 + 8 - 2 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 12 \geq 0$ SÍ



$Dom\, f(x) = [-2, -1] \cup [1, +\infty)$