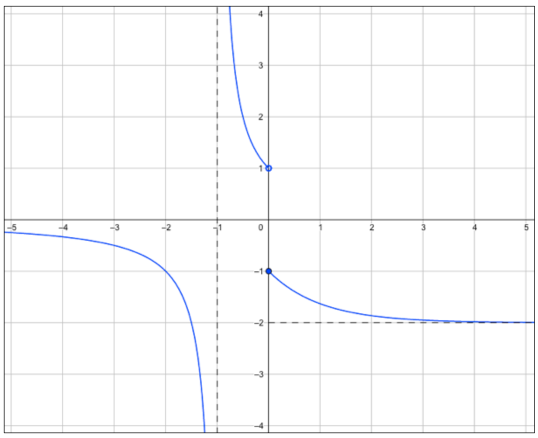
OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 6 puntos.
Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx}$ c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+5}-3}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}\right)$ e) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$ f) $\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x^2-1}$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:



$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x),\ f(0),\ \lim_{x\to 0^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),$$
$$f(-1),\ \lim_{x\to -1^-} f(x),\ \lim_{x\to -1^+} f(x),\ \lim_{x\to -1} f(x),\ f(-2).$$

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular la derivada de las función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{2^{3x+1}}{sen(cos3x)}$$

Ejercicio 1. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx}$ c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+5}-3}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}\right)$ e) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$ f) $\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x^2-1}$

SOLUCIÓN

a) Como el denominador es un límite del tipo k^∞, distinguiremos entre los casos $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{(L´Hopital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{(L´Hopital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{-\infty}} = +\infty\cdot e^{+\infty} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx} = \frac{1-1-0}{0-sen0} = \frac{0}{0} = \text{(L´Hopital)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1) - 2}{1-cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-cosx} =$$

$$= \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{(L´Hopital)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{0-(-senx)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{senx} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{(L´Hopital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cosx} = \frac{1+1}{1} = 2$$

c) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+5}-3} = \frac{4-4}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0} = \text{(L´Hopital)} = \lim_{x\to -2} \frac{2x+2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} - 0} = \frac{-4+2}{\frac{-4}{2\sqrt{9}}} = \frac{-2}{\frac{-4}{6}} = 3$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{x^2}{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2) - (x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - (x^3 - x^2 + x - 1)}{x^2 - 2x - x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

f) Como es un límite del tipo $k/0$, obtendremos los límites laterales en $x=-1$:

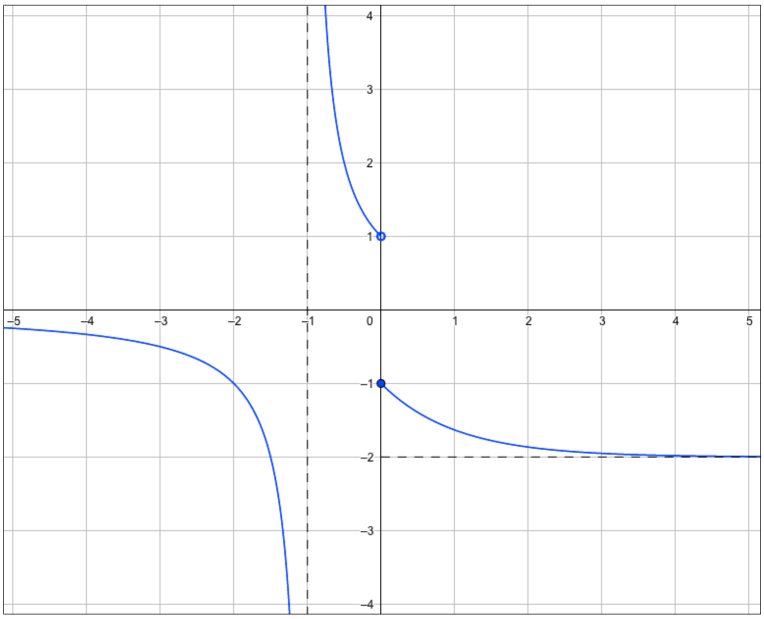
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x^2-1} = \nexists$$

Ejercicio 2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $f(0)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(-1)$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1} f(x)$, $f(-2)$.



SOLUCIÓN

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $f(0) = -1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$, $f(-1) = \nexists$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1} f(x) = \nexists$, $f(-2) = -1$.

Ejercicio 3. Calcular la derivada de las función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{2^{3x+1}}{sen(cos3x)}$$

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{(2^{3x+1})' \cdot sen(cos3x) - 2^{3x+1} \cdot \big(sen(cos3x)\big)'}{sen^2(cos3x)} =$$

$$= \frac{2^{3x+1} \cdot ln2 \cdot (3x+1)' \cdot sen(cos3x) - 2^{3x+1} \cdot \cos(cos3x) \cdot (cos3x)'}{sen^2(cos3x)} =$$

$$= \frac{2^{3x+1} \cdot ln2 \cdot 3 \cdot sen(cos3x) - 2^{3x+1} \cdot \cos(cos3x) \cdot (-sen3x) \cdot (3x)'}{sen^2(cos3x)} =$$

$$= \frac{2^{3x+1} \cdot ln2 \cdot 3 \cdot sen(cos3x) + 2^{3x+1} \cdot \cos(cos3x) \cdot sen3x \cdot 3}{sen^2(cos3x)}$$