

Ejercicio 1. Calificación máxima: 6 puntos.

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} - 2)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^{2x}}{\operatorname{sen} 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x} \right)$

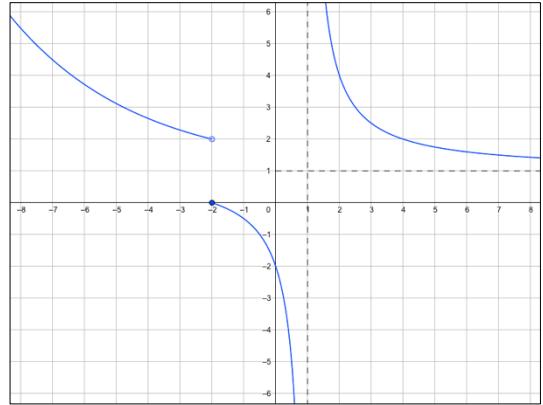
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4x})$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(1+x)^2}$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(-2), \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \\ & \lim_{x \rightarrow -2} f(x), f(1), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), f(0). \end{aligned}$$



Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular la derivada de la función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{sen} 3x)}{\operatorname{sen}(\ln 3x)}$$

Ejercicio 1. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} - 2)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^{2x}}{\operatorname{sen} 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4x})$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(1+x)^2}$

SOLUCIÓN

a) Distinguiremos entre los casos $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 2) = e^{-\infty} - 2 = \frac{1}{e^{+\infty}} - 2 = \frac{1}{+\infty} - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - 2) = e^{+\infty} - 2 = +\infty - 2 = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^{2x}}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{1 + 0 - 1}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 1 - e^{2x} \cdot 2}{\cos 3x \cdot 3} = \frac{0 + 1 - 1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x} \right) = \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{x^2}{x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - (x^2+1)(x-1)}{(x-1)x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - (x^3 - x^2 + x - 1)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x})^2 - (\sqrt{x^2-4x})^2}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 4x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 + 4x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x} = 3$

f) Como es un límite del tipo $k/0$, obtendremos los límites laterales en $x = -1$:

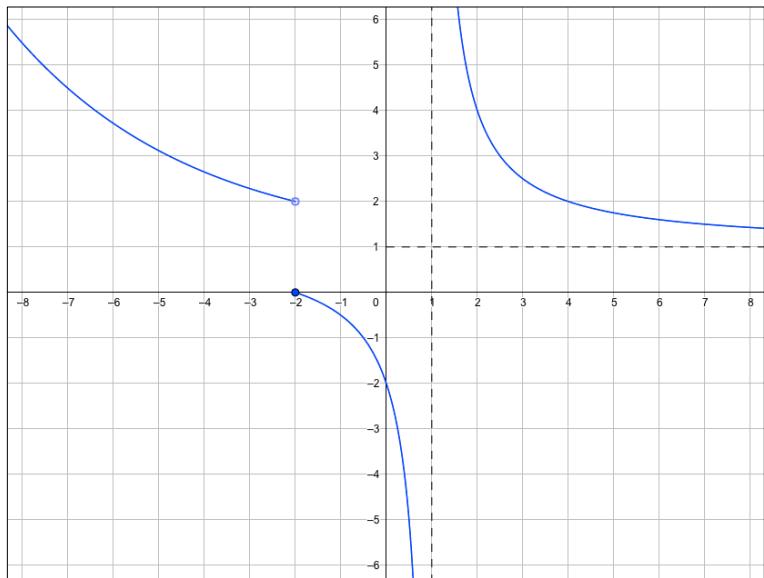
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(1+x)^2} = \text{D.N.E.}$$

Ejercicio 2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad f(-2), \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \quad & \lim_{x \rightarrow -2} f(x), \quad f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad & \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad f(0). \end{aligned}$$



SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad f(-2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{D}, \quad f(1) = \text{D}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{D}, \quad f(0) = -2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Calcular la derivada de la función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{sen}3x)}{\operatorname{sen}(\ln3x)}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(\operatorname{sen}3x))' \cdot \operatorname{sen}(\ln3x) - \ln(\operatorname{sen}3x) \cdot (\operatorname{sen}(\ln3x))'}{\operatorname{sen}^2(\ln3x)} = \\ &= \frac{\frac{(\operatorname{sen}3x)'}{3} \cdot \operatorname{sen}(\ln3x) - \ln(\operatorname{sen}3x) \cdot \cos(\ln3x) \cdot (\ln3x)'}{\operatorname{sen}^2(\ln3x)} = \\ &= \frac{\frac{3 \cdot \cos 3x}{\operatorname{sen}3x} \cdot \operatorname{sen}(\ln3x) - \ln(\operatorname{sen}3x) \cdot \cos(\ln3x) \cdot \frac{3}{3x}}{\operatorname{sen}^2(\ln3x)} \end{aligned}$$