

1. (5.0p) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 3x^2 - 5(1 - 2x)$

b. $\frac{(x - 2)(x + 2)}{4} - \frac{(x - 3)^2}{3} = \frac{x(11 - x)}{6}$

c. $x^2(9x^2 - 8) - 1 = 0$

d. $-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{4}{x^4} = 0$

e. $\sqrt{2x + 7} - 3x + 1 = x$

2. (1.5p) Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} \frac{x - 3}{2} - \frac{y + 1}{4} = 0 \\ \frac{5x + 2}{3} + \frac{y}{6} = \frac{19}{2} \end{cases}$$

3. (2.0p) Obtén los puntos de intersección:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 76 \\ x + 6y = -6 \end{cases}$$

4. (1.5p) Resuelve la inecuación:

$$2 - \frac{1 - 3x^2}{6} \geq \frac{x(x - 1) - 6}{2}$$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 3x^2 - 5(1 - 2x)$

$$2(x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 2x + 1) = 3x^2 - 5 + 10x$$

$$2x^2 + 12x + 18 - x^2 - 2x - 1 - 3x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$-2x^2 + 22 = 0$$

$$2x^2 = 22 \rightarrow x^2 = 11 \rightarrow x = \pm\sqrt{11} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{11} \\ x_2 = -\sqrt{11} \end{cases}$$

b. $\frac{(x - 2)(x + 2)}{4} - \frac{(x - 3)^2}{3} = \frac{x(11 - x)}{6}$

$$\frac{x^2 - 4}{4} - \frac{x^2 - 6x + 9}{3} = \frac{11x - x^2}{6}$$

$$\frac{3x^2 - 12 - 4x^2 + 24x - 36}{12} = \frac{22x - 2x^2}{12}$$

$$3x^2 - 12 - 4x^2 + 24x - 36 = 22x - 2x^2$$

$$3x^2 - 12 - 4x^2 + 24x - 36 - 22x + 2x^2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 14}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-2 - 14}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

c. $x^2(9x^2 - 8) - 1 = 0$

$$9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$$

Ecuación biquadrada, luego realizamos el cambio de variable $x^2 = t$:

$$9t^2 - 8t - 1 = 0$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{18} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{18} = \frac{8 \pm 10}{18}$$

$$t_1 = \frac{8 + 10}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

$$t_2 = \frac{8 - 10}{18} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$t_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$t_2 = -\frac{1}{9} \rightarrow x^2 = -\frac{1}{9} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{9}} = \text{No se cumple}$$

d. $-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{4}{x^4} = 0$

$$\text{m.c.m.}(x, x^2, x^3, x^4) = x^4$$

$$-\frac{3x^3}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{12x}{x^4} + \frac{4}{x^4} = \frac{0}{x^4}$$

$$-3x^3 - x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow 3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado resultante aplicando Ruffini:

| | | | | |
|---|---|----|-----|----|
| | 3 | 1 | -12 | -4 |
| 2 | 6 | 14 | 4 | |
| | 3 | 7 | 2 | 0 |

Luego $x_1 = 2$

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} =$$

$$x_2 = \frac{-7 + 5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_4 = \frac{-7 - 5}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

Soluciones: $x = \left\{2, -2, -\frac{1}{3}\right\}$

$$\mathbf{e.} \sqrt{2x+7} - 3x + 1 = x$$

$$\sqrt{2x+7} = x + 3x - 1$$

$$(\sqrt{2x+7})^2 = (4x-1)^2$$

$$2x+7 = 16x^2 - 8x + 1$$

$$16x^2 - 10x - 6 = 0 \rightarrow 8x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3)}}{2 \cdot 8} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{16} = \frac{5 \pm 11}{16}$$

$$x_1 = \frac{5 + 11}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$x_2 = \frac{5 - 11}{16} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

Comprobamos las soluciones sustituyendo en la ecuación dada:

$$x_1 = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 1 + 7} - 3 \cdot 1 + 1 = 1$$

$$\sqrt{9} - 3 + 1 = 1$$

1 = 1 → La solución sí es válida

$$x_1 = -\frac{3}{8}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 7} - 3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 1 = 1$$

$$\sqrt{-\frac{6}{8} + 7 + \frac{9}{8}} + 1 = 1$$

$$\sqrt{\frac{50}{8}} + \frac{9}{8} + 1 = 1$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{9}{8} + 1 = 1$$

$$\frac{5}{2} + \frac{9}{8} + 1 = 1$$

$$\frac{20 + 9 + 8}{8} = 1$$

37 = 8 → Falso, luego la solución no es válida

Solución: $x = 1$

2. Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y+1}{4} = 0 \\ \frac{5x+2}{3} + \frac{y}{6} = \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-6}{4} - \frac{y+1}{4} = 0 \\ \frac{10x+4}{6} + \frac{y}{6} = \frac{57}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-6-y-1=0 \\ 10x+4+y=57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ 10x+y=53 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ 10x+y=53 \end{cases} \rightarrow 12x=60 \rightarrow x=\frac{60}{12}=5$$

Multiplicando la ecuación E1 por -5 y sumando miembro a miembro:

$$\begin{cases} -10x+5y=-35 \\ 10x+y=53 \end{cases} \rightarrow 6y=18 \rightarrow y=\frac{18}{6}=3$$

3. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=76 \\ x+6y=-6 \end{cases}$$

Despejamos la incógnita x de la ecuación E2:

$$x = -6y - 6$$

Sustituyendo en la ecuación E1:

$$2(-6y-6)^2 + y^2 = 76$$

$$2(-6y-6)(-6y-6) + y^2 = 76$$

$$2(36y^2 + 36y + 36y + 36) + y^2 = 76$$

$$72y^2 + 72y + 72y + 72 + y^2 - 76 = 0$$

$$73y^2 + 144y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 73 \cdot (-4)}}{2 \cdot 73} = \frac{-144 \pm \sqrt{20736 + 1168}}{146} =$$

$$\frac{-144 \pm \sqrt{21904}}{146} = \frac{-144 \pm 148}{146} =$$

$$y_1 = \frac{-144 + 148}{146} = \frac{4}{146} = \frac{2}{73}$$

$$x_1 = -6 \cdot \frac{2}{73} - 6 = -\frac{12}{73} - 6 = \frac{-12 - 438}{73} = -\frac{450}{73}$$

$$y_2 = \frac{-144 - 148}{146} = \frac{-292}{146} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -6 \cdot \frac{1}{2} - 6 = -3 - 6 = -9$$

Los puntos de corte de ambas curvas son $\left(-\frac{450}{73}, \frac{2}{73}\right)$ y $\left(-9, -\frac{1}{2}\right)$

4. Resuelve la inecuación:

$$2 - \frac{1 - 3x^2}{6} \geq \frac{x(x - 1) - 6}{2}$$

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$2 - \frac{1 - 3x^2}{6} = \frac{x^2 + 2x - 3x - 6}{2}$$

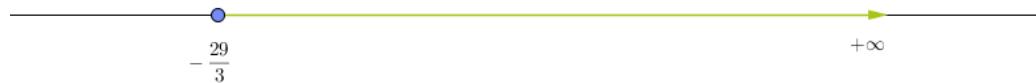
$$\frac{12 - 1 + 3x^2}{6} = \frac{3x^2 + 6x - 9x - 18}{12}$$

$$3x^2 - 3x^2 - 6x + 9x = -18 - 12 + 1$$

$$3x = -29$$

$$x = -\frac{29}{3}$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada (no será necesario probar un valor en el otro intervalo por ser una inecuación de primer grado sin raíces dobles):



$$\text{¿ } 2 - \frac{1}{6} \geq \frac{(-3) \cdot 2}{2}?$$

$$\text{¿ } \frac{11}{6} \geq -3?$$

Verdadero, luego la solución gráfica es la dada en la imagen y la solución en forma de intervalo es $[-\frac{29}{3}, +\infty)$