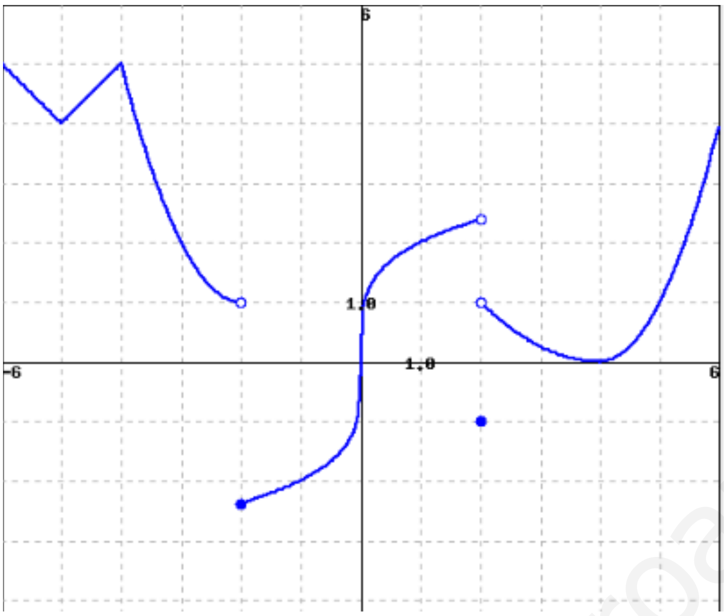
1.- Sea la siguiente gráfica:



Determina:

a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos absolutos y relativos.

c) Crecimiento y decrecimiento.

d) Concavidad y convexidad.

e) Puntos de inflexión.

f) Simetría.

2.- Indica si las siguiente funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$a)\ f(x) = x^3 - 2 \qquad b)\ g(x) = 2x^4 - 2 \qquad c)\ h(x) = \frac{x}{x^3-1} \qquad d)\ i(x) = \frac{-x}{2x^2+2}$

3.- Sea la siguiente función polinómica de tercer grado:

$f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x + 12$

Determina:

a) Puntos de cortes con los ejes.

b) Máximos o mínimos absolutos y relativos.

c) Dibuja la función utilizando los límites para ver que hace la función en $\pm\infty$ y realiza una tabla de valores si necesitas más puntos.

d) Dominio y recorrido.

e) Crecimiento y decrecimiento.

f) Puntos de inflexión. Concavidad y convexidad.

4.- Sea la siguiente función racional:

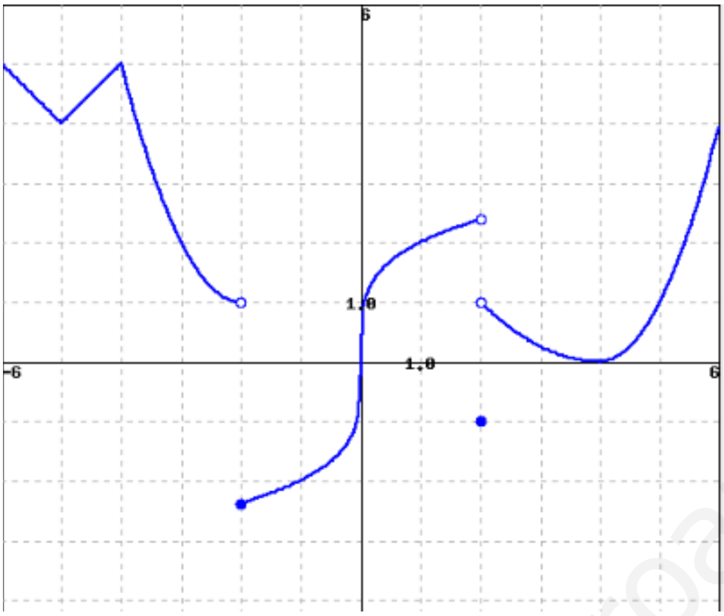
$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$

Determina el dominio de definición, las asíntotas horizontales y verticales de la función.

Realiza el esbozo de la función estudiando previamente la posición de la función respecto a la asíntotas.

SOLUCIÓN EXAMEN FUNCIONES

1.- Sea la siguiente gráfica:



Determina:

a) **Dominio y recorrido**.

Dom f(x)=ℝ   Img f(x)=[-2,25 , +∞)

b) Máximos y mínimos absolutos y relativos.

Máximo relativo: x = - 4

Máximo absoluto: no tiene

Mínimos relativos: x = -5 , x = -2, x = 2 y x = 4

Mínimo absoluto: x = 2

c) Crecimiento y decrecimiento.

Crece (- 5, - 4)U(-2, 2)U(4,+∞)

Decrece $(-\infty, -5)U(-4, -2)U(2, 4)$

d) **Concavidad y convexidad.** Convexa: (- 4, - 2)U (-2 , 0)U(2,+∞) Cóncava: (0 , 2)

e) **Puntos de inflexión.** En x = 0 la función pasa de convexa a cóncava.

f) **Simetría.** No tiene simetría.

2.- Indica si las siguiente funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$$\boldsymbol{a)\ f(x) = x^3 - 2} \ \rightarrow\ f(-x) = (-x)^3 - 2 = -x^3 - 2 \ observamos\ f(x) \neq f(-x)$$

$$y\ f(x) \neq -f(-x) por\ lo\ que\ \boldsymbol{no\ tiene\ simetría}$$

$$\boldsymbol{b)\ g(x) = 2x^4 - 2} \ \rightarrow f(-x) = 2(-x)^4 - 2 = 2x^4 - 2 = f(x)\ \ presenta\ \boldsymbol{simetría\ par}$$

$$\mathbf{c)}\ \ \mathbf{h(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^3 - 1}} \ \rightarrow h(-x) = \frac{-x}{(-x)^3 - 1} = \frac{-x}{-x^3 - 1} = \frac{x}{x^3 + 1} \neq h(x)\ \ y$$

$$h(x) \neq -h(-x) por\ lo\ que\ \boldsymbol{no\ presenta\ simetría}$$

$$\mathbf{d)\ i(x)} = \frac{-\mathbf{x}}{\mathbf{2x^2+2}} \ \rightarrow i(-x) = \frac{-(-x)}{2(-x)^2+2} = \frac{x}{2x^2+2} = -i(-x)\ por\ lo\ que\ tiene\ \boldsymbol{simetría\ impar}$$

3.- Sea la siguiente función polinómica de tercer grado:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}$$

Determina:

a) **Puntos de cortes con los ejes.**

Cortes con el eje x:

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \rightarrow factorizamos\ el\ polinomio\ \ utilizando\ Ruffini$$

	2	-7	7	-2
1		2	-5	2
	2	-5	2	0

$(x-1)\cdot(2x^2-5x+2)=0$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego los puntos de cortes con el eje x son (0,5 , 0), (1 , 0) y (2 , 0).

Cortes con el eje y:

$f(0) = 2\cdot 0^3-7\cdot 0^2+7\cdot 0 - 2= -2$ El punto de corte con el eje y es (0,-2).

b) **Máximos o mínimos absolutos y relativos.** Los máximos y los mínimos son los valores de x que anula la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 14x + 7 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 6\cdot 7}}{2\cdot 6} = \frac{14 \pm \sqrt{28}}{12} = \frac{14 \pm 2\sqrt{7}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{6} = \begin{cases} \frac{7+\sqrt{7}}{6} = 1{,}607\ ... \\ \frac{7-\sqrt{7}}{6} = 0{,}725\ ... \end{cases}$$

Para estos valores de x tendremos máximos o mínimos. Veamos las coordenadas de estos puntos. Ojo!! Como os digo día sí y día sí no vamos a aproximar hasta el final (norma de selectividad). Esto significa que en la calculadora introduciremos los valores exactos de x para calcular f(x). Esto es:

$$f\left(\frac{7+\sqrt{7}}{6}\right) = -0{,}53$$

$$f\left(\frac{7-\sqrt{7}}{6}\right) = 0{,}16$$

Luego las coordenadas de los puntos máximos o mínimos de modo aproximado son:

(1,61, -0,53) y (0,73, 0,16)

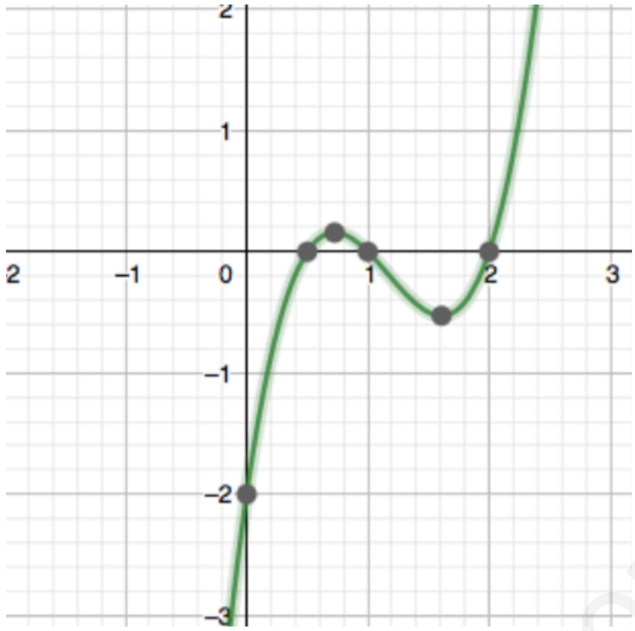
c) Dibuja la función utilizando los límites para ver que hace la función en $\pm\infty$ y realiza una tabla de valores si necesitas más puntos.

Veamos a que tiende la función cuando los valores de x son o muy grandes o muy pequeños.

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

Le podemos dar algunos valores a la función para que sea la gráfica más exacta:



d) **Dominio y recorrido.** Lo obtenemos directamente de la gráfica:

$Dom\, f(x) = \mathbb{R} \qquad Imgf(x) = \mathbb{R}$

e) **Crecimiento y decrecimiento.** Lo vemos en la gráfica:

Crece $(-\infty,\ 0{,}73)\mathrm{U}(1{,}61\ ,+\infty)$ Decrece $(0{,}73\ ,\ 1{,}61)$

f) Puntos de inflexión. Concavidad y convexidad.

Para calcula el punto de inflexión (pasa de cóncava a convexa) tenemos que calcular el punto que anula la segunda derivada: $f''(x) = 0 \to f''(x) = 12x - 14 = 0 \to x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

Cóncava en $\left(-\infty,\ \frac{7}{6}\right)$ Convexo en $\left(\frac{7}{6}, +\infty\right)$

4.- Sea la siguiente función racional:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}}$$

Determina el dominio de definición, las asíntotas horizontales y verticales de la función.

Dominio: no pertenecen al dominio los puntos que anulan el denominador. Vamos a calcularlos.

$$x^2 - 9 = 0 \to x^2 = 9 \to x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Luego $Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{-3, +3\}$

Asíntota horizontal: Existe una asíntota horizontal si existe el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Luego existe una asíntota horizontal en y = 0.

Asíntotas verticales: En una función racional son candidatos asíntotas verticales los valores de x que anulan el denominador: -3 y 3. Para que en x=a tengamos una A.V. se debe verificar lo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Veamos si esto ocurre en x = 3.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{0}{0} \ \ pero\ esto\ es\ una\ indeterminación. Para\ resolverla\ hay\ que\ factorizar:$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

por tanto en x=3 no hay una A.V.

Probamos ahora en x = -3.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x^2-9} = \left(\frac{-6}{0}\right) = \infty$$

Luego en x = -3 hay una A.V.

Realiza el esbozo de la función estudiando previamente la posición de la función respecto a la asíntotas.

Estudio de la posición de la gráfica respecto a las asíntotas.

Para estudiar la posición respecto a la asíntota horizontal calculo f(x)-A.H.(y=0) y calculo los límites cuando x→ $\pm\infty$. Estoy restando a la función la asíntota. Si da 0^+ la función va por arriba (es algo mayor) y si da 0^- entonces la función va por debajo (es menor que la asíntota).

$$f(x) - A.H. = \frac{x-3}{x^2-9} - 0 = \frac{x-3}{x^2-9}$$

Calculo los límites:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+; \ \lim_{x\to -\infty} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

Luego en el $+\infty$ la función va por encima de la asíntota y en el $-\infty$ la función va por debajo.

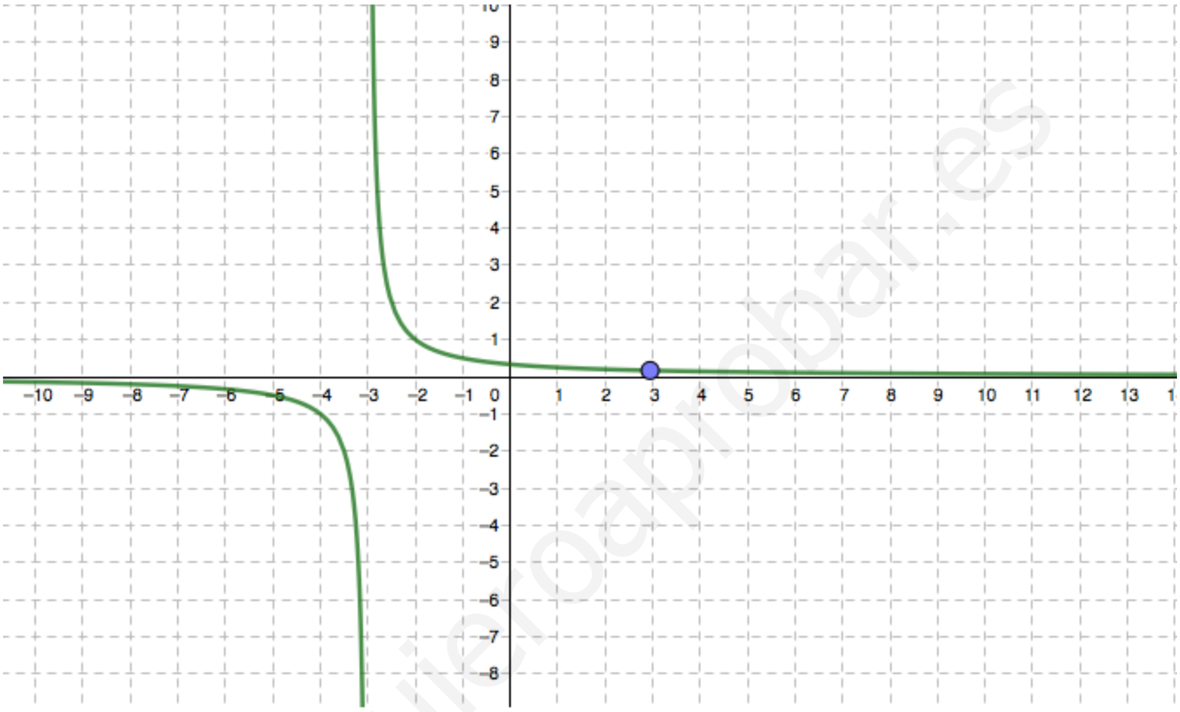
Aunque no sería necesario estudio la posición de la función respecto a la A.V. Para ello estudio los límites laterales:

Para calcular el límite sustituyo x por un número muy próximo al -3 por la derecha (mayor por ejemplo -2,999).

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

Para calcular el límite sustituyo x por un número muy próximo al -3 por la izquierda (menor por ejemplo:-3,001).

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$



En x=3 la función no está definida por tanto encontramos un punto vacío. En x= -3 hay una A.V. y en y=0 A.H.