

MATRICES DETERMINANTES

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB^t + C)X = (A^tD)E$, donde M^t

significa la matriz transpuesta de la matriz M .

2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

- Probar que la matriz T , tiene inversa T^{-1} , y calcular dicha matriz inversa.
- Dada la ecuación con matriz incógnita B , $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B .
- Obtener los elementos de la matriz B .

3.- A es una matriz 3×3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se pide

- Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3 .
- Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.
- Calcular la matriz inversa de A .

RESOLUCIÓN

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB^t + C)X = (A^t D)E$, donde M^t

significa la matriz transpuesta de la matriz M .

Calculemos $(AB^t + C) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Y ahora calculemos } (A^t D)E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tenemos que resolver } \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}. \text{ Así}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculamos } \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \text{ por la regla de los determinantes } \left(M^{-1} = \frac{1}{|M|} [Adj(M)]^t \right):$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

- a) Probar que la matriz T, tiene inversa T^{-1} , y calcular dicha matriz inversa.
 b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.
 c) Obtener los elementos de la matriz B.

RESOLUCIÓN:

- a) Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1. \rightarrow \exists T^{-1}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} [Adj(T)]^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = -1 \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Despejando B: $TAT^{-1} = B$,

Utilizaremos que el determinante del producto coincide con el producto de los determinantes

($|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$) y que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|B| = |TAT^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = -1 \cdot |A| \cdot \frac{1}{-1} = |A|$$

Calculemos pues el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$

Entonces $|B| = 2$.

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = :$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- A es una matriz 3 x 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se pide

- Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3 .
- Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.
- Calcular la matriz inversa de A.

RESOLUCIÓN:

$$\mathbf{a)} \quad |A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1. \quad (A^3)^{-1} = \frac{1}{|A^3|} [Adj(A^3)]^t :$$

$$(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad XA^3 = BA^2 \quad \rightarrow X = BA^2(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = :$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c)} \quad A^{-1} = A^2(A^3)^{-1} = (AAA^{-1}A^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$