Tratamiento de la diversidad

La Educación Secundaria Obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad de nuestro proyecto están orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las competencias básicas y los objetivos del curso.

Atender a la diversidad del alumnado y conseguir una mejora de sus resultados académicos puede requerir la adopción de medidas como agrupamientos flexibles, apoyo en grupos ordinarios, desdoblamientos, adaptaciones del currículo, etc.

Para contribuir en esta tarea, nuestro proyecto presenta una serie de medidas cuya finalidad es preventiva o compensadora; en un momento dado, cualquier alumno puede precisarlas.

Las actividades que se proponen en este material se organizan en dos fichas de trabajo por cada unidad. Plantean cuestiones que permiten asociar diversos contenidos previamente estudiados y ejercitar diferentes destrezas. Tanto las fichas de **refuerzo** como las de **ampliación** son recursos dirigidos a desarrollar en los estudiantes las competencias básicas.

Al principio de cada unidad se encuentra un esquema de los contenidos tratados en ella, con actividades específicas para cada contenido. Y al final, ofrecemos las soluciones de todas las actividades.

Fracciones y decimales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

NÚMEROS

ENTEROS

El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z}$ = { }.

FRACCIONARIOS

Un número fraccionario no es un entero, pero se puede escribir como cociente de ....

RACIONALES

Se pueden poner en forma de ....

Se designan por la letra ....

OPERACIONES CON FRACCIONES

- Simplificar una fracción es .... el numerador y el .... por un mismo número.
- Una fracción que no puede reducirse se llama ....
- Dos fracciones que dan lugar a la misma fracción irreducible se dice que son ....

EJEMPLOS: $\dfrac{36}{84} = \dfrac{\square}{14} = \dfrac{3}{\square}$ ← Fracción ....

SUMA Y RESTA

Las fracciones han de tener igual ....

EJEMPLO:

$\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{\square} + \dfrac{10}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

PRODUCTO

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{\square}{\square}$

EJEMPLO: $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

COCIENTE

$\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{\square}{\square}$

EJEMPLO: $\dfrac{3}{5} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{\square}{\square}$

PASO DE DECIMAL A FRACCIÓN

- **Periódico puro:** $N = 3,\overset{\frown}{27}$

  $\left.\begin{array}{l} \text{.........} \cdot N = 327,2727... \\ \text{.........} \cdot N = \text{.................} \end{array}\right\}$

  Restamos y despejamos $N \rightarrow N = \square$

- **Periódico mixto:** $N = 2,1\overset{\frown}{45}$

  $\left.\begin{array}{l} \text{.........} \cdot N = 2\,145,4545... \\ \text{.........} \cdot N = 21,4545... \end{array}\right\}$

  Restamos y despejamos $N \rightarrow N = \square$

CÁLCULOS CON PORCENTAJES

- En aumentos porcentuales, el índice de variación es $\square$ más el aumento porcentual expresado en ....
- En disminuciones porcentuales, el índice de variación es $\square$ menos el aumento porcentual expresado en ....

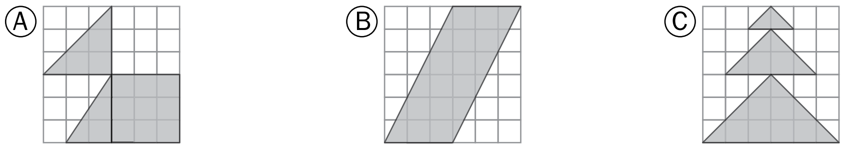
Fracciones y decimales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1 Expresa como fracción y como porcentaje la parte coloreada de cada figura.



2 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) =$

b) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 =$

3 Indica qué tipo de número decimal (exacto, periódico puro, periódico mixto, ni exacto ni periódico) es cada uno de estos y exprésalo como una fracción, en los casos que sea posible:

a) 3,84

b) $3,\widehat{84}$

c) $3,8\widehat{4}$

d) $\sqrt{15} = 3,872...$

4 Aplica sucesivamente estos porcentajes a las cantidades indicadas:

a) $\boxed{300} \xrightarrow{+25\%} \boxed{} \xrightarrow{-20\%} \boxed{}$

b) $\boxed{600} \xrightarrow{+15\%} \boxed{} \xrightarrow{-15\%} \boxed{}$

c) $\boxed{800} \xrightarrow{-20\%} \boxed{} \xrightarrow{+20\%} \boxed{}$

d) $\boxed{900} \xrightarrow{+5\%} \boxed{} \xrightarrow{-10\%} \boxed{} \xrightarrow{-5\%} \boxed{} \xrightarrow{+10\%} \boxed{}$

5 De una cuba de 900 litros de vino, 1/3 de su contenido se envasa en botellas de 2/5 de litro. Del resto, la mitad se envasa en botellas de 3/4 de litro, y la otra mitad, en botellas de 1/2 litro. ¿Cuántas botellas necesitaremos de cada clase?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. REBAJAS, REBAJAS…

La cadena IMAGINA XXI compra a un distribuidor ordenadores a 400 euros, cámaras digitales a 200 euros, televisores TDT a 500 euros y lectores de MP3 a 40 euros.

1 Antes de las rebajas decide lanzar estos productos a la venta con los siguientes márgenes de beneficios:

PRECIO DE VENTA DE ORDENADORES	74% más que el precio de compra
PRECIO DE VENTA DE CÁMARAS	75% más que el precio de compra
PRECIO DE VENTA DE TELEVISORES	60% más que el precio de compra
PRECIO DE VENTA DE LECTORES DE MP3	58% más que el precio de compra

¿A qué precio va a lanzar al mercado cada artículo?

2 Durante la campaña de rebajas "Abajo los precios", cuya duración es de un mes, aplica dos descuentos sucesivos a cada producto:

ORDENADORES	Primera rebaja: 10%	Segunda rebaja: 20%
CÁMARAS	Primera rebaja: 5%	Segunda rebaja: 10%
TELEVISORES	Primera rebaja: 20%	Segunda rebaja: 5%
LECTORES DE MP3	Primera rebaja: 12%	Segunda rebaja: 10%

¿Cuánto gana la cadena por cada producto después de aplicar la segunda rebaja?

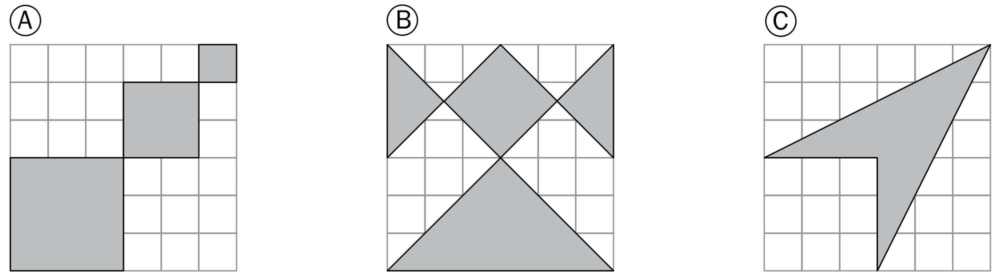
Fracciones y decimales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Expresa como fracción y como porcentaje la parte coloreada de cada figura.



2 Calcula el resultado de estas operaciones, expresando primero cada término en forma de fracción:

a) $\left(5 + 6,\widehat{9}\right) : \left(\dfrac{1}{3} + 0,4\widehat{9}\right) =$

b) $\left(0,\widehat{5} + 0,\widehat{3}\right) : 2,44\widehat{9} =$

3 Escribe un número comprendido entre los dos dados en cada caso:

a) $\dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{1}{3}$

b) 7,3 y $7,\widehat{3}$

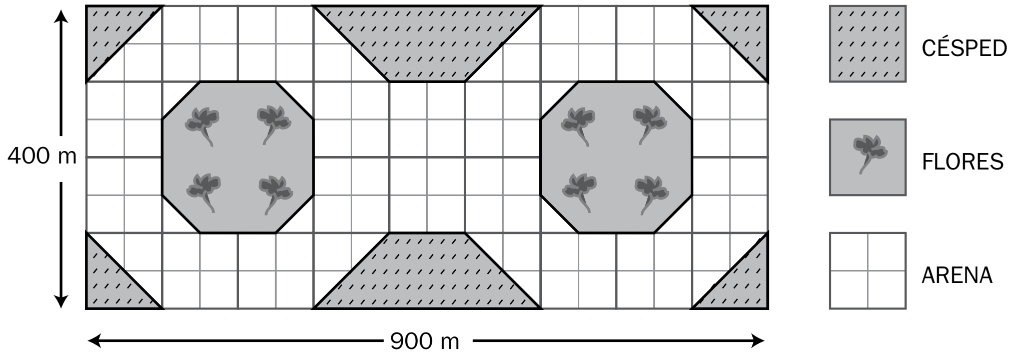
c) π y $\dfrac{22}{7}$

4 Antonio tiene una deuda: acuerda pagar 1/3 de ella en enero y 1/3 del resto en febrero. De lo que queda, la mitad la pagará en marzo y la otra mitad, que son 200 euros, la pagará en abril. ¿A cuánto asciende la deuda de Antonio?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. PROYECTO DE PARQUE

En el barrio de Ágata se va a construir un nuevo parque, cuyo diseño queda reflejado en este plano:



1 ¿Qué fracción del parque está destinada a flores? ¿Qué superficie ocuparán? Haz los mismos cálculos para el césped.

2 ¿Cuántas hectáreas del parque estarán cubiertas de arena?

3 De la zona destinada a flores, la cuarta parte se va a dedicar a geranios, dos tercios del resto, a rosales, y lo que queda, a claveles. ¿Cuántos metros cuadrados ocupará cada tipo de flores?

4 Para sembrar y abonar el césped, se usarán cajas de semillas y de abono fosfático, cuyas etiquetas quedan reflejadas en la figura adjunta. ¿Cuánto costarán las semillas y el abono para el césped?

SEMILLAS	
5 euros	1 kg
$30\ m^2$	

ABONO	
12 euros	5 kg
$50\ g/m^2$	

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 A → (1/8) + (1/4) + (3/36) = 11/24 → 45,8%

B → 1/2 → 50%

C → (1/36) + (4/36) + (9/36) = 7/18 → 38,9%

2 a) –3/100 b) 1/2

3 a) Decimal exacto.
3/100

b) Decimal periódico puro.
381/99 = 127/33

c) Decimal periódico mixto.
346/90 = 173/45

d) Decimal, no exacto y no periódico.

4 a) 300 · 1,25 · 0,80 = 300

b) 600 · 1,15 · 0,85 = 586,5

c) 800 · 0,80 · 1,20 = 768

d) 900 · 1,05 · 0,90 · 0,95 · 1,10 = 888,7725

5 • 1/3 de 900 = 300 litros
300 : (2/5) = 750 botellas de 2/5 *l*

• 1/2 de 600 = 300 litros
300 : (3/4) = 400 botellas de 3/4 *l*

• 300 : (1/2) = 600 botellas de 1/2 *l*

APLICA

1 Ordenadores, 696 euros. Cámaras, 350 euros. Televisores, 800 euros. Lectores de MP3, 63,2 euros.

2 Ordenadores:

696 · 0,90 · 0,80 – 400 = 101,12 euros

Cámaras:

350 · 0,95 · 0,90 – 200 = 99,25 euros

Televisores:

800 · 0,80 · 0,95 – 500 = 108 euros

Lectores de MP3:

63,2 · 0,88 · 0,90 – 40 = 10,05 euros

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 A → (9/36) + (4/36) + (1/36) = 7/18 → 38,39%

B → (1/4) + (1/8) + (1/8) = 1/2 → 50%

C → 1 – (3/4) = 1/4 → 25%

2 a) 72/5

b) 160/441

3 Respuestas abiertas. Por ejemplo:

a) 1/5; …; 0,21; 0,26; … ; 1/3

b) 7,3; … ; 7,31; 7,315; 7,33; …; 7,3333…

c) 3,141592…; …; 3,1416; 3,1419001; …; 3,142857143

4 9 000 euros

APLICA

1 Flores → 7/36 → 70 000 m^2

Césped → 6/36 = 1/6 → 60 000 m^2

2 230 000 m^2 = 23 ha

3 Geranios → 1/4 de las flores → 17 500 m^2

Rosales → 1/2 → 35 000 m^2

Claveles → 1/4 → 17 500 m^2

4 Semillas → (60 000 : 30) · 5 = 10 000 euros

Abono → 5 000 : 50 = 100 m^2 por caja

(60 000 : 100) · 12 = 7 200 euros

Potencias y raíces. Numeros aproximados

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

NÚMEROS

POTENCIAS. PROPIEDADES

① $a^m \cdot a^n =$ ....

EJEMPLO: $a^3 \cdot a^5 =$ ....

② $(a \cdot b)^n =$ ....

EJEMPLO: $(a \cdot b)^4 =$ ....

③ $(a^m)^n =$ ....

EJEMPLO: $(a^2)^4 =$ ....

④ $\dfrac{a^m}{a^n} =$ ....

EJEMPLO: $\dfrac{a^5}{a^3} =$ ....

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \boxed{}$

EJEMPLO: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4 = \boxed{}$

⑥ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \boxed{}$

EJEMPLO: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \boxed{}$

RAÍCES EXACTAS

Si $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} =$ ....

EJEMPLOS: $\sqrt{\dfrac{36}{49}} = \boxed{}$; $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \boxed{}$

NÚMEROS RACIONALES

- Pueden ponerse en forma de ....
  ....
- Su expresión decimal es .... o
  ....

EJEMPLOS: 2; 314; $0,\overset{\frown}{75}$; $-2,0\overset{\frown}{7}$; ...

NÚMEROS IRRACIONALES

- No pueden ponerse en forma de ....
- Su expresión decimal no es ....
  ni ....

EJEMPLOS: $\sqrt{2}$; π; $\sqrt[4]{3}$; ...

NOTACIÓN CIENTÍFICA

- $256\,000\,000 = 2,56 \cdot 10^{\square}$
- $0,0000000256 =$ .... $\cdot\ 10^{-8}$
- $(5,2 \text{ , } 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^3) =$ .... $\cdot\ 10^9$
- $(2,68 \cdot 10^8) - (1,5 \cdot 10^7) = 2,57 \cdot 10^{\square}$

RADICALES

- $\sqrt[n]{a} \rightarrow \begin{cases} n \rightarrow \text{...........................} \\ a \rightarrow \text{...........................} \end{cases}$
- **Suma:** Han de tener el mismo..................
  .... y el mismo ....

  EJEMPLO: $3 - 5\sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{8} =$ ....
- **Producto:** Han de tener el mismo ....
  ....

  EJEMPLO: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \dfrac{3}{2} =$ ....

Potencias y raíces. Números aproximados

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Reduce y expresa como potencia única el resultado de estas operaciones:

a) $\dfrac{2^3 \cdot 2^5}{(2^2)^3} \cdot 2^{-2} =$

b) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^2 : \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} \cdot \dfrac{1}{2} =$

2 Opera los siguientes radicales:

a) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{60} =$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^3 =$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^4 =$

3 Expresa estas cantidades en notación científica:

$(N = a{,}bcd\ldots \cdot 10^n)$

a) 320 000

b) 2 500 millones

c) 43 millonésimas

4 La Tierra y el Sol distan, como sabes, 150 millones de kilómetros.

La luz recorre 300 000 km en un segundo.

¿Cuánto tiempo hace que partió del Sol la luz que está recibiendo la Tierra en este instante?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. NÚMEROS GRANDES. PEQUEÑOS NÚMEROS

1 Como sabes, la Tierra forma parte de un sistema planetario, el Sistema Solar, y este forma parte de una galaxia, la Vía Láctea. Pues bien, se calcula que en la Vía Láctea hay, aproximadamente, $1{,}2 \cdot 10^{11}$ estrellas.

Si pudieses, podrías empezar ahora a contarlas: cada segundo, una estrella. ¿Cuántos años tardarías (calcula, primeramente, cuántos segundos tiene un año)?

2 Un año luz es una distancia, la que recorre la luz en un año: $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. La Vía Láctea tiene un diámetro de $2 \cdot 10^{5}$ años luz. ¿Cuántos kilómetros son?

3 Entre la Luna y la Tierra hay una distancia media aproximada de de $3{,}84 \cdot 10^{5}$ km.

Imagina que quiésemos salvar esa distancia colocando virus, uno tras otro, y que elegimos un virus de la gripe de un diámetro de $2{,}2 \cdot 10^{-9}$ m. ¿Cuántos de esos virus necesitaríamos?

4 Una ballena azul, el animal más grande sobre la Tierra, puede alcanzar un peso de 200 toneladas, $2 \cdot 10^{5}$ kg. La masa de la Tierra es $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg.

¿Cuántas de estas ballenas azules serían necesarias para igualar la masa de nuestro planeta?

Potencias y raíces. Números aproximados

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

b) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3} : \frac{3}{2}\right]^2 =$

2 Reduce y expresa como potencia única el resultado de estas operaciones:

a) $\frac{2^3 \cdot (-2)^4}{2^3 : 2^2} : 2^{-5} =$

b) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3 : \left(-\frac{5}{3}\right)^2 : \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^3\right]^2 =$

3 Cierta bacteria tiene una longitud de 3 billonésimas de centímetro, y la longitud de cada uno de sus cilios(1) es una centésima parte de la de su cuerpo. Usa la notación científica para expresar el tamaño de cada cilio.

(1) Cilio: Filamento vibrátil de una bacteria.

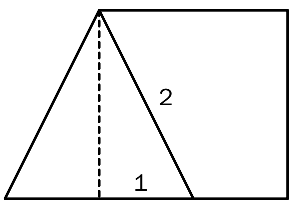
4 Opera estos radicales:

a) $(2 \cdot \sqrt{3})^2 =$

b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{4}\right)^2 =$

c) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} =$

5 a) ¿Sabrías calcular la altura del triángulo que se ve en esta figura? (Aplica el teorema de Pitágoras y no operes el resultado, déjalo con radicales).



b) ¿Cuál es el área del cuadrado? ¿Y la del triángulo?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL UNIVERSO INFINITO: VIAJE INTERESTELAR

Mirando hacia el sur, en primavera, podemos ver, entre otras, las siguientes constelaciones:

- CENTAURUS (sobre el horizonte), con su estrella α-Centauro, que está a 4,3 millones de años luz.
- LEO, con su estrella Régulus, a 85 años luz.

1 Si la luz viaja a 300 000 km por segundo, ¿cuántos kilómetros recorre en un año? Expresa el resultado en forma de notación científica.

2 Supongamos que el ser humano construyese una nave que fuese capaz de viajar a una velocidad de 300 000 km/h. Expresa en notación científica los kilómetros que recorrería en un año esa nave.

3 Hagamos con la nave una excursión por el cielo estrellado:

1.ª etapa: TIERRA – CENTAURUS

2.ª etapa: CENTAURUS – RÉGULUS

3.ª etapa: RÉGULUS – TIERRA

¿Cuánto tiempo duraría nuestro viaje? (Usa tu calculadora y la notación científica).

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $2^0 = 1$ b) $1/2^{11}$

2 a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{900} = 30$

c) $3\sqrt{3}$

d) $2^2 = 4$

3 a) $3{,}2 \cdot 10^5$

b) $2{,}5 \cdot 10^9$

c) $4{,}3 \cdot 10^{-5}$

4 500 segundos = $8{,}\widehat{3}$ minutos

APLICA

1 1 año = $3{,}15 \cdot 10^7$ segundos

Se necesitarían unos 3 800 años.

2 Son $1{,}892 \cdot 10^{18}$ km (¡cerca de 2 trillones de kilómetros!).

3 Necesitaríamos $1{,}745 \cdot 10^{17}$ virus.

4 Serían necesarias $2{,}9868 \cdot 10^{19}$ ballenas azules (¡casi 30 trillones de ellas!).

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) 4/9 b) 1/9

2 a) 2^{11} b) $(5/3)^4$

3 $3 \cdot 10^{-14}$

4 a) 12

b) 10/3

c) 4

5 a) Altura del triángulo = $\sqrt{3}$ u

b) Área del cuadrado = 3 u^2

Área del triángulo = $\sqrt{3}$ u^2

APLICA

1 $300\,000 \cdot 3\,600 \cdot 24 \cdot 365 \approx 9{,}4 \cdot 10^{12}$ km

2 $300\,000 \cdot 24 \cdot 365 \approx 2{,}6 \cdot 10^9$ km

3 $(4{,}3 + 85) \cdot 2 = 178{,}6$ años luz

$(178{,}6 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{12}) : (2{,}6 \cdot 10^9) =$

$= 6{,}457 \cdot 10^5$ años (¡unos 650 000 años!)

Progresiones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PROGRESIONES

SUCESIONES

Una **sucesión** es un conjunto de ....

....

Se llama **término general** de una sucesión a ....

Por ejemplo, en la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, … el término general es $a_n = \boxed{}$

El término 20 de esta sucesión es a_{20} = ...

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la cual se pasa de cada término al siguiente ....

....

El **término general** de una progresión aritmética es $a_n = \boxed{}$

donde a_1 es .... y d es ....

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \boxed{}$$

Por ejemplo, si $a_1 = 7$ y $a_2 = 11$, entonces:

d = ... a_n = ... a_{24} = ... S_{24} = ...

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la cual se pasa de cada término al siguiente ......

....

El **término general** de una progresión geométrica es $a_n = \boxed{}$

donde a_1 es .... y r es ....

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \boxed{}$$

Por ejemplo, si $a_1 = 3$ y $a_2 = 6$, entonces:

r = ... a_n = ... a_{10} = ... S_{10} = ...

Progresiones geométricas decrecientes

Cuando $|r| < \boxed{}$, entonces podemos sumar "todos" los términos de la progresión mediante la fórmula

$$S_\infty = \boxed{}$$

Por ejemplo, si $a_1 = 10$ y $a_2 = 5$, S_∞ = ...

Progresiones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Escribe los tres términos siguientes de estas progresiones aritméticas y halla su diferencia y su término general:

a) –4, –1, 2, …

b) 5, 11, 17, …

c) , 1, $\frac{3}{2}$, …

2 Halla la suma de los veinte primeros términos de las progresiones del ejercicio anterior.

3 Escribe los tres términos siguientes de estas progresiones geométricas y halla su razón y su término general:

a) 3, 6, 12, …

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, …

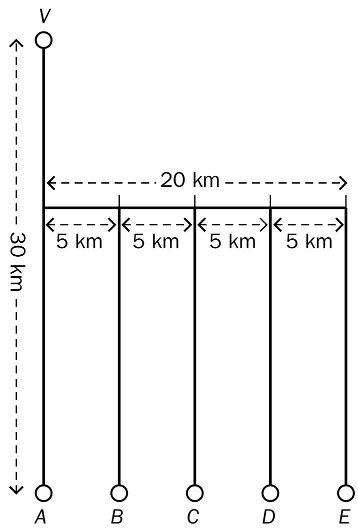
4 ¿Cuál es la suma de las diez primeras potencias de 2 ($a_1 = 1$)?

5 Halla la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, …

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL CAMIÓN DE LA BASURA

Todos los días, el camión de la basura tiene que hacer el recorrido desde el vertedero, V, hasta los pueblos A, B, C, D y E.



En su primer viaje sale de V, llega hasta A, llena el camión y vuelve a V para vaciarlo. El recorrido para los otros pueblos es similar.

1 ¿Cuántos kilómetros recorre el camión en su primer viaje VAV? ¿Y en los demás viajes, VBV, VCV, VDV y VEV?

2 ¿Cuántos kilómetros recorre el camión en cada jornada?

3 Supongamos que el camión lleva una velocidad media de 80 km/h y que los operarios paran una hora para comer. Además, tardan 30 minutos en llenar el camión en cada pueblo y 15 minutos en vaciarlo en el vertedero V. Calcula el tiempo que dura su jornada laboral.

Progresiones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Halla el término general de estas sucesiones:

a) 1, 5, 9, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

2 Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones cuyo término general a_n es:

a) n^3

b) $\frac{n-1}{n+1}$

c) $3 \cdot \frac{1}{5^n}$

3 ¿Cuánto suman los cien primeros números impares?

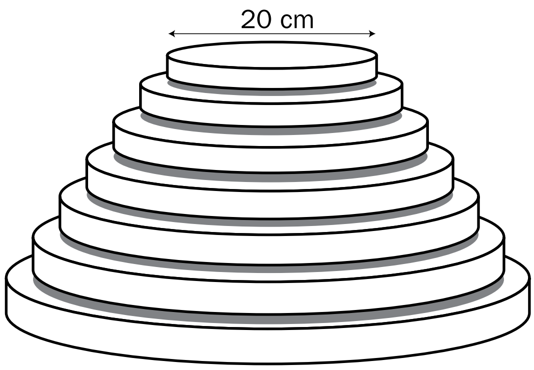
4 En una progresión aritmética, $a_3 = 5$ y $a_6 = 17$. Halla la diferencia d, el término a_1 y la suma de los veinte primeros términos.

5 En una progresión geométrica, $a_1 = 2$ y $a_4 = 1/4$. Halla la razón r, el término a_{20} y la suma de sus infinitos términos.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA BODA

Nuria y Carlos preparan su boda. Hoy les toca hablar con César, el pastelero. Este les propone una tarta de varios pisos circulares, teniendo cada uno de ellos un diámetro 5 cm menor que el piso inferior. Pero el último piso ha de tener, independientemente del número de ellos, 20 cm de diámetro.



1 Carlos cree que con 15 pisos será suficiente. ¿Qué diámetro deberá tener entonces la tarta en su parte más baja?

2 César, además, tiene que resolver otro problema. Cuando llegue el momento de repartir la tarta, tendrá que colocar cada piso, uno al lado del otro, en una mesa. ¿Qué longitud mínima deberá tener esa mesa?

3 Por otro lado, César piensa decorar la tarta con fresones: 1 fresón en el piso superior, 2 en el penúltimo (en el a_{14}), 4 en el antepenúltimo (a_{13}) y así sucesivamente. ¿Cuántos fresones necesitará para ese cometido?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $-4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots$

$d = 3$; $a_n = 3n - 7$

b) $5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots$

$d = 6$; $a_n = 6n - 1$

c) $\frac{1}{2}, 1, , 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$

$d = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{n}{2}$

2 a) $S_{20} = 490$

b) $S_{20} = 1\,240$

c) $S_{20} = 105$

3 a) $3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$

$r = 2$; $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

$r = \frac{1}{2}$; $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4 $2^{10} - 1 = 1\,023$

5 $\frac{3}{2}$

APLICA

1 VAV = 60 km

VBV = 70 km

VCV = 80 km

VDV = 90 km

VEV = 100 km

2 $S_5 = 400$ km

3 8 h 45 min más la hora de la comida.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $4n - 3$

b) $\frac{n}{n+1}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2 a) 1, 8, 27, 64

b) 0, 1/3, 2/4, 3/5

c) $\frac{3}{5}, \frac{3}{5^2}, \frac{3}{5^3}, \frac{3}{5^4}$

3 $a_{100} = 1 + 99 \cdot 2 = 199$

$S_{100} = (1 + 199) \cdot 50 = 10\,000$

4 $d = 4$; $a_1 = -3$; $a_{20} = 73$; $S_{20} = 700$

5 $r = \frac{1}{2}$; $a_{20} = \frac{1}{2^{18}}$; $S_\infty = 4$

APLICA

1 Se trata de una progresión aritmética de primer término 20 y diferencia 5.

$a_{15} = 90$ cm

2 $S_{15} = 825$ cm $= 8{,}25$ m

3 Progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su razón es 2.

$S_{15} = 2^{14} - 1 = 16\,383$ fresones

El lenguaje algebraico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En una expresión algebraica aparecen cantidades desconocidas que se representan por letras y se llaman ....

TIPOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

NO IGUALDADES

IGUALDADES

MONOMIOS	POLINOMIOS	IDENTIDADES	ECUACIONES
Un monomio es .... $-4xy^2$ es un	Un polinomio es........ .... $2x - y^2$ es un	Una identidad es una igualdad algebraica que es cierta para..... .... $a + b = b + a$ es una	Una ecuación es una igualdad algebraica que es cierta para..... .... $3x - 2 = 0$ es una ....

MONOMIOS

- El **coeficiente** de un monomio es ....
- El **grado** de un monomio es..
- Los números son monomios de grado...
- Cuando dos monomios tienen idéntica la parte literal se llaman...
- Para sumar dos monomios, estos deben ser...

POLINOMIOS

- Cada uno de los monomios que forman un polinomio se llama..
- El **grado** de un polinomio es ....
- Para **sumar** dos polinomios ....
- Para **multiplicar** dos polinomios..

IDENTIDADES NOTABLES

$(a + b)^2 =$ .... $(a - b)^2 =$ .... $(a + b)\,(a - b) =$ ....

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una **fracción algebraica** es ....

El lenguaje algebraico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Calcula el valor de estas expresiones algebraicas para $x = 1$ y $x = -1$.

a) $5x^2 - 3x + 4$

b) $3x^3 - 10x^2 - 5x + 6$

c) $\dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{7x - 6}{4}$

2 Calcula las siguientes sumas de monomios:

a) $5x^3 - 3x^3 - x^3$

b) $x - \dfrac{3x}{5} - \dfrac{x}{3}$

c) $\dfrac{5x^2}{2} - x^2 + \dfrac{x^2}{2}$

3 Calcula estos productos y simplifica el resultado:

a) $-5x^3 \cdot (x^2 - 3x + 1)$

b) $\left(x^3 - \dfrac{2x}{3} + 1\right) \cdot 3x$

c) $\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5}{2}\right) \cdot \dfrac{x}{3}$

4 Opera y reduce estas expresiones:

a) $(x^2 - 5x + 1) \cdot (2x - 3)$

b) $(x - 3) \cdot (x + 4) \cdot (x - 6)$

5 Calcula, sin desarrollar, el valor de estos productos notables:

a) $(2x + 3)^2$

b) $\left(\dfrac{3x}{2} - 2\right)^2$

c) $(5x + 4) \cdot (5x - 4)$

d) $\left(2x + \dfrac{1}{2}\right)^2$

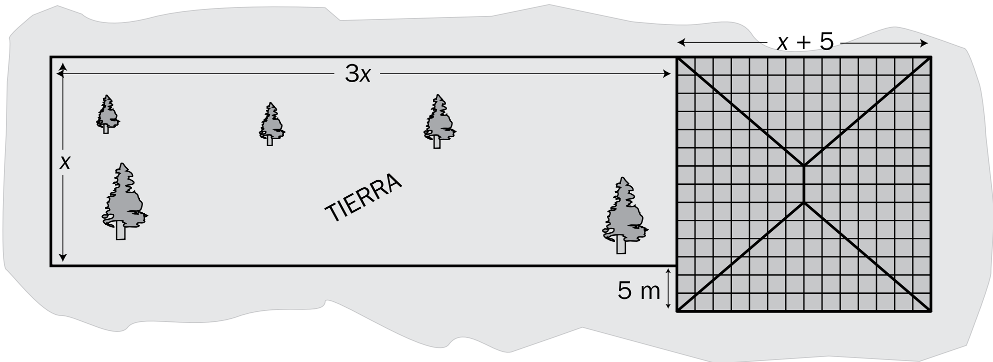
e) $\left(3x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

f) $\left(\dfrac{2x}{3} + 1\right) \cdot \left(\dfrac{2x}{3} - 1\right)$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA VIEJA CASA DEL ABUELO

Rebuscando en el desván de la casa de sus abuelos, Adela (estudiante de 3.º de ESO) ha encontrado entre unos viejos papeles un plano de la casa y de un terreno de labor adyacente. El paso del tiempo ha borrado las medidas, pero queda un dato: la parte de la puerta de entrada a la casa, que indica 5 m.



Adela observa que la casa es un cuadrado perfecto y que la tierra de labor es, aproximadamente, el triple de larga que de ancha. Intrigada, decide investigar sobre las dimensiones de toda la finca.

1 Utilizando el lenguaje algebraico, busca una expresión para el lado de la casa.

2 ¿Qué expresión algebraica tendrá la superficie de la casa?

3 ¿Y cuál será la superficie de toda la finca, casa y tierra juntas?

4 De repente, Adela recuerda lo que tantas veces ha oído decir al abuelo: "…gracias al cuarto de fanega de tierra, no pasamos hambre en la posguerra". Con estos datos, ¿podrá Adela averiguar las dimensiones y la superficie de la casa y de la finca completa?

(DATO: 1 fanega ≈ 6 500 m^2).

El lenguaje algebraico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Considera los polinomios $A = x^3 - 2x + 3$, $B = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 4$ y $C = 3x^2 - 1$.

Halla el valor de la expresión $(A - B) + (A - C) - (B - C)$.

2 Opera y simplifica la expresión $2(a + b) - 4[a - (2a - 3b)]$.

3 Opera y reduce la expresión $\left(x - \dfrac{3}{4}\right) \cdot (5x^2 - 1)(4x + 3)$.

4 Calcula, sin desarrollar, el valor de estos productos notables:

a) $\left(\dfrac{2x}{5} - \dfrac{5}{2}\right)^2$

b) $\left(\dfrac{3x}{4} + 4\right)^2$

c) $\left(\dfrac{3x}{2} + 5\right) \cdot \left(\dfrac{3x}{2} - 5\right)$

5 Descompón en factores estas expresiones (saca factor común, utiliza los productos notables…):

a) $x^3 - 4x$

b) $5x^5 - 20x^3 + 20x$

c) $4x^3 + 16x^2 + 16x$

d) $5x^2 - \dfrac{16}{5}$

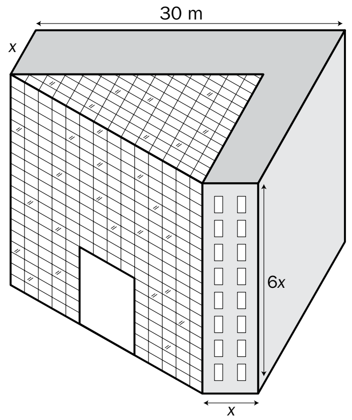
e) $a \cdot (a - 1) + a \cdot (a + 2)$

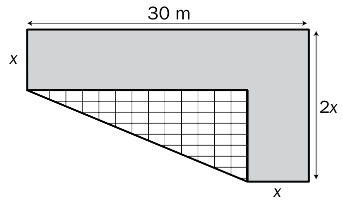
f) $1 - a^4$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. TORRE PARA OFICINAS

El estudio de arquitectura Nuevos Espacios diseña una torre para oficinas, con la planta y el alzado que ves en la figura.





La torre se divide en dos zonas: una para oficinas y otra para servicios comunes, que será acristalada.

1 ¿Qué expresión algebraica dará el arquitecto para la superficie de cada planta destinada a oficinas? ¿Y para la zona acristalada?

2 ¿Y qué expresión tendrá el volumen de cada zona del edificio, oficinas y servicios comunes?

3 El arquitecto estima en 120 m la altura del edificio. ¿Qué superficie se destinará a oficinas en cada planta?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1

	a)	b)	c)
$x = 1$	6	–6	9/4
$x = -1$	12	–2	23/4

2 a) x^3 b) $\dfrac{x}{15}$ c) $2x^2$

3 a) $-5x^5 + 15x^4 - 5x^3$

b) $3x^4 - 2x^2 + 3x$

c) $\dfrac{x^3}{12} - \dfrac{5x}{6}$

4 a) $2x^3 - 13x^2 + 17x - 3$

b) $x^3 - 5x^2 - 18x + 72$

5 a) $4x^2 + 12x + 9$ b) $\dfrac{9x^2}{4} - 6x + 4$

c) $25x^2 - 16$ d) $4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4}$

e) $9x^2 - 2x + \dfrac{1}{9}$ f) $\dfrac{4x^2}{9} - 1$

APLICA

1 Lado de la casa $\to$ $x + 5$

2 Superficie de la casa $\to (x + 5)^2$

3 Superficie de la finca $\to (x + 5)^2 + 3x^2 =$
$= 4x^2 + 10x + 25$

4 Superficie de la tierra $\to 3x^2 = 1\,625$ m^2 $\to$
$\to x \approx 23{,}27$ m

La casa mide, aproximadamente, 28,27 m de lado. Su superficie es de 799,2 m^2.

La tierra mide, aproximadamente, 23,27 m de ancha y 69,81 m de larga.

La finca completa tiene una superficie de 2 424,2 m^2.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 $2x^3 - x^2 + 2x - 2$

2 $6a - 10b$

3 $20x^4 - \dfrac{61}{4}x^2 + \dfrac{9}{4}$

4 a) $\dfrac{4x^2}{25} - 2x + \dfrac{25}{4}$

b) $\dfrac{9x^2}{16} + 6x + 16$

c) $\dfrac{9x^2}{4} - 25$

5 a) $1x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

b) $5x \cdot (x^2 - 2)^2$

c) $4x \cdot (x + 2)^2$

d) $5\left(x + \dfrac{4}{5}\right) \cdot \left(x - \dfrac{4}{5}\right)$

e) $a(1 + 2a)$

f) $(1 + a^2) \cdot (1 + a) \cdot (1 - a)$

APLICA

1 Superficie planta oficinas $\to x^2 + 30x$

Superficie planta zona acristalada $\to 15x - \dfrac{x^2}{2}$

2 Volumen oficinas $\to 6x^3 + 180x^2$

Volumen zona acristalada $\to 90x^2 - 3x^3$

3 $6x = 120 \to x = 20$ m

La superficie destinada a oficinas en cada planta será de $20^{20} + 30 \cdot 20 = 1\,000$ m^2.

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ECUACIONES

ECUACIONES

- Una **ecuación** es una propuesta de ....
- Un valor desconocido en una ecuación, que representamos con una letra, se llama ....
- La **solución** de la ecuación es ....
- Resolver una ecuación es ....

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

- La **solución** de la ecuación $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, es $x = \boxed{}$
- Dos **ecuaciones** son **equivalentes** cuando ....
- Pasos para resolver una ecuación de primer grado:

① Quitar ....

② Quitar ....

③ Pasar ....

④ Simplificar ....

⑤ Despejar ....

⑥ Comprobar ....

EJEMPLO: $\frac{x}{2} + \frac{3}{5} = 1 + \frac{3x}{10}$

①

②

③

④

⑤

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se obtienen aplicando la fórmula:

$x = \boxed{}$

EJEMPLO: $x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_1 =$ .... $x_2 =$ ....

ECUACIONES INCOMPLETAS

La solución de $ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, es:

$x =$ ....

EJEMPLO: $7x^2 + 28 = 0$

$x = \pm$ ....

La solución de $ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$, es:

$x_1 =$ .... $x_2 =$ ....

EJEMPLO: $2x^2 - 4x = 0$

$x_1 =$ .... $x_2 =$ ....

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones:

① Identificar ....

② Relacionar ....

③ Resolver ....

④ Interpretar ....

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 ¿Para cuáles de las siguientes ecuaciones es $x = -2$ solución?

a) $x^3 + 8 = 0$

b) $-x^2 - 4 = 0$

c) $-x^2 + 4x = 6x$

d) $\dfrac{x+1}{2} + x = 3$

e) $\sqrt{x^2 + 5} = 3$

f) $3(x^2 + 1) = 2x + 3$

2 Resuelve estas ecuaciones de primer grado:

a) $2(x + 5) = \dfrac{x+2}{3} + 4x$

b) $\dfrac{x}{15} + x = \dfrac{2x}{5} + 10$

c) $\dfrac{3x - 12}{4} - x = x - 3$

d) $5 - \dfrac{6x - 4}{5} = x - 3$

3 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $x^2 + x - 56 = 0$

d) $3x^2 + 6x = 0$

e) $4x^2 - 12x = 0$

f) $2x^2 + 8x = 0$

g) $3x^2 - 243 = 0$

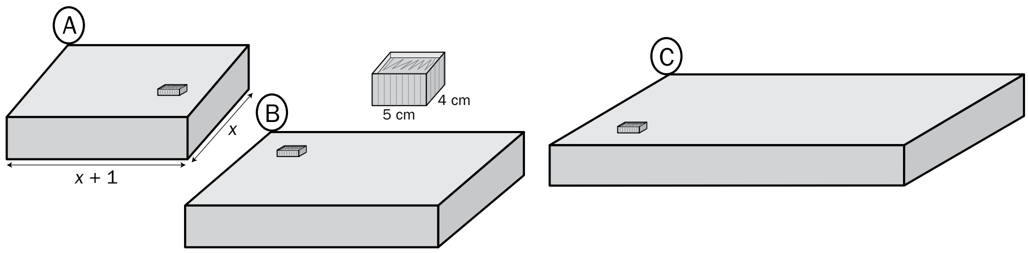
h) $x^2 + 9 = 0$

i) $6x^2 - 216 = 0$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CAJAS DE MANTECADOS

La confitería Dulcevida quiere lanzar al mercado un tipo de mantecados. Cada unidad ocupa una superficie de $4 \times 5 = 20 \text{ cm}^2$ y desea venderlos en cajas de 30 unidades. Usarán tres tipos de cajas:



Modelo A: Caja de base rectangular, 1 cm más larga que ancha.

Modelo B: Caja de base rectangular, 25 cm más larga que ancha.

Modelo C: Caja de base rectangular y la diferencia entre su largo y su ancho es de 50 cm.

1 ¿Qué superficie tendrá el fondo de la caja, en cualquiera de los modelos, si en su base han de caber 30 mantecados?

2 ¿Qué dimensiones, largo y ancho, tendrá la base de cada modelo de caja?

3 ¿Cómo crees que colocarán los mantecados en cada modelo de caja?

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2x - \dfrac{6x^2 - 2x + 1}{6} + \dfrac{2x^2 - 3x}{2} = -1$

b) $\dfrac{7 - 3x}{12} - \dfrac{3(5 - 2x)}{6} = 2(x - 2) + \dfrac{5}{4}$

2 Resuelve las ecuaciones siguientes, reduciéndolas a una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$:

a) $\dfrac{(x + 1)^2}{2} - \dfrac{x + 1}{4} = 9$

b) $\dfrac{(x - 1)^2}{2} - \dfrac{(x + 1)^2}{3} = 1 - x$

3 En una ecuación de segundo grado, cuya forma general es $ax^2 + bx + c = 0$, si x_1 y x_2 son sus raíces, se cumple que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Intenta calcular las raíces de estas ecuaciones aplicando esta propiedad (tanteando y sin utilizar la fórmula de resolución):

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 + x - 30 = 0$

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $x^2 - 6x + 5 = 0$

e) $x^2 - 4x + 3 = 0$

f) $x^2 + 4x - 12 = 0$

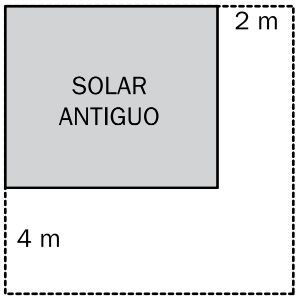
4 a) ¿Qué descubres al resolver la ecuación $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$?

b) ¿Y al resolver $5x - 6 = 4(x - 1) + x$? Interpreta ambos resultados.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. PEQUEÑA HERENCIA

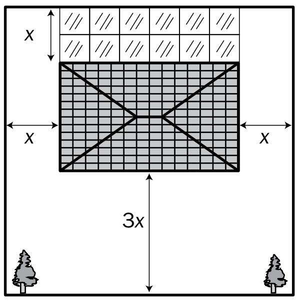
El pequeño terreno que heredó Jaime de sus padres no es un cuadrado perfecto. Calcula que tiene 2 m más de largo que de ancho. Decide comprarle a su vecino 4 m más en dirección sur y 2 m más en dirección este. Así consigue un terreno de 256 m^2.



1 ¿Qué dimensiones tiene ahora el solar? ¿Es ya de planta cuadrada?

2 Satisfecho con la ampliación, Jaime decide construir una vivienda. Le gusta mucho la jardinería y el cultivo de flores, así es que su vivienda va a ocupar un espacio en el interior del terreno y estará rodeada, por la parte frontal y por los laterales, de un jardín. En la parte trasera construirá un invernadero.

Quiere que la profundidad de la parte delantera del jardín sea 3 veces el ancho de las partes laterales, que será igual a la profundidad del invernadero. Para explicar bien lo que quiere, ha hecho este croquis:



a) ¿Qué dimensiones tendrá la casa si quiere que la planta tenga una superficie de 96 m^2?

b) ¿Qué superficie ocupará el invernadero?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) Sí es solución.

b) No es solución.

c) Sí es solución.

d) No es solución.

e) Sí es solución

f) No es solución.

2 a) $x = 4$

b) $x = 15$

c) $x = 0$

d) $x = 4$

3 a) $x_1 = 5$; $x_2 = 1$

b) $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1/3$

c) $x_1 = 7$; $x_2 = -8$

d) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$

e) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

f) $x_1 = 0$; $x_2 = -4$

g) $x_1 = 9$; $x_2 = -9$

h) No tiene solución.

i) $x_1 = 6$; $x_2 = -6$

APLICA

1 $20 \cdot 30 = 600$ cm^2

2 Modelo A $\rightarrow$ 24 cm de ancho y 25 cm de largo.

Modelo B $\rightarrow$ 15 cm de ancho y 40 cm de largo.

Modelo C $\rightarrow$ 10 cm de ancho y 60 cm de largo.

3 Modelo A $\rightarrow$ 6 (de 4 cm) $\times$ 5 (de 5 cm).

Modelo B $\rightarrow$ 3 (de 5 cm) $\times$ 10 (de 4 cm).

Modelo C $\rightarrow$ 2 (de 5 cm) $\times$ 15 (de 4 cm).

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $x = -1$

b) $x = 2/3$

2 a) $x_1 = -5$; $x_2 = 7/2$

b) $x_1 = 5$; $x_2 = -1$

3 a) $x_1 = 3$; $x_2 = 4$

b) $x_1 = 5$; $x_2 = -6$

c) $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

d) $x_1 = 1$; $x_2 = 5$

e) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

f) $x_1 = 2$; $x_2 = -6$

4 a) Se obtiene $12x = 12x$ o, lo que es lo mismo, $0x = 0$. Significa que cualquier valor de x verifica la ecuación. La ecuación es indeterminada.

b) Se obtiene $-6 = -4$, lo cual es una contradicción. Esta ecuación no tiene solución.

APLICA

1 El solar, ahora, es cuadrado y tiene 16 m de lado.

2 a) La planta de la casa será un rectángulo de 8 m de ancho por 12 m de largo.

b) El invernadero tendrá una superficie de 24 m^2.

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

SISTEMAS DE ECUACIONES

ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

- Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene .... soluciones.
- Si representamos en el plano las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, obtenemos una ....
- Dos ecuaciones forman un **sistema** cuando ....
- La **solución** de un sistema es ....
- Dos **sistemas** son **equivalentes** cuando ....

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL

Si el sistema tiene una solución, las dos rectas se cortan en ....

Si el sistema no tiene solución, las rectas son ....
....

Si el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas son..
....

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar una...
....
....
....

EJEMPLO: $\begin{cases} 6x + 10y = 18 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$x =$ .... $y =$ ....

IGUALACIÓN

Consiste en despejar la misma..................................
....
....

EJEMPLO: $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$x =$ .... $y =$ ....

REDUCCIÓN

Consiste en preparar las dos ecuaciones para que.........
....
....

EJEMPLO: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

$x =$ .... $y =$ ....

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS

Pasos que conviene dar:

① Identificar ....

② Expresar ....

③ Resolver ....

④ Interpretar ....

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Aquí tienes una ecuación con dos incógnitas, $x + 3y = 5$. ¿Cuáles de estos pares de valores son solución de la ecuación?

a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

2 Completa la tabla con parejas de soluciones de la ecuación $y = 2x + 4$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y				4				

3 Resuelve estos sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$

4 Resuelve estos sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 4y - x = 34 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x - 7y = 34 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 - x = 3y \\ 3(1 - x) = 40 - y \end{cases}$

5 Resuelve por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 10y = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. OFERTAS EN EL MERCADO

Cierto supermercado presenta, el día de "Tiramos los precios", las siguientes ofertas de carne y fruta:

2 kg de SOLOMILLO 3 kg de CHULETAS 54 €	3 kg de SOLOMILLO 2 kg de CHULETAS 56 €
2 kg de PERAS 3 kg de MANZANAS 8 €	3 kg de PERAS 2 kg de MANZANAS 7 €

1 ¿A cómo sale el kilo de solomillo? ¿Y el de chuletas?

2 ¿Y a cuánto salen cada kilo de peras y cada kilo de manzanas?

3 Fuera de oferta, el kilo de solomillo está a 14 euros, y el de chuletas, a 12 euros.

Cada kilo de manzanas cuesta 2,4 euros, y cada kilo de peras, 1,5 euros.

Estimo que necesito, al menos, 2,5 kg de solomillo, 2 kg de chuletas, 1,5 kg de manzanas y 3 kg de peras. ¿Me compensan las ofertas en todos los casos? ¿Cómo debo comprar?

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Fijándote bien en las ecuaciones que los forman, indica cuáles de estos sistemas no tienen solución (INCOMPATIBLES), cuáles tienen infinitas soluciones (COMPATIBLES INDETERMINADOS) y cuáles tienen una solución (COMPATIBLES DETERMINADOS):

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - 5y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$

2 Resuelve cada sistema por el método indicado:

a) SUSTITUCIÓN

$\begin{cases} 3y - 2x = 7 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$

b) REDUCCIÓN

$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y = \dfrac{14}{5} \\ \dfrac{3}{10}x + 5y = \dfrac{14}{5} \end{cases}$

c) IGUALACIÓN

$\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x + 3) = 6 - y \end{cases}$

3 Reduce previamente estos sistemas y luego resuélvelos por el método que consideres más adecuado:

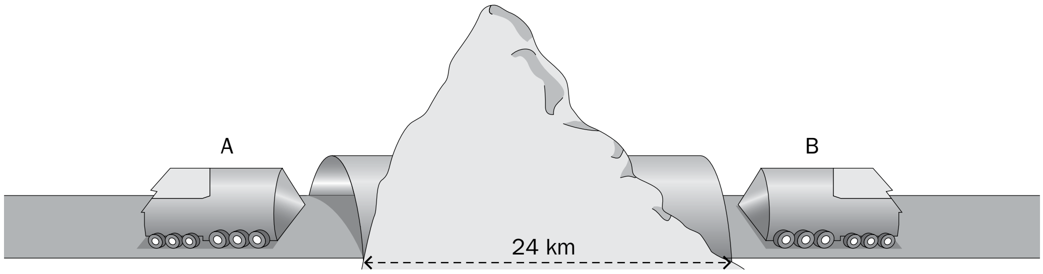
a) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{4y}{5} = 21 \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{5} = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - 1) - 5(y + 3) = 1 - 2(x + 2) \\ 2x + \dfrac{6 + 3y}{4} = \dfrac{x - y}{3} + 6y \end{cases}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CONSTRUCCIÓN DE UN TÚNEL

Dos máquinas tuneladoras horadarán una montaña desde puntos opuestos para hacer un túnel de 24 km de longitud.



La tuneladora A, desde la cara norte de la montaña, avanza a un ritmo de 200 m por día, y la B, algo más lenta, horada 150 m cada día, desde la cara sur.

1 ¿En qué punto del túnel se encontrarán ambas y cuánto tiempo emplearán en hacerlo?

2 La empresa de la tuneladora A cobra 1,5 millones de euros por día trabajado y 0,2 millones de euros por cada 100 metros avanzados. La empresa de la B cobra 1 millón de euros por día trabajado y 0,3 millones por cada 100 metros.

La fracción de día se cobra como un día completo, y cada fracción de 100 metros, también como 100 metros completos. ¿Cuánto cobrará cada empresa por la obra?

3 Si hubiera que elegir la misma empresa para horadar ambos lados con dos máquinas iguales, ¿cuál sería el presupuesto total de la obra en cada caso? ¿Cuál habría que elegir si interesase la más barata?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) Sí son solución de la ecuación.

b) Sí son solución de la ecuación.

c) No son solución de la ecuación.

2

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–2	0	2	4	6	8	10	12

3 a) $x = 1$; $y = -1$

b) $x = 1$; $y = 2$

c) $x = 2$; $y = -3$

4 a) $x = 10$; $y = 6$

b) $x = 8$; $y = 2$

c) $x = -11$; $y = 4$

5 a) $x = 5$; $y = 4$

b) $x = 5$; $y = 2$

c) $x = 5$; $y = 3$

APLICA

1 El solomillo sale a 12 € el kilo. Las chuletas, a 10 € cada kilo.

2 Cada kilo de peras cuesta 1 €, y cada kilo de manzanas, 2 €.

3 Por separado, en carne gastaría:

$2,5 \cdot 14 + 2 \cdot 12 = 59$ €

Debo elegir la segunda oferta de carne.

En fruta, por separado, me gastaría:

$1,5 \cdot 2,4 + 3 \cdot 1,5 = 8,10$ €

Debo elegir la segunda oferta de fruta.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) Una solución. Compatible determinado.

b) Una solución. Compatible determinado.

c) No tiene solución. Incompatible.

d) Infinitas soluciones. Compatible indeterminado.

2 a) $x = 4$, $y = 5$

b) $x = 6$, $y = 1/5$

c) $x = -2$, $y = 4$

3 a) $x = 12$, $y = 15$

b) $x = 5$, $y = 2$

APLICA

1 Las tuneladoras se encontrarán a 13 714 m de la entrada por la cara norte y a 10 286 m de la entrada por la cara sur.

Tardarán en encontrarse 68,57 días.

2 La empresa A cobrará 131,1 millones de euros.

La empresa B cobrará 99,9 millones de euros.

3 La empresa A tardaría, con dos de sus máquinas, 60 días. Cobraría 138 millones de euros.

La empresa B tardaría, con dos de sus máquinas, 80 días. Cobraría 152 millones de euros.

Habría que elegir la empresa A.

Funciones y gráficas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

- Una función asocia a cada valor de x ......
  ....
- x es la variable ....
- y es la variable ....
- El tramo de valores de x para los cuales hay valores de y se llama ....
  ....

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Se representan sobre unos ejes cartesianos.

- El eje horizontal se llama de ....
  y sobre él se representa la ....
- El eje vertical se llama de ....
  y sobre él se representa la ....
- Cada punto de la gráfica tiene dos ....
  ....

VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Para estudiar las variaciones de una función, tenemos que mirar su gráfica de izquierda a derecha.

- Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, ...
  ....

EJEMPLO:

$y = 2x$ es una función ....

- Si al aumentar la variable independiente, x, disminuye la variable dependiente, y, se dice que la función es ....

  EJEMPLO:

  $y = -2x$ es una función ....

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Si en una función hay un punto más alto que los puntos que lo rodean, se dice que ese punto es ....

  HAZ UN DIBUJO:

- Si una función tiene un punto más bajo que los que lo rodean, se dice que ese punto es
  ....

  HAZ UN DIBUJO:

- A la izquierda de un máximo, la función es .... y a la derecha es ....
- A la izquierda de un mínimo, la función es .... y a la derecha es ....

TENDENCIAS DE UNA FUNCIÓN

- Una **función** es **periódica** cuando ....
  ....
- El **período** de una función es ....
  ....

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDADES

- Una función es continua cuando ....
  ....
  ....

  DIBUJA UN EJEMPLO:

- Si la función presenta saltos en su gráfica, se dice que es
  ....
  ....

  DIBUJA UN EJEMPLO:

Funciones y gráficas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

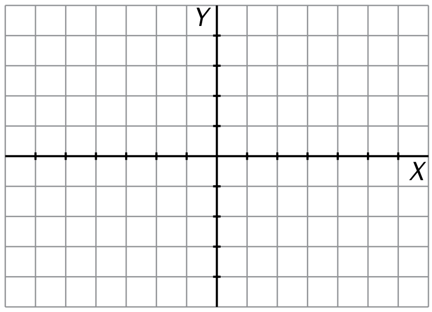
PRACTICA

1 Imagínate que tienes una MÁQUINA DE FUNCIONES, de forma que si metes un número x por una ranura, sale por la boca de la máquina el valor y: "Doble de x y una unidad más".

a) Completa esta tabla de valores según el número x que metas:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

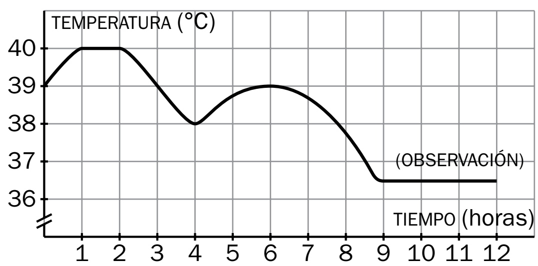
b) Dibuja la gráfica de la función que realiza la máquina. ¿Cuál es el dominio de definición de la función? ¿Y el recorrido?



c) Halla $f(1/2)$ (valor de y cuando $x = 1/2$). ¿Cuánto vale $f(-1/4)$?

d) ¿Para qué valor de x la máquina muestra el valor $y = 13$?

2 Esta es la gráfica de la temperatura de un enfermo según las horas de hospitalización:



a) ¿Con qué temperatura ingresó en el hospital?

b) ¿En qué momento alcanzó la temperatura máxima?

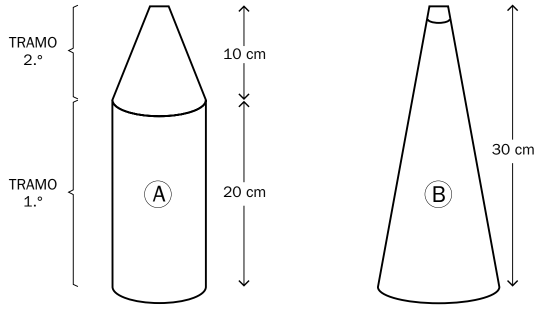
c) ¿En qué períodos la temperatura decreció?

d) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación hasta que fue dado de alta?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ¿QUÉ MODELO DE ENVASE ELEGIR?

Una fábrica de detergente prueba dos tipos de envase de 1 litro para comercializar su producto. Le interesa elegir el modelo de envase que se llene en menos tiempo.

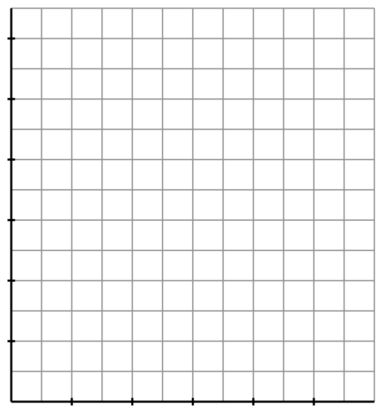


Los técnicos van llenando cada envase y midiendo la altura del líquido cada cierto tiempo [relacionan y (la altura) con t (tiempo)]. Los resultados quedan reflejados en las tablas.

MODELO A									
t (s)	1	2	3	…	20	21	…	24	25
y (cm)	1	2	3	…	20	21	…	28	30
	Tramo 1.°					Tramo 2.°			

MODELO B					
t (s)	10	15	20	21	22,5
y (cm)	5	10	18	22	30

1 Construye, sobre los mismos ejes, una gráfica para cada modelo que relacione y (altura) con t (tiempo).



2 Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué botella empieza a llenarse más rápido, es decir, crece más deprisa?

b) ¿A partir de qué instante t, la otra botella se llena más rápido?

c) ¿Qué envase debe ser elegido? ¿Por qué?

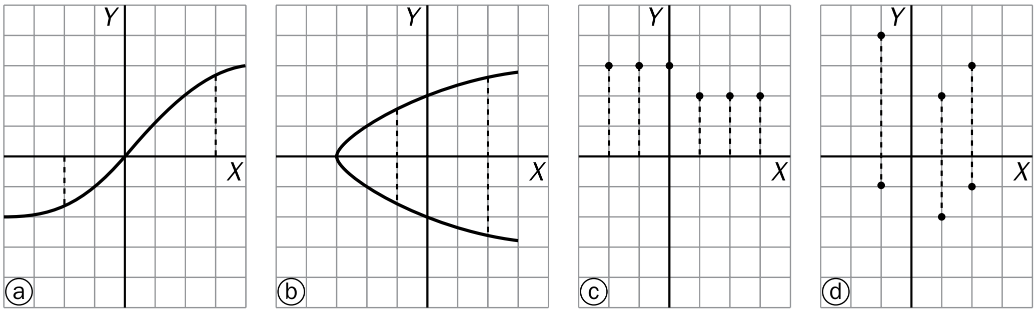
Funciones y gráficas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

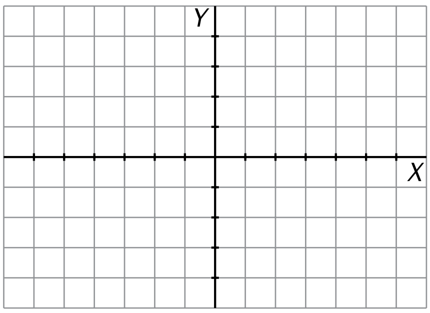
1 Se define una función como una relación entre dos variables (x, y) de modo que a cada valor que le demos a x, le corresponde uno y solo un valor de y. Según esto, ¿cuáles de estas gráficas sí representan una función y cuáles no?



2 Considera la función definida así:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + 3 & \text{para todo } x \text{ menor que } 4 \\ x & \text{para todo } x \text{ mayor o igual que } 4 \end{cases}$$

Represéntala gráficamente haciendo una tabla de valores.



3 Dada la función que asocia a cada número x "su cuadrado aumentado en 1", represéntala utilizando una tabla de valores. ¿Cuál es su valor mínimo? ¿En qué x se alcanza? ¿Para qué valores de x es creciente? ¿Y decreciente? ¿Es simétrica?

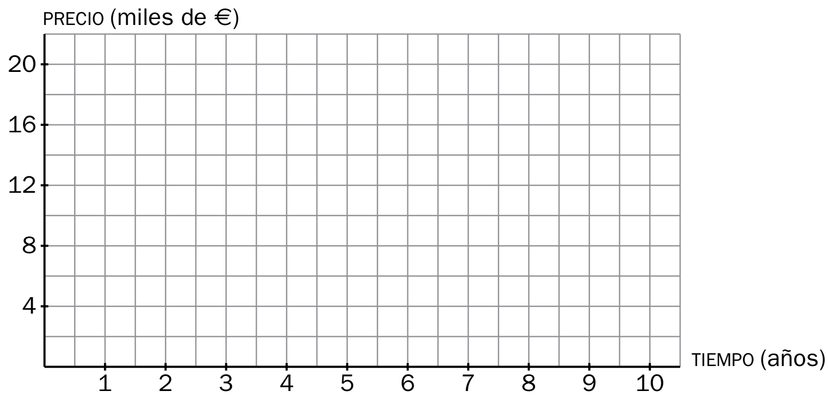
Nombre y apellidos: ....

APLICA. DEPRECIACIÓN DE UN COCHE

Un señor compra un coche por 20 000 €. Sabe que el valor de ese coche se deprecia un 20% anual y desea venderlo cuando su precio en el mercado de segunda mano no sea inferior al 20% del precio que ha pagado actualmente.

1 Construye una tabla de valores sobre el valor y del coche según pasen los años (t), hasta los 10 años. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?

2 Representa esta situación mediante una gráfica aproximada.



3 Ayúdate de la calculadora y de la expresión algebraica de la función para saber cuántos años han de pasar para que el dueño del coche pueda venderlo al 20% de su valor inicial.

Soluciones

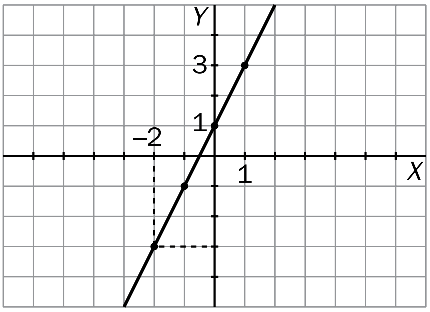
Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	–3	–1	1	3	5	7

b)



Dominio = $\mathbb{R}$. Recorrido = $\mathbb{R}$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2}$

d) $x = 6$

2 a) 39°

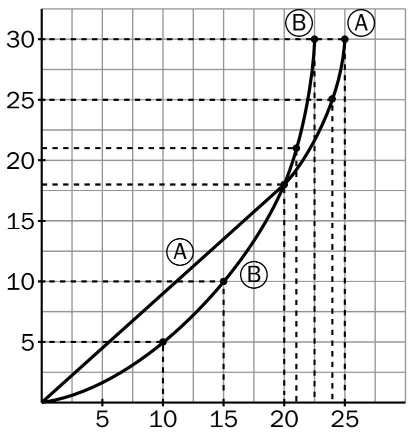
b) En la 1.ª y 2.ª horas.

c) De la 2.ª a la 4.ª h. y de la 6.ª a la 9.ª h.

d) Tres horas: 9.ª h a 12.ª h.

APLICA

1



a) El modelo A.

b) A partir de $t = 21$ s, el modelo B es más rápido.

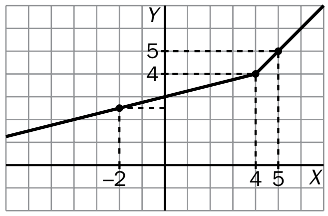
c) Debe elegirse el modelo B porque se llena dos segundos y medio antes.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

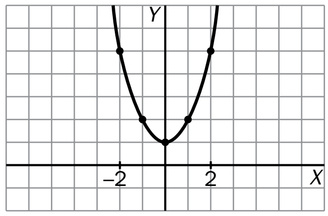
1 Son funciones a) y c). No lo son b) y d).

2



x	–2	0	1	2	3	4	5	6	8
y	2,5	3	3,25	3,5	3,75	4	5	6	8

3



x	–2	–1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

- Mínimo en $x = 0$, $y = 1$
- Crece para $x > 0$ y decrece en $x < 0$. Es simétrica respecto del eje Y.

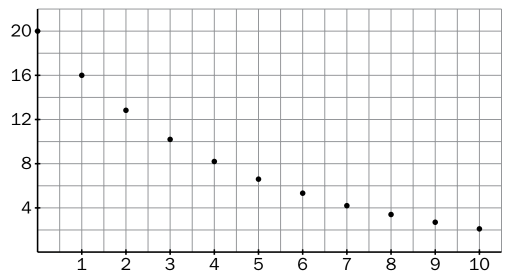
APLICA

1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	20	16	12,8	10,2	8,2	6,6	5,8	4,2	3,4	2,7	2,1

$y = 20 \cdot 0{,}8^t$

2



3 Deberá venderlo cuando cueste el 20% de 20 000 €, es decir, 4 000 €.

Hacemos $4 = 20 \cdot 0{,}8^t$ y tenemos que $t = 7{,}21$ años.

Funciones lineales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FUNCIONES LINEALES

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD

- Su ecuación es $y =$ ....
- Su gráfica es una .... que pasa por ....

EJEMPLO:

FUNCIÓN $y = mx + n$

- Su gráfica es una ....
- m es la ....
- Corta al eje Y en el punto ....

EJEMPLO:

FUNCIÓN CONSTANTE

- La ecuación de la función constante es $y =$ ....
- Su gráfica es una .... paralela al eje de ....

EJEMPLO:

PENDIENTE DE UNA RECTA

Para reconocer la pendiente de una recta:

- Se despeja ....
- La pendiente es ....

EJEMPLO: La pendiente de la recta $3x - 2y = 0$ es: $m =$ ....

La pendiente de una recta de la que conocemos dos de sus puntos, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se calcula así:

$m = \boxed{}$

EJEMPLO: La pendiente de la recta que pasa por (0, 1) y (2, 5) es: $m =$ ....

ECUACIÓN DE UNA RECTA

Ecuación punto-pendiente:

- Si de una recta conocemos su pendiente, m, y un punto, (x_1, y_1), su ecuación es: $y =$ ....

EJEMPLO: Ecuación de la recta que pasa por (2, 5) con pendiente –2: $y =$ ....

Forma general de la ecuación de una recta

- Operando, cualquier ecuación de una recta puede ponerse en la forma $\boxed{}x + \boxed{}y = \boxed{}$.
  - — Cuando $\boxed{} \neq 0$ y $\boxed{} = 0$, la recta es paralela al eje Y.
  - — Cuando $\boxed{} \neq 0$, la recta corresponde a una función (funciones lineales).

EJEMPLO: Forma general de la recta de ecuación $y = 5 - \frac{2}{3}(x + 2)$: $\boxed{}x + \boxed{}y = \boxed{}$

ESTUDIO CONJUNTO DE DOS FUNCIONES

- Para hallar analíticamente el punto de corte de dos funciones, se resuelve el sistema formado por ....

EJEMPLO: Las funciones $3x + 2y = -5$ y $-x + y = 1$ se cortan en el punto de coordenadas:

$x =$ .... $y =$ ....

Funciones lineales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Cuando caminamos, al mismo ritmo, recorremos 12 m en 8 segundos.

a) Representa en una tabla la relación x (tiempo en segundos) con y (metros recorridos). Halla y para $x = 1, 2, 3, 4$.

b) ¿Cuántos metros recorremos en 4 segundos? ¿Y en un segundo?

c) Escribe la expresión algebraica que relaciona y con x.

d) Representa gráficamente la función $y = f(x)$. ¿Cuál es su pendiente?

2 Representa gráficamente las siguientes funciones lineales:

a) $y = 3x$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = -2x + 1$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ELASTICIDAD DE LOS MUELLES

De entre tres muelles, A, B, C, de 10 cm cada uno, pero de distinto metal, queremos elegir el que soporte más peso sin estirarse (deformarse) mucho.

Usamos pesos desde 1 a 5 kg. El muelle A se estira 2 cm cada kilo que colguemos. El muelle B se estira 1 cm por cada kilo y el C se estira 1 cm por cada 2 kg que colguemos.

1 Construye para cada muelle una tabla que relacione y (cm de longitud del muelle) con x (kg colgados).

a)

x	0	1	2	3
y	10			

b)

x	0	1	2	3
y	10			

c)

x	0	1	2	3
y	10			

2 Construye las tres gráficas (x, y) en los mismos ejes.

3 ¿Qué muelle es el más resistente (soporta más peso estirándose menos)?

4 Cada muelle se romperá cuando se estire un máximo de 15 cm. ¿Para qué valor de x (kg) se rompe cada muelle?

Ficha de trabajo B

Funciones lineales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 a) Representa gráficamente la relación y (€) con x (kg).

x (kg)	1	2	3	4	5
y (€)	0,5	1	1,5	2	2,5

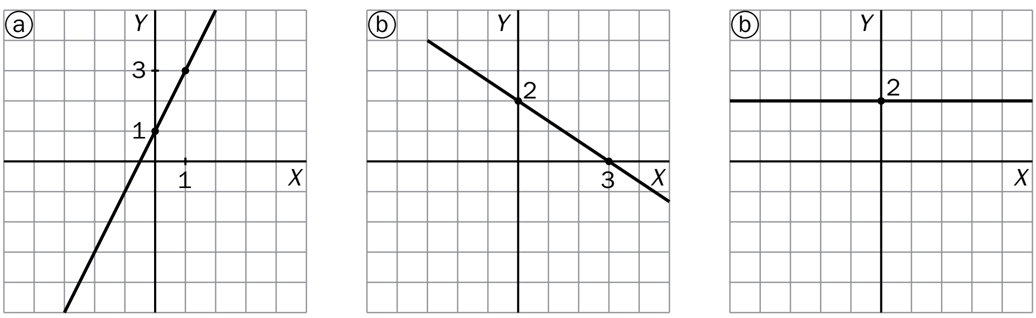
b) ¿Cuál es la expresión algebraica de esta relación?

c) ¿Cuál es la pendiente de la función?

2 Representa la función $y = 3x + 2$. ¿Cuál es su pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?

3 Escribe la ecuación de la recta que pasa por $A(2, 4)$ y $B(-1, -2)$. ¿Cuál es su pendiente? Represéntala gráficamente.

4 Observa estas gráficas, encuentra la pendiente y la ordenada en el origen y escribe la ecuación de cada recta.



Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA GRAN ETAPA DE UN CICLISTA CAMPEÓN

Se celebra la etapa de montaña entre las localidades de *Mourier* y *Rengón* (M y R), de 180 km. El perfil de esa etapa (relación de la altura sobre el nivel del mar con el kilómetro del recorrido) viene dado en esta gráfica:

1 ¿Cuál es la cima *Pantani* (mayor altura)? ¿En qué kilómetro del recorrido se encuentra?

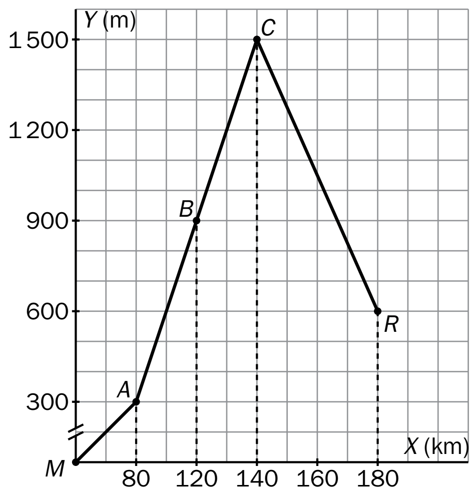
El ganador fue Emil Trepa. La carrera se desarrolló así:

Tramo MA: pelotón (40 km/h)

Tramo AB: Emil y 8 corredores (v = 20 km/h)

Tramo BC: Emil solo (v = 10 km/h)

Tramo CR: Emil solo (v = 40 km/h)



2 Halla las gráficas de las funciones lineales espacio, e, y tiempo, t, del ganador en cada tramo del recorrido.

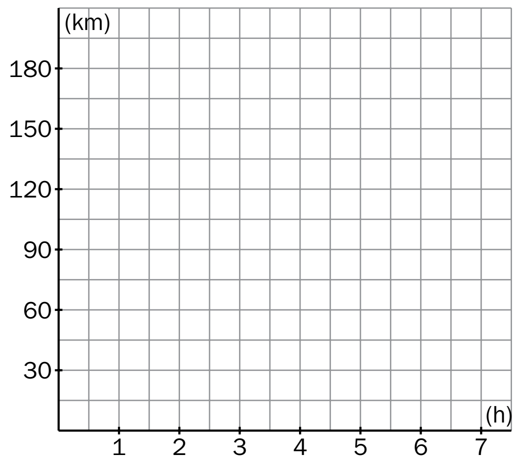
MA 40 km/h	t	1	
	e	40	

AB 20 km/h	t			
	e	80		120

BC 10 km/h	t			
	e	120		140

CR 40 km/h	t		
	e	140	

¿Cuál es la pendiente de esta gráfica en cada tramo?



3 ¿Qué relación tiene este dato con la velocidad de cada tramo?

4 ¿Cuánto tiempo tardó Emil en ascender a C? ¿Y en descender?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a)

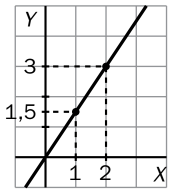
x	1	2	3	4	…	8
y	1,5	3	4,5	6	…	12

b) En 4 s recorremos 6 m.

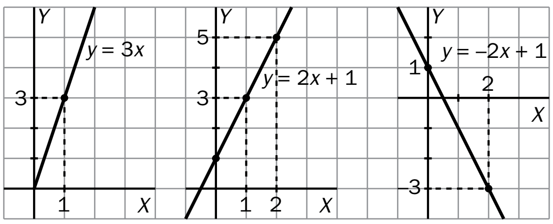
En 1 s recorremos 1,5 m.

c) $y = 1{,}5x$

d) pendiente = 1,5 = 3/2



2



APLICA

1 a)

x	0	1	2	3	4	5
y	10	12	14	16	18	20

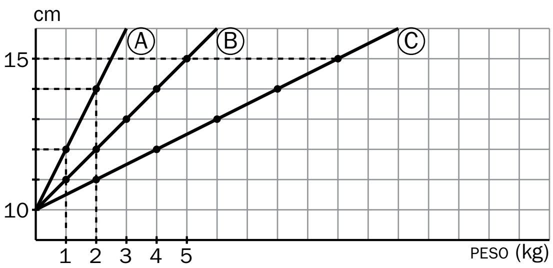
b)

x	0	1	2	3	4	5
y	10	11	12	13	14	15

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	10	10,5	11	11,5	12	12,5

2



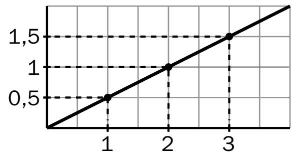
3 El muelle más resistente es el C.

4 A) se rompe con 3 kg.
B) se rompe con 5 kg.
C) No se rompe.

Ficha de trabajo B

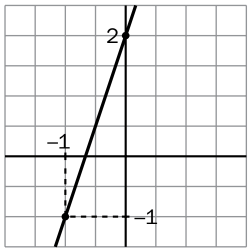
PRACTICA

1 a)



b) $y = 0{,}5x$ c) $m = 0{,}5 = 1/2$

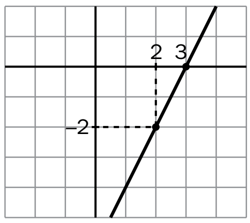
2



$m = \frac{3}{1} = 3$

$n = 2$

3



$m = \frac{-2-4}{-1-2} = 2$

$y - 2 = 2(x - y)$

$y = 2x - 6$

4 a) $m = 2$; $n = 1$; $y = 2x + 1$

b) $m = -2/3$; $n = 2$; $y = (-2x/3) + 2$

c) $m = 0$; $n = 2$; $y = 2$

APLICA

1 La cima Pantani está en el kilómetro 140 y tiene una altura de 1 500 m.

2

MA	t	1	2
	e	40	80

AB	t	2	3	4
	e	80	100	120

BC	t	4	5	6
	e	120	100	120

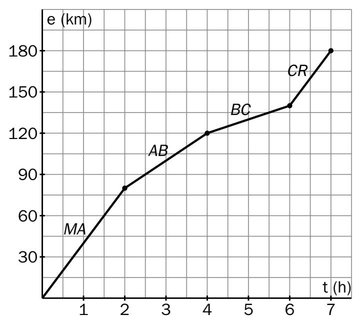
CR	t	6	7
	e	140	180

$m_{MA} = 40$

$m_{AB} = 20$

$m_{BC} = 10$

$m_{CR} = 40$



3 Corresponden a las velocidades.

4 En llegar a C tardó 6 horas, y en descender, 1 h.

Problemas métricos en el plano

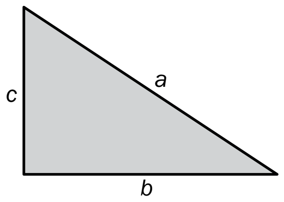
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

GEOMETRÍA MÉTRICA PLANA

TEOREMA DE PITÁGORAS

Se verifica en los triángulos.........................



$a^2 = \boxed{}$

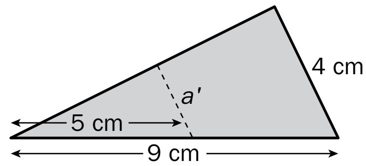
EJEMPLO: Si en un cono la generatriz mide 3,9 dm, y la altura, 3,6 dm, entonces el radio de la base mide:

$r =$ ....

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si sus lados son .... y sus ángulos respectivamente .... Para verificarlo, basta comprobar que tienen $\boxed{}$ .... iguales.

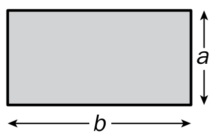
EJEMPLO:



$a' = \boxed{}$ cm

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Rectángulos de lados a y b:

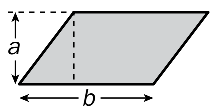


$A =$ ....

EJEMPLO: $a = 3$ cm, $b = 7$ cm

$A =$ ....

Paralelogramo de base b y altura a:

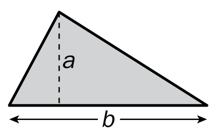


$A =$ ....

EJEMPLO: $a = 7$ cm, $b = 20$ cm

$A =$ ....

Triángulo de base b y altura a:

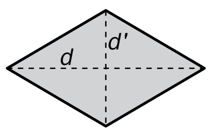


$A =$ ....

EJEMPLO: $a = 2$ dm, $b = 5$ dm

$A =$ ....

Rombo de diagonales d y d':

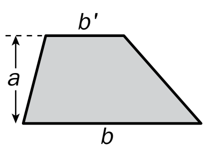


$A =$ ....

EJEMPLO: $d = 15$ m, $d' = 12$ m

$A =$ ....

Trapecio de bases b y b' y altura a:

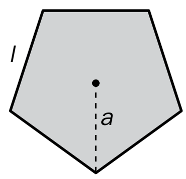


$A =$ ....

EJEMPLO: $b = 7$ cm, $b' = 11$ cm
$a = 4$ cm

$A =$ ....

Polígono regular de lado l y apotema a:

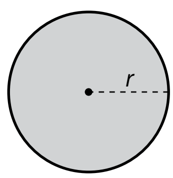


$A =$ ....

EJEMPLO:
Hexágono, $l = 10$ m

$A =$ ....

Círculo de radio r:

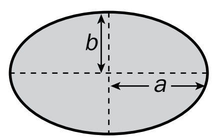


$A =$ ....

EJEMPLO: $r = 3,2$ cm

$A =$ ....

Elipse de ejes $2a$ y $2b$:



$A =$ ....

EJEMPLO: $a = 5$ m; $b = 3$ cm

$A =$ ....

Problemas métricos en el plano

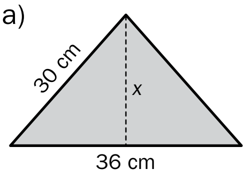
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

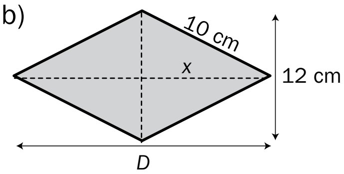
PRACTICA

1 Calcula el área de estas figuras. Halla, previamente, el elemento que falta aplicando el teorema de Pitágoras.

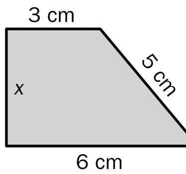
a)



b)

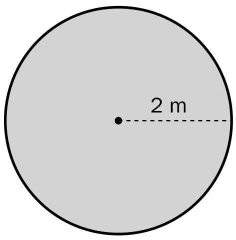


c)

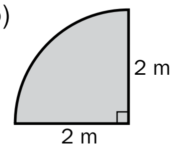


2 Calcula el área y la longitud de estas figuras:

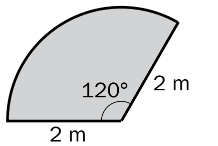
a)



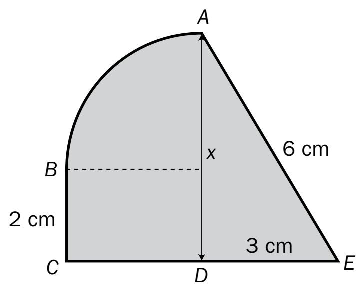
b)



c)



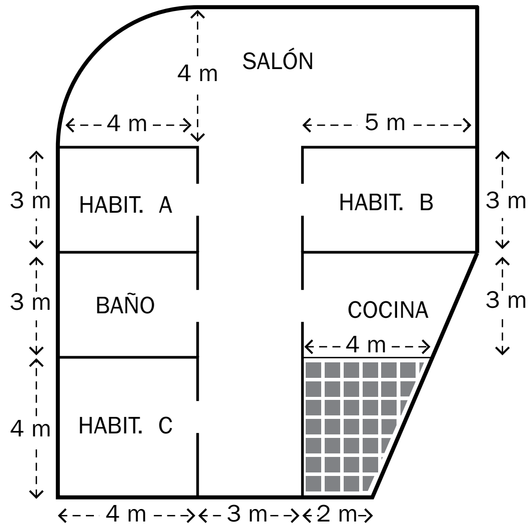
3 Calcula el área y el perímetro de esta figura. Descomponla para ello en figuras más simples.



Nombre y apellidos: ....

APLICA. EMBALDOSANDO UNA VIVIENDA

Para embaldosar esta vivienda, hemos elegido por catálogo los tipos de suelos y precios que ves en la tabla:



PASILLO Y HABITACIONES	Gres ocre 0,20 m × 0,20 m	20 €/m^2
SALÓN	Gres blanco 0,40 m × 0,40 m	30 €/m^2
BAÑO Y COCINA	Gres rojo 0,30 m × 0,30 m	12 €/m^2
TERRAZA	Baldosín arcilla 0,15 m × 0,15 m	10 €/m^2

1 Calcula la superficie de cada estancia de la casa.

SALÓN	HABITACIÓN A	HABITACIÓN B	BAÑO
COCINA	HABITACIÓN C	TERRAZA	PASILLO

2 ¿Cuál es el presupuesto para embaldosar toda la vivienda?

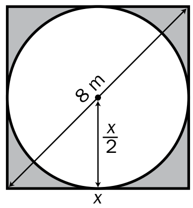
Problemas métricos en el plano

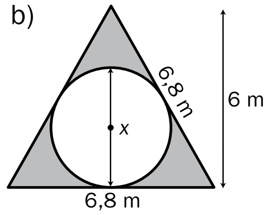
Nombre y apellidos: ....

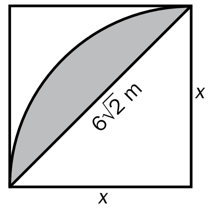
Curso: .... **Fecha:** ....

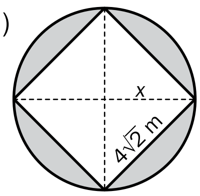
PRACTICA

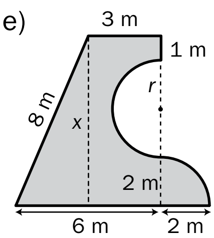
1 Calcula el área de la parte sombreada de cada figura (calcula x previamente):

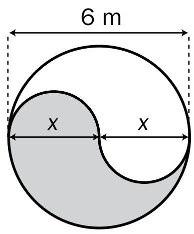
a) 

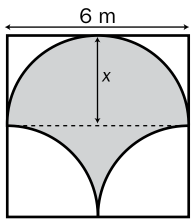
b) 

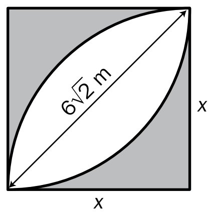
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

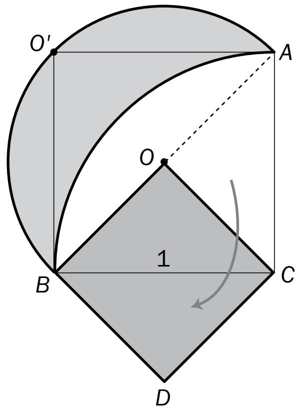
Consulta el apartado c) de este mismo ejercicio.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA PRIMERA "CUADRATURA"

Cuadrar el círculo (es decir, construir un cuadrado usando regla y compás, con la misma área que el círculo) fue un problema que obsesionó a los geómetras griegos del siglo V a.C.

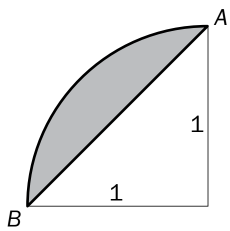
En vano. Hasta la fecha, nadie lo ha conseguido. Pero, en los esfuerzos por hacerlo, Hipócrates de Chíos (428 a.C.) pudo "cuadrar la luna": demostró que el área de la lúnula *AO'B* (véase figura) es la misma que la del triángulo *ABC* (y, por tanto, equivalente al cuadrado *OBCD*).



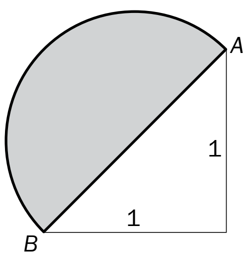
¿Te atreves a demostrarlo? Voy a ayudarte.

1 Calcula el área del triángulo *ABC*.

2 Halla el área del segmento circular tramado en esta figura:



3 Halla ahora el área del semicírculo de diámetro *AB*.



4 Calcula, finalmente, el área de la lúnula *AO´B* aplicando los resultados que obtuviste en los ejercicios 2 y 3. ¿Es igual al área que calculaste en el ejercicio 1?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $x = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ cm

$A = 432$ cm^2

b) $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$A = 96$ cm^2

c) $x = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm

$A = 18$ cm^2

2 a) $A = 12{,}56$ cm^2; $L = 12{,}56$ cm

b) $A = 3{,}14$ cm^2; $L = 3{,}14$ cm

c) $A = 4{,}19$ cm^2; $L = 4{,}19$ cm

3 $x = \sqrt{36 - 9} \approx 5{,}2$ cm

$A = 21{,}4$ cm^2; $P = 19$ cm

APLICA

1 SALÓN: 44,56 m^2

HABITACIÓN A: 12 m^2

HABITACIÓN B: 15 m^2

HABITACIÓN C: 16 m^2

COCINA: 13,5 m^2

TERRAZA: 12 m^2

PASILLO: 30 m^2

BAÑO: 12 m^2

2 Presupuesto:

$44{,}56 \cdot 30 + (30 + 12 + 15 + 16) \cdot 20 + (12 +$
$+ 13{,}5) \cdot 12 + 12 \cdot 10 = 3\,222{,}8$ euros

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $x = 5{,}7$ m

$A = 32 - 25{,}5 = 6{,}5$ m^2

b) $x = (2/3)$ de $6 = 4$ m

$$A = \frac{6{,}8 \cdot 6}{2} - \pi \cdot 2^2 = 7{,}83 \text{ m}^2$$

c) $x = 6$ m

$$A = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} - \frac{6 \cdot 6}{2} = 10{,}27 \text{ m}^2$$

d) $x = 4$ m

$A = \pi \cdot 4^2 - 32 = 18{,}27$ m^2

e) $x = 7{,}4$ m

$$A = \frac{(6 + 3) \cdot 7{,}4}{2} + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2{,}2^2}{2} \approx$$

$\approx 28{,}84$ m^2

f) $x = 3$ m

$$A = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 14{,}14 \text{ m}^2$$

g) $x = 3$ m

$$A = 14{,}13 + 2 \cdot \left(9 - \frac{\pi \cdot 3^2}{4}\right) \approx 18 \text{ m}^2$$

h) $A = 36 - 2 \cdot 10{,}27 = 15{,}46$ m^2

APLICA

1 $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}$

2 $\dfrac{\pi \cdot 1^2}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

3 El radio del semicírculo es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

4 El área de la lúnula es:

$A_{\text{LÚNULA}} = \dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, la misma que la del triángulo ABC.

Cuerpos geométricos

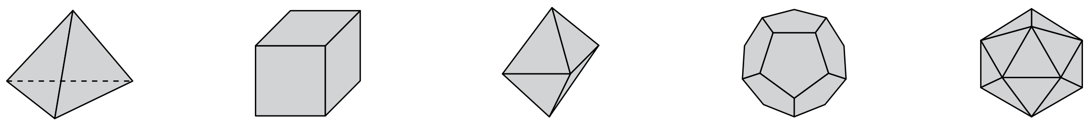
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FIGURAS EN EL ESPACIO

POLIEDROS REGULARES Y SEMIRREGULARES

- Un poliedro es regular si sus caras son .... y en cada vértice concurren el mismo número de ....

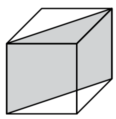


TETRAEDRO	....	....	....	....
4 caras,	☐ caras,	☐ caras,	☐ caras,	☐ caras,
triángulos	....	....	....	....

- Se llama poliedro .... a aquel cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos y tal que en todas las .... concurren los mismos polígonos.

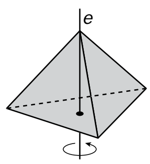
SIMETRÍAS

- Planos de ....: dividen al poliedro en dos poliedros idénticos.

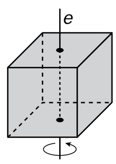


Tiene ☐ planos de simetría.

- Ejes de simetría de orden n: la figura gira en torno a él y ocupa ...... veces la misma posición.

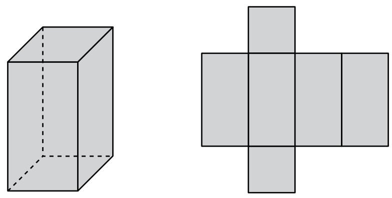


Eje de orden ☐



Eje de orden ☐

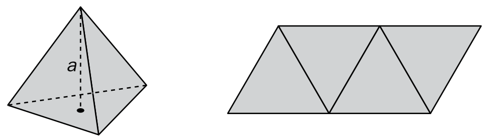
ÁREAS Y VOLÚMENES



PRISMAS

ÁREA = SUMA de ÁREAS de sus CARAS

VOLUMEN = $A_{BASE} \cdot$ ALTURA



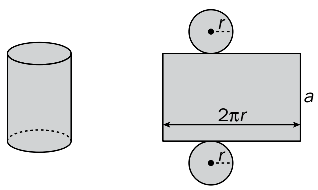
PIRÁMIDES

ÁREA = SUMA de ÁREAS de las CARAS

VOLUMEN = ☐

CUERPOS REDONDOS

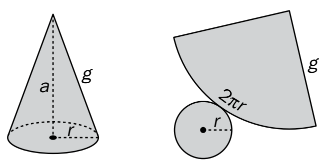
CILINDRO



$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A_{LATERAL}} + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A_{BASES}}$

$V = A_{BASE} \cdot$ ALTURA = ...

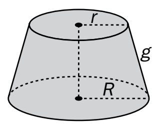
CONO



$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A_{LATERAL}} + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A_{BASE}}$

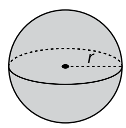
$V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{ALTURA}}{3} = \boxed{}$

TRONCO DE CONO



$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{LATERAL} + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{BASES}$

ESFERA



$A = \boxed{}$ $V = \boxed{}$

Cuerpos geométricos

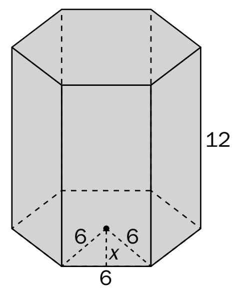
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

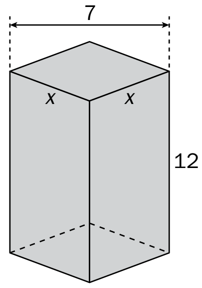
PRACTICA

1 Calcula el área lateral (A_{LAT}), el área total (A_{TOTAL}) y el volumen de los siguientes cuerpos. Halla primero el valor de x y el de h cuando se necesiten. (Todas las medidas están dadas en centímetros).

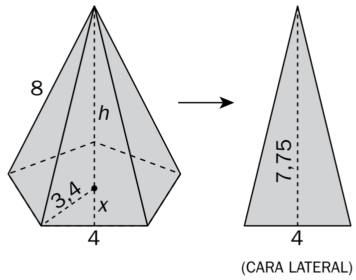
a)



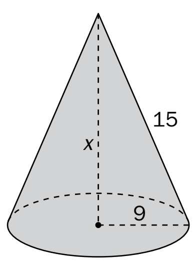
b)



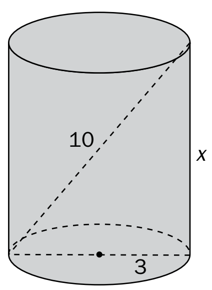
c)



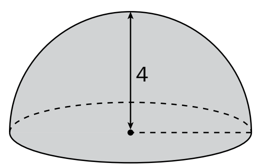
d)



e)



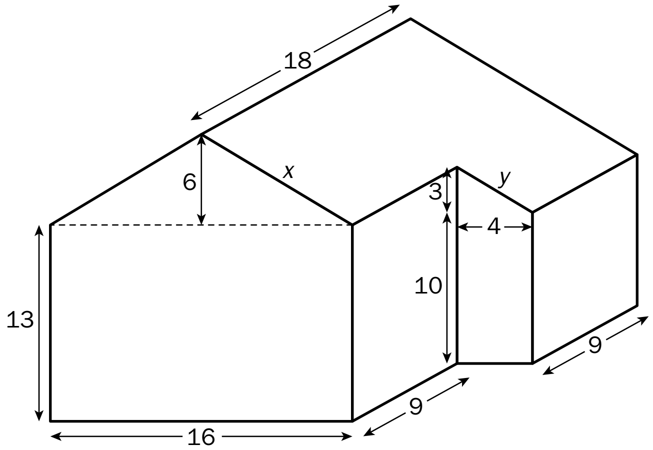
f)

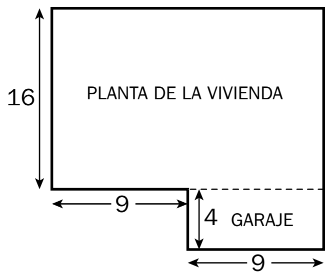


Nombre y apellidos: ....

APLICA. ARREGLOS EN LA CASA RURAL

Antes de iniciar las obras de su casa, Alicia ha hecho estos planos con las medidas que ha podido tomar directamente. (Todas las medidas están dadas en metros).





1 Quiere embaldosar toda la planta baja (garaje incluido) con un tipo de baldosa que sale a 10 euros cada metro cuadrado. ¿Cuál será el coste de todo el material que necesita?

2 Arreglar el tejado de la casa y del garaje sale a 14 €/m^2. ¿Cuál será el coste de esa partida?

3 Para colocar radiadores en toda la casa, necesita saber su volumen, ya que debe colocar un radiador por cada 100 m^3. ¿Cuántos de estos elementos necesita y cuál será el presupuesto si el precio de cada radiador es de 60 €?

Cuerpos geométricos

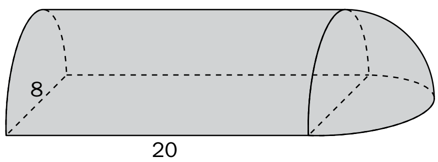
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

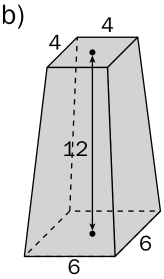
PRACTICA

1 Calcula el área total (A_{TOTAL}) de los siguientes cuerpos (medidas en centímetros):

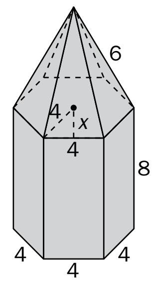
a)



b)

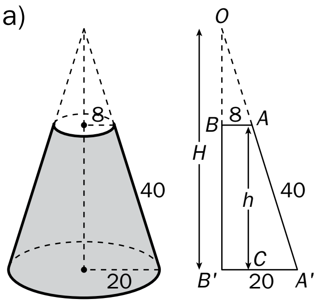


c)

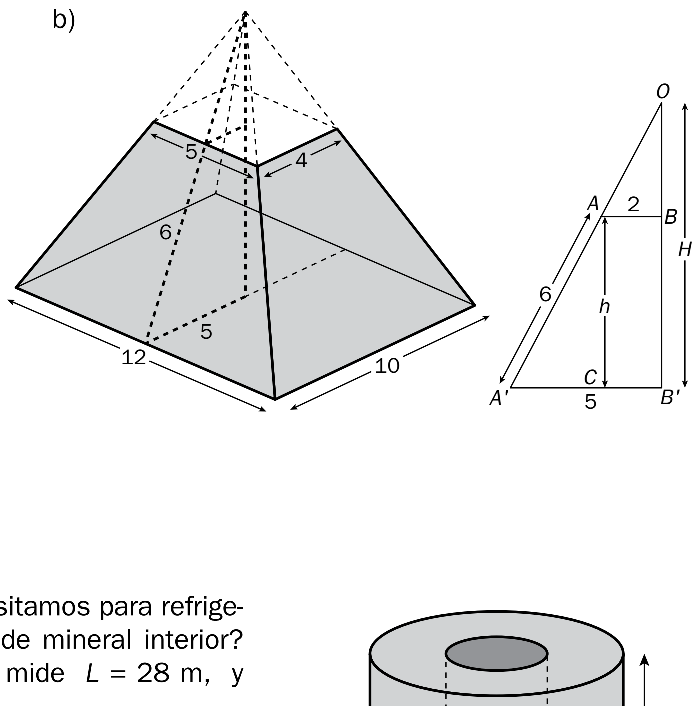


2 Calcula el volumen de estas figuras truncadas. Observa los dibujos: tendrás que utilizar la semejanza de triángulos para hallar algunas medidas (todas en centímetros).

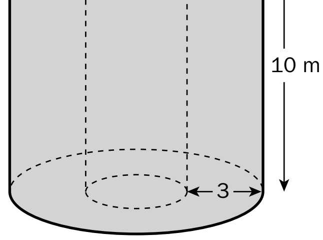
a)



b)



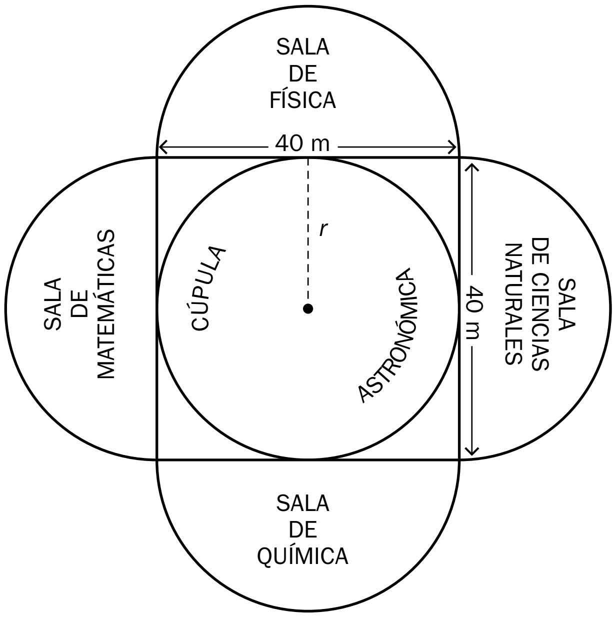
3 ¿Qué cantidad de agua necesitamos para refrigerar exteriormente el cilindro de mineral interior? La circunferencia de la base mide $L = 28$ m, y recuerda que $1\ l = 1\ dm^3$.

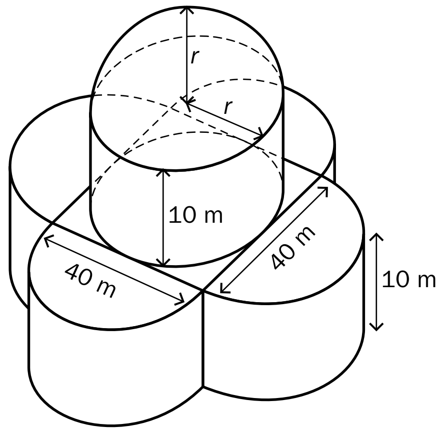


Nombre y apellidos: ....

APLICA. MUSEO DE LAS CIENCIAS

En cierta ciudad se quiere construir un Museo de las Ciencias. El proyecto aprobado consta de cuatro salas semicirculares de 20 m de radio y 10 m de altura, un recinto cuadrado central de 40 m de lado y, encima de él, una pieza cilíndrica de radio r, rematada por una cúpula acristalada de radio r.





1 Calcula el valor de r de la pieza central.

2 ¿Qué superficie, en metros cuadrados, ocupará todo el recinto?

3 En el proyecto está previsto acristalar con lunetas todos los laterales y la cúpula. Si el acristalamiento cuesta a 25 €/m^2, ¿cuál será el coste?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $x = 2$ cm

$A_{LAT} = 432$ cm^2; $A_{TOT} = 619{,}2$ cm^2

$V = 2\,244{,}7$ cm^3

b) $x = 4{,}95$ cm ≈ 5 cm

$A_{LAT} = 240$ cm^2; $A_{TOT} = 290$ cm^2

c) $x = 2{,}75$ cm; $h = 7{,}25$ cm

$A_{LAT} = 77{,}5$ cm^2; $A_{BASE} = 27{,}5$ cm^2

$A_{TOT} = 105$ cm^2

$V = 66{,}4$ cm^3

d) $x = 12$ cm

$A_{LAT} = \pi \cdot r \cdot g = 424$ cm^2

$A_{BASE} = \pi \cdot r^2 = 254{,}34$ cm^2

$A_{TOT} = 678{,}34$ cm^2

$V = 1\,017{,}36$ cm^3

e) $x = 8$ cm

$A_{LAT} = 150{,}8$ cm^2; $A_{BASES} = 56{,}55$ cm^2

$A_{TOT} = 207{,}35$ cm^2

$V \approx 226$ cm^3

f) $A_{SEMIESFERA} = 100{,}48$ cm^2

$V_{SEMIESFERA} \approx 134$ cm^3

APLICA

1 $A_{PLANTA} = 324$ m^2

Coste = 3 240 €

2 $x = 10$ m; $y = 5$ m

$A_{TEJADO} = 405$ m^2

Coste total → 5 670 €

3 $V = 5\,022$ m^3

Necesita 51 radiadores.

Coste radiadores → 3 060 €

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $A_{TOT} = 511{,}68$ cm^2

b) Altura de una cara: $a = 12{,}04$ cm

$A_{LAT} = 240{,}8$ cm^2

$A_{BASES} = 52$ cm^2

$A_{TOT} = 292{,}8$ cm^2

c) Altura de una cara triangular: $a = 5{,}66$ cm

$A_{LAT} = 259{,}92$ cm^2

$x = 3{,}46$ cm

$A_{BASE} = 41{,}52$ cm^2

$A_{TOT} = 301{,}44$ cm^2

2 a) $h = 38{,}16$ cm

$\frac{20}{H} = \frac{12}{h} \rightarrow H = 63{,}6$ cm

$H - h = 25{,}44$ cm

$V = 24\,935{,}7$ cm^3

b) $V = 323{,}733$ cm^3

3 $V_{AGUA} = 557\,700$ dm^3 = 557 700 *l*

APLICA

1 $r = 20$ m

2 4 113,27 m^2

3 6 283,18 · 25 = 157 079,5 €

Transformaciones geométricas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

MOVIMIENTOS

Un **movimiento** es una transformación en el plano en la cual todas las figuras mantienen ....
....

En un movimiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera, P y Q, permanece ....

Es decir, si $P \to P'$ y $Q \to Q'$, entonces $\overline{PQ}$ = ...

Se dice que un punto o una figura es **invariante** o **doble** en un movimiento cuando se transforma en
....

Traslaciones

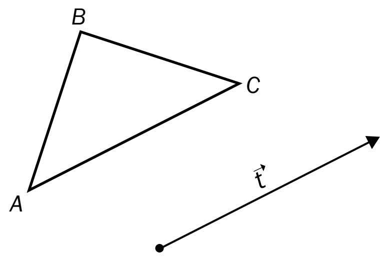
Se llama **traslación T** según el vector $\vec{t}$ a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro punto P' tal que

$\overline{PP'}$ = ...

Puntos dobles: ....

Figuras dobles: ....
....
....

Dibuja el resultado de trasladar este triángulo según las traslación del vector $\vec{t}$. Nombra sus vértices.



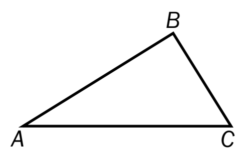
Giros

Se llama **giro G de centro *O* y ángulo** α a una transformación...
....

Puntos dobles: ....

Figuras dobles: ....
....
....

Dibuja el resultado de aplicar a este triángulo un giro de centro C y ángulo 90°, según el movimiento de las agujas del reloj.



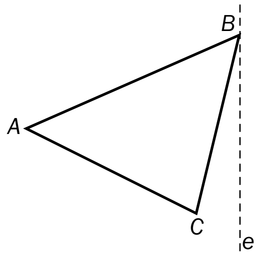
Simetrías

Se llama **simetría *S* de eje *e*** ....
....

Puntos dobles: ....
....

Figuras dobles: ....
....
....

Dibuja el resultado de aplicarle al triángulo una simetría de eje e.



Transformaciones geométricas

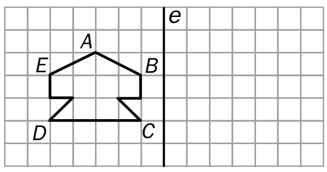
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

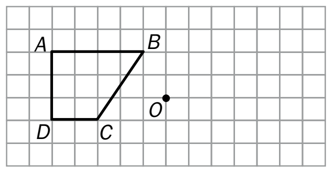
PRACTICA

1 Dibuja la figura simétrica de a) respecto al eje *e* y la de b) respecto al punto *O*.

a)

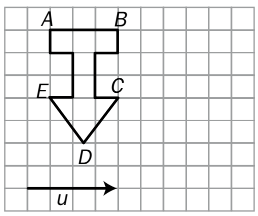


b)

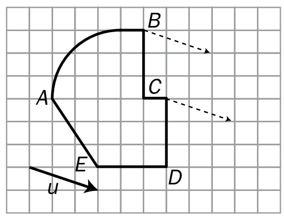


2 Dibuja la figura trasladada de a) según el vector de traslación $\vec{u}$ y la trasladada de b) según el vector $\vec{v}$.

a)

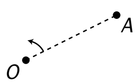


b)

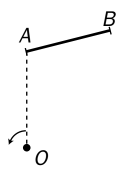


3 Dibuja las siguientes figuras después de efectuar sobre ellas un giro de centro O y ángulo, el indicado en cada caso.

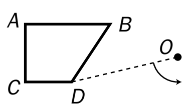
a) El punto *A*, un ángulo de 30°.



b) El segmento *AB*, un ángulo de 90°.



c) El trapecio *ABCD*, un ángulo de 30°.

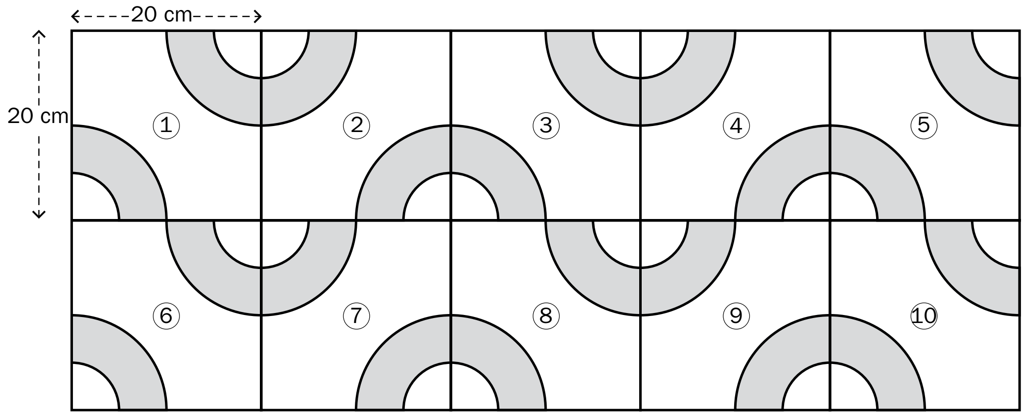


Si comparas el movimiento 1-b) con el 3-c), ¿qué descubres?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. FRISOS Y MOSAICOS

Para estudiar los movimientos en el plano, el profesor de Matemáticas de 3.º de ESO lleva a sus alumnas y alumnos a una exposición. A Juan le toca estudiar varias cuestiones de esta composición:



1 ¿Qué movimiento transforma la baldosa 1 en la 2? ¿Y la 1 en la 3?

2 ¿Cómo se pasa de la baldosa 1 a la 6? ¿Y de la 6 a la 7?

3 ¿Cuántas baldosas necesitaremos, al menos, para cubrir 1 m^2?

Si queremos alicatar un cuarto de baño con forma de ortoedro de dimensiones 6 m × 4 m × 3 m, ¿cuántas de estas baldosas necesitaremos?

Transformaciones geométricas

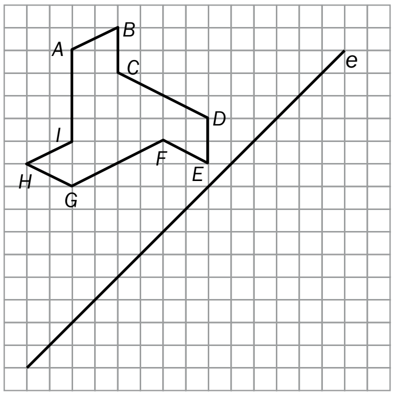
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

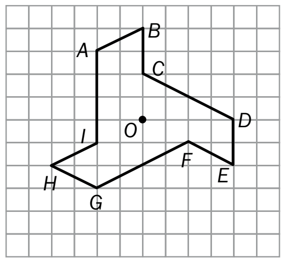
PRACTICA

1 Construye la figura simétrica de cada una de estas en los casos que se indica:

a) Respecto al eje *e*.



b) Respecto al punto *O*.

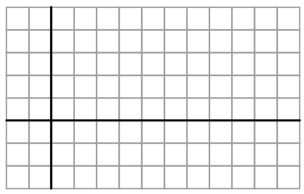


2 Considera el triángulo de vértices *O*(0, 0), *A*(1, 3) y *B*(4, –1).

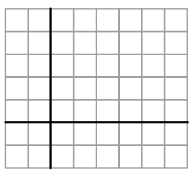
a) Represéntalo.

b) Dibuja el triángulo *O'A'B'* trasladando el anterior según el vector $\vec{u}(5, 1)$.

c) ¿Qué coordenadas tienen los vértices del triángulo *O'A'B'*?



3 Considera el cuadrado de vértices *O*(0, 0), *A*(3, –1), *B*(1, 3) y *C*(4, 2). Dibuja el cuadrado *O'A'B'C'* que resulta al girar *OABC* un ángulo de –180° con centro en *O*.



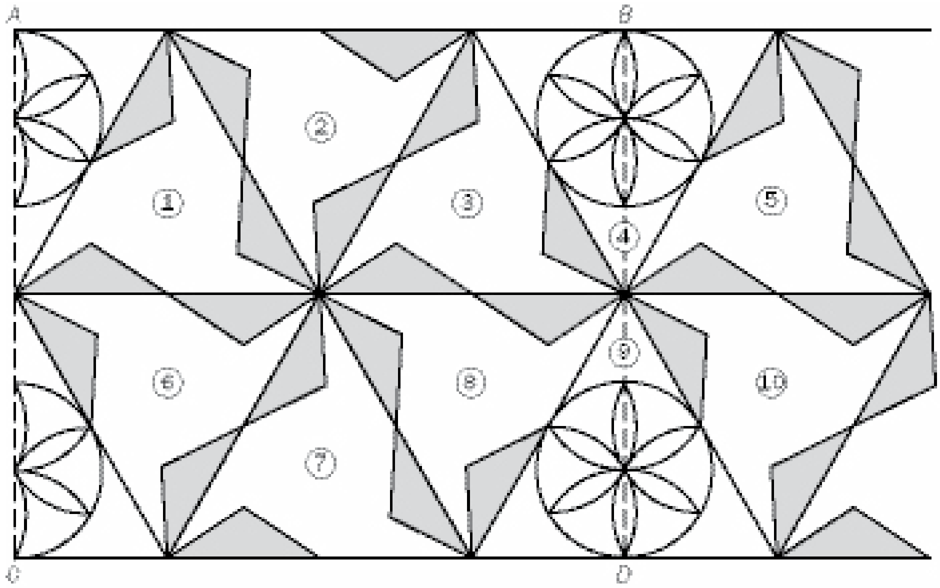
a) ¿Cuáles son las coordenadas de nuevo cuadrado *O'A'B'C'*?

b) ¿Cómo son las dos figuras entre sí?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. FRISOS Y MOSAICOS

Para estudiar los movimientos en el plano, el profesor de 3.º de ESO decide llevar a sus alumnas y alumnos a ver los mosaicos del palacio árabe del pueblo de Juan. A este le toca estudiar varias cuestiones sobre esta composición, que se puede ver en una de las estancias del palacio:



1 ¿A partir de qué polígono regular se obtienen las dos baldosas que forman el enlosado?

2 ¿Qué movimiento transforma la baldosa 1 en la 6? ¿Y la 1 en la 3?

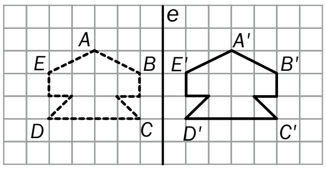
3 ¿Cómo se puede pasar de la baldosa 1 a la 8? ¿Qué relación hay entre este movimiento y los movimientos sucesivos 1 → 2 → 3 → 8?

Soluciones

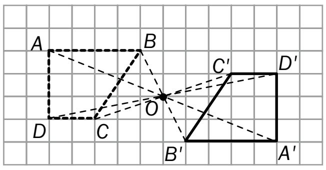
Ficha de trabajo A

PRACTICA

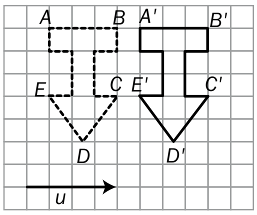
1 a)



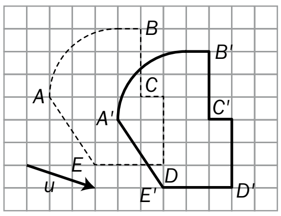
b)



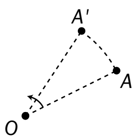
2 a)



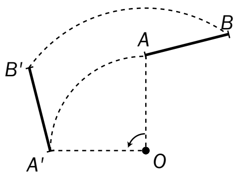
b)



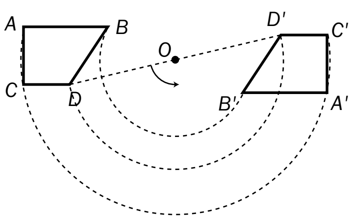
3 a)



b)



c)



Los movimientos 1-b) y 3-c) son equivalentes.

APLICA

1 ① → ② Simetría (eje) ① → ③ Traslación

2 ① → ⑥ Simetría (centro)

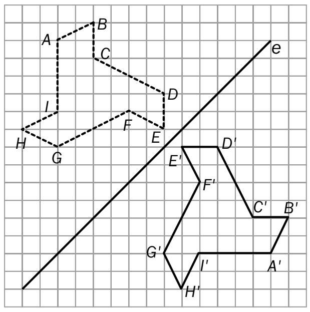
⑥ → ⑦ Simetría (eje)

3 25 baldosas; 2 100 baldosas para el baño.

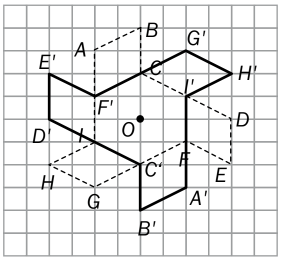
Ficha de trabajo B

PRACTICA

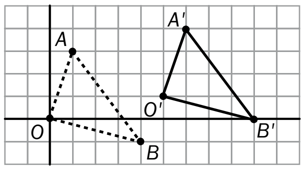
1 a)



b)

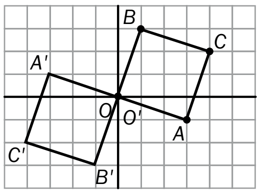


2



$O'(5, 1)$
$A'(6, 4)$
$B'(9, 0)$

3



a) $A'(3, 1)$; $B'(-1, -3)$; $C'(-4, -2)$

b) Las figuras son simétricas respecto a O.

APLICA

1 El triángulo equilátero.

2 ① → ⑥ Giro de 60° ① → ③ Traslación

3 ① y ⑧ son simétricos respecto al punto de corte (vértice) entre ambos. Este movimiento equivale a hacer:

① → ② Giro de 60°

② → ③ Giro de 60°

③ → ⑧ Giro de 60°

Giro de 180° de ① a ⑧.

Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ESTADÍSTICA

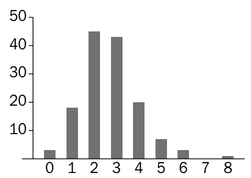
POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLES

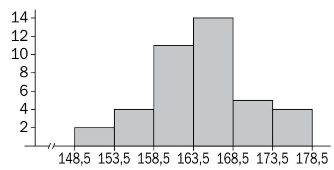
- Una **población** es ....
  ....
  EJEMPLO:
- Una **muestra** es ....
  ....
  EJEMPLO:
- Un **individuo** es ....
  ....
  EJEMPLO:

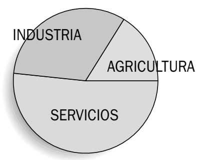
- Las variables numéricas se llaman ....
  .... y pueden ser de dos tipos:
  a) ....
  EJEMPLO:
  b) ....
  EJEMPLO:
- Las variables no numéricas se llaman ....
  ....
  EJEMPLO:

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Pon nombre a estos gráficos y asocia a cada uno de ellos el tipo de variable para el que se suele utilizar:







....
....

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Medidas de centralización

- La **media** se calcula así: $\bar{x} = \boxed{}$
  EJEMPLO: 3, 2, 3, 1, 4, 5 $\to \bar{x} =$ ....
- Si ordenamos los datos de menor a mayor, la **mediana** es ....
  EJEMPLO: 3, 2, 3, 1, 4, 5 $\to Me =$ ....
- La **moda** es ....
  EJEMPLO: 3, 2, 3, 1, 4, 5 $\to Mo =$ ....

Medidas de dispersión

- **Desviación media:**
  $DM = \boxed{}$
- **Desviación típica** (raíz cuadrada de la ....):
  $\sigma = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \boxed{}$
- **Coeficiente de variación:**
  $CV = \boxed{}$

Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Indica en cada caso si la variable que se estudia, para un cierto grupo de alumnas y alumnos, es cualitativa o cuantitativa:

a) Número de horas diarias que ven la televisión.

b) Deporte preferido.

c) Número de libros que leen al año.

d) Tipo de libros que leen.

2 Completa la siguiente tabla de frecuencias para una variable X ("Número de hijos por matrimonio o pareja") en una muestra de 50 parejas de una localidad.

x_i	f_i	$fr_i = f_i/n$	F_i	Fr_i
0	8			
1	12			
2	14			
3	8			
4	6			
5	2			
	$n = 50$			

Siendo:

f_i: frecuencia absoluta de cada dato x.

fr_i: frecuencia relativa de x_i.

F_i: frecuencia absoluta acumulada.

Fr_i: frecuencia relativa acumulada.

a) ¿Cuántas parejas (en %) tienen menos de 3 hijos?

b) ¿Qué porcentaje de parejas tienen un hijo o más?

c) ¿Qué porcentaje de parejas tienen entre 1 y 3 hijos (ambos incluidos)?

3 a) Halla la media $(\bar{x})$, la moda (Mo) y la mediana (Me) de la anterior distribución.

b) ¿Cuál es la desviación media?

c) ¿Cuál es la desviación típica?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ¿QUÉ EQUIPO ES MÁS REGULAR METIENDO GOLES?

Los goles metidos por los dos primeros equipos clasificados en una liga de 38 partidos se han distribuido así:

EQUIPO A

GOLES	N.° DE PARTIDOS
1	5
2	11
3	12
4	5
5	3
6	2
	$n = 38$

EQUIPO B

GOLES	N.° DE PARTIDOS
1	5
2	18
3	10
4	3
5	2
	$n = 38$

1 Halla el promedio $(\bar{x})$ de goles y completa las tablas:

EQUIPO A

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
1	5		
2	11		
3	12		
4	5		
5	3		
6	2		

EQUIPO B

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
1			
2			
3			
4			
5			

2 Calcula la mediana y la moda en cada caso.

3 Calcula la desviación media para cada equipo.

4 Calcula la desviación típica en ambos casos.

5 Según el apartado 3, ¿qué equipo es más regular goleando? (Su número de goles se aleja menos del valor medio).

Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 La altura media de 4 hombres es 1,80 m, y la de 6 mujeres, 1,70 m. Calcula:

a) Suma de alturas de los cuatro hombres.

b) Suma de alturas de las seis mujeres.

c) Altura media de todo el grupo de hombres y mujeres.

2 Hemos analizado la sangre de 30 pacientes diabéticos para medir su cantidad de azúcar en sangre (valor de referencia normal, 1). Se han obtenido estos resultados:

0,8	0,8	0,9	0,8	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,6
1,1	1,3	1,2	1,5	1,6	1,2	0,8	0,8	0,9	0,9
1,4	1,4	1,5	1,3	1,1	0,8	0,9	0,9	1	1,2

a) ¿Cuál es el rango de la distribución?

b) Agrupa los datos en cuatro intervalos de longitud 0,2 con sus correspondientes marcas de clase, según la tabla. Halla $\bar{x}$ y completa la tabla.

	x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
0,8 - 1				

c) Halla la desviación media.

d) Halla la desviación típica.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA CLASE MÁS DEPORTISTA

Analizamos los hábitos deportivos de dos clases, A y B, de 3.° ESO, de 32 alumnos cada una. Los datos quedan reflejados en estas tablas:

x_i (h/SEMANA)	f_i (ALUMNOS)	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert^2$
0	5		
1	7		
2	10		
5	6		
7	4		
CLASE 3.° A			

x_i (h/SEMANA)	f_i (ALUMNOS)	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert^2$
0	6		
2	14		
3	10		
5	1		
7	1		
CLASE 3.° B			

1 a) Halla el número medio de horas que se hace deporte a la semana en cada clase $(\overline{x})$ y completa las tablas de arriba. ¿Cuál es la moda en cada caso?

b) Obtén la desviación media y la desviación típica en cada grupo.

c) Dibuja los diagramas de barras y compáralos. ¿Qué clase practica deporte más regularmente?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) Cuantitativa. b) Cualitativa

c) Cuantitativa. d) Cualitativa.

2

x_i	f_i	$fr_i = f_i/n$	F_i	Fr_i
0	8	0,16	8	0,16
1	12	0,24	20	0,40
2	14	0,28	34	0,68
3	8	0,16	42	0,84
4	6	0,12	48	0,96
5	2	0,04	50	1

a) 68% b) 84% c) 68%

3 a) $\bar{x} = 1{,}96$; $Mo = 2$; $Me = 2$

b) D.M. = 1,088

c) $\sigma = 1{,}37$

APLICA

1 $\bar{x}_A = 2{,}9$ $\bar{x}_B = 2{,}4$

EQUIPO A

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
1	5	1,9	3,61
2	11	0,9	0,81
3	12	0,1	0,01
4	5	1,1	1,21
5	3	2,1	4,41
6	2	3,1	9,61

EQUIPO B

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
1	5	1,4	1,96
2	18	0,4	0,16
3	10	0,6	0,36
4	3	1,6	2,56
5	2	2,6	6,76

2 $Mo_A = 3$; $Me_A = 3$; $Mo_B = 2$; $Me_B = 2$

3 $D.M._A = 1{,}01$; $D.M._B = 0{,}79$

4 $\sigma_A = 1{,}30$; $\sigma_B = 1{,}10$

5 El equipo B.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 Puesto que $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, tenemos:

$$1{,}80 = \frac{\Sigma x_i}{4} \rightarrow \Sigma x_i = 7{,}20$$

$$1{,}70 = \frac{\Sigma x_i}{6} \rightarrow \Sigma x_i = 10{,}20$$

$$\bar{x}_{\text{TOTAL}} = \frac{7{,}20 + 10{,}20}{10} = 1{,}74$$

2 a) Rango: 0,8 = 1,6 – 0,8

b)

	x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
0,8 - 1	0,9	11	0,27	0,073
1 - 1,2	1,1	4	0,6	0,36
1,2 - 1,4	1,3	8	0,13	0,17
1,4 - 1,6	1,5	7	0,33	0,11

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = 1{,}17$$

c) $\text{D.M.} = \frac{\Sigma \lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i}{n} = 8{,}72$

d) $\sigma = 2{,}09$

APLICA

1

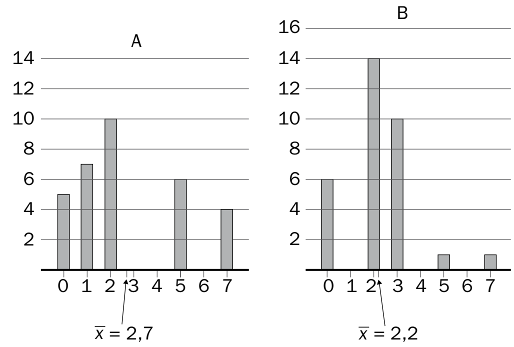
x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
0	5	2,7	7,29
1	7	1,7	2,89
2	10	0,7	0,49
5	6	2,3	5,29
7	4	4,3	18,49
CLASE 3.° A			

x_i	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
0	6	2,2	4,84
2	14	0,2	0,04
3	10	0,8	0,64
5	1	2,8	7,84
7	1	4,8	23,04
CLASE 3.° B			

a) $\bar{x}_A = 2{,}7$; $Mo_A = 2$; $\bar{x}_B = 2{,}2$; $Mo_B = 2$

b) $D.M._A = 2$; $\sigma_A = 2{,}28$; $D.M._B = 1$; $\sigma_B = 1{,}45$

c)



El grupo B.

Azar y probabilidad

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

AZAR Y PROBABILIDAD

EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

- Una **experiencia aleatoria** es aquella ....
....

EJEMPLO:

- El **espacio muestral** es el conjunto ....
....

EJEMPLO: Sacamos una bola de una bolsa que contiene seis bolas numeradas del 1 al 6.

E = {....................................}

- Los **sucesos** son subconjuntos del ....

EJEMPLO: En la experiencia anterior, llamas A a sacar bola par, y B, a sacar un número menor que 3.

A = {...........................} B = {...........................}

- El **suceso seguro** es ....

EJEMPLO: En la experiencia anterior, sacar una bola con un número menor que $\boxed{}$ es un suceso seguro.

FORMAS DE MEDIR LA PROBABILIDAD

- Cuando una experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular, si el espacio muestral tiene n casos, la probabilidad de cada caso es $\boxed{}$

EJEMPLO:

En la experiencia anterior, $n = \boxed{}$, por tanto: $P[1] = \boxed{}$, $P[3] = \boxed{}$, $P[5] = \boxed{}$

- Para obtener la probabilidad de un caso en una experiencia aleatoria irregular, es necesario .....
....
....

LEY DE LAPLACE

- La probabilidad de un suceso S en una experiencia aleatoria realizada con un instrumento regular se calcula así:

$$P[S] = \frac{\text{...........................}}{\text{...........................}}$$

EJEMPLO:

En la experiencia anterior, la probabilidad de sacar bola par es:

$$P[A] = \boxed{} = \boxed{}$$

Azar y probabilidad

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

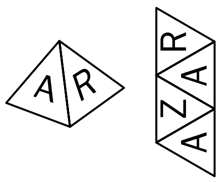
1 En una rifa en la que se han puesto a la venta 100 papeletas, tú has comprado 50.

a) ¿Qué probabilidad tienes de ganar el premio?

b) ¿Y si hubieses comprado 25?

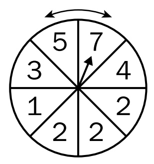
c) ¿Y si hubieses comprado 20?

2 Fíjate en este dado con forma de tetraedro (4 caras) y en su desarrollo. Lo lanzamos 100 veces y anotamos los resultados en esta tabla. Complétala.



RESULTADO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	% APROXIMADO	PROBABILIDAD ASIGNADA
A	52			
Z	24			
R	24			

3 Completa esta tabla de experimentos aleatorios:

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL (RESULTADOS POSIBLES)	ALGUNOS SUCESOS	PROBABILIDAD
1. Lanzar una moneda.	$E = \{\quad\}$	$A = \{C\}$ $B = \{+\}$	$P[A] =$ $P[B] =$
2. Tirar un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8.	$E = \{\quad\}$	$A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{$Múltiplo de 3$\}$ $C = \{$Número primo$\}$	$P[A] =$ $P[B] =$ $P[C] =$
3. Extraer una carta de una baraja española (40 cartas).	Número de posibles resultados:	$O = \{$Salir oros$\}$ $A = \{$Salir as$\}$ $B = \{$No salir bastos$\}$	$P[O] =$ $P[A] =$ $P[B] =$
4.  RULETA GIRATORIA	$E = \{\quad\}$	$D = \{$Obtener 2$\}$ $B = \{$Obtener 1 ó 2$\}$ $P = \{$Obtener número par$\}$ $I = \{$Obtener número impar$\}$	$P[D] =$ $P[B] =$ $P[P] =$ $P[I] =$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. GANAR O PERDER

Marta, Manuel, Sara y Javier investigan probabilidades en clase de Matemáticas. Lanzan un dado octaédrico (8 caras) y anotan los resultados después de 100 lanzamientos. Los resultados son:

CARA	1	2	3	4	5	6	7	8
N.° DE VECES	13	12	12	13	13	12	13	12

1 a) Completa la siguiente tabla:

RESULTADO	FRECUENCIA RELATIVA	% APROXIMADO	PROBABILIDAD QUE ASIGNARÍAS
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

b) El profesor les propone que inventen un juego de apuestas sobre esos resultados, donde todos tengan las mismas probabilidades de ganar o perder. Marta propone el siguiente: “Yo gano si sale 1 ó 2, Manuel gana si sale múltiplo de 4; Sara gana si sale mayor que 5 y menor que 8, y Javier gana si sale impar menor que 4”.

Analiza el juego: calcula las probabilidades que tiene cada uno de ganar. ¿Es justo el juego?

Azar y probabilidad

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Tenemos dos dados, uno en forma de octaedro (8 caras) y otro en forma de cubo (6 caras). Cada uno tiene sus caras numeradas (del 1 al 8 en el primer caso, y del 1 al 6 en el segundo).

a) ¿Qué probabilidad hay que obtener 5 en el dado octaédrico? ¿Y la de obtener 5 en el cúbico?

b) ¿Con qué dado es más probable sacar un número par?

c) ¿Y con qué dado es más probable no sacar 1?

2 Tenemos una baraja española (40 cartas). Sacamos una carta.

a) ¿Qué probabilidad hay de que la carta sea de bastos?

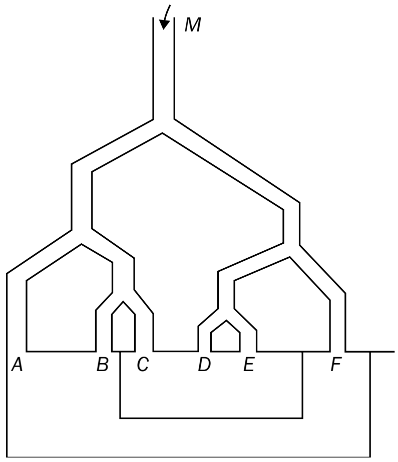
b) Supongamos que hemos sacado una carta de bastos y no la hemos devuelto al mazo. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que, al sacar una carta, sea nuevamente de bastos? ¿Y de que sea de espadas?

3 Lanzas al aire tres veces una moneda. Forma el espacio muestral de los posibles resultados (tienen que salirte 8). ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos caras seguidas? ¿Y la de que sean alternas?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ¿QUIÉN GANA?

En una barraca de feria se presenta la siguiente máquina de tirar bolas. El feriante pregona: “¡Compre bolas y juegue!”.



El jugador debe echar las bolas por la boca *M*.

Si la mitad o más caen en el cajón *CDE*, tiene derecho a premio; las que caen en *ABF*, las pierde.

En la siguiente jugada echará las que cayeron en *CDE*. Si nuevamente la mitad o más de ellas vuelven a caer en *CDE*, tendrá premio; el resto, las pierde para la próxima jugada, y así sucesivamente.

1 Imagina que compras 64 bolas. Aparentemente, a cada cajón llegarán 32 bolas. ¿Te parece justo el juego a priori? ¿Qué cajón te parece que tiene más “probabilidades” de recibir bolas? ¿Por qué?

2 Estudia el juego detenidamente. ¿Cuántas bolas crees que llegarán a cada boca *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*? ¿Cuál es la probabilidad de que caigan en el cajón *ABF*? ¿Y en el *CDE*?

3 ¿Qué crees que ocurrirá después de la tercera jugada? ¿Es justo el juego?

Soluciones

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; c) $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

2

RESULTADO	FREC. ABS.	FREC. REL.	% APROX.	PROBAB.
A	52	0,52	50%	1/2
Z	24	0,24	25%	1/4
R	24	0,24	25%	1/4

3

EXP.	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD
1.	$E = \{C, +\}$	$P[A] = 1/2$ $P[B] = 1/2$
2.	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$P[A] = 4/8 = 1/2$ $P[B] = 2/8 = 1/4$ $P[C] = 4/8 = 1/2$
3.	40	$P[O] = 10/40 = 1/4$ $P[A] = 4/40 = 1/10$ $P[B] = 30/40 = 3/4$
4.	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	$P[D] = 3/8$ $P[B] = 4/8 = 1/2$ $P[P] = 4/8 = 1/2$ $P[I] = 4/8 = 1/2$

APLICA

1

RESULTADO	FREC. ABS.	% APROX.	PROBABILIDAD
1	0,13	13%	0,13
2	0,12	12%	0,12
3	0,12	12%	0,12
4	0,13	13%	0,13
5	0,13	13%	0,13
6	0,12	12%	0,12
7	0,13	13%	0,13
8	0,12	12%	0,12

$P[\text{MARTA}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\quad P[\text{MANUEL}] = \frac{1}{4}$

$P[\text{SARA}] = \frac{1}{4}$ $\quad P[\text{JAVIER}] = \frac{1}{4}$

El juego es justo, por ser equiprobable.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $P[5] = \frac{1}{8}$ en el octaédrico.

$P[5] = \frac{1}{6}$ en el cúbico.

b) Es la misma en ambos casos, $\frac{1}{2}$.

c) $P[\text{NO SACAR } 1] = \frac{5}{6}$ en el cúbico $\left(\frac{5}{6} = \frac{20}{24}\right)$

$P[\text{NO SACAR } 1] = \frac{7}{8}$ en el octaédrico $\left(\frac{7}{8} = \frac{21}{24}\right)$

Es más probable con el octaédrico.

2 a) $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

b) Bastos $\rightarrow \frac{9}{39}$ $\quad$ Espadas $\rightarrow \frac{10}{39}$

3 $E = \{\text{CCC, CC+, C+C, +CC, ++C, +C+, C++, +++}\}$

$P[\text{DOS CARAS SEGUIDAS}] = \frac{3}{8}$

$P[\text{DOS CARAS ALTERNAS}] = \frac{1}{8}$

APLICA

1 El juego no es justo porque, tal y como están distribuidas las bocas, D y E equivalen a una sola boca. Por tanto, es más probable que reciba bolas el cajón ABF.

2 $A \rightarrow 16$ $\quad B \rightarrow 8$ $\quad F \rightarrow 16$

$C \rightarrow 8$ $\quad D \rightarrow 8$ $\quad E \rightarrow 8$

$P[\text{CAJÓN } ABF] = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$

$P[\text{CAJÓN } CDE] = \frac{3}{8}$

3 Después de la 3.ª jugada, lo más probable es que solo queden 3 ó 4 bolas para jugar, y sucesivamente se vayan perdiendo hasta quedarse sin ninguna.

El juego no es justo.