# EJERCICIOS DE ECUACIONES : DE PRIMER GRADO, SEGUNDO GRADO, BICUADRADAS, CON X EN EL DENOMINADOR Y CON RADICALES

***Ejercicio nº 1.-***

**Resuelve esta ecuación:**

$$3(2x+1)-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$

***Ejercicio nº 2.-***

**Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $4x^2 - 16 = 0$

**b)** $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$

***Ejercicio nº 3.-***

**Resuelve:**

$$\frac{5(3x+1)}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{2(9x+5)}{8}$$

***Ejercicio nº 4.-***

**Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $x^2 + 3x - 4 = 0$

**b)** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

***Ejercicio nº 5.-***

**Resuelve la siguiente ecuación:**

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x+1}{3}=2\left[\frac{3x}{10}-\left(\frac{x}{6}-1\right)\right]$$

***Ejercicio nº 6.-***

**Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $2x^2 - 32 = 0$

**b)** $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$

***Ejercicio nº 7.-***

**Resuelve la ecuación:**

$$\frac{3(x+1)}{4}-\frac{2x-1}{3}=\frac{-x}{3}+\frac{3(2x-1)}{4}$$

***Ejercicio nº 8.-***

**Resuelve:**

**a)** $18x^2 - 2 = 0$

**b)** $4(5x + 1)^2 - 9 = 0$

***Ejercicio nº 9.-***

**Resuelve:**

$$\frac{2}{5}(x+5)-\frac{1}{2}(2x+1)=2-\frac{1}{4}(x-3)$$

***Ejercicio nº 10.-***

**Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $3x^2 - 243 = 0$

**b)** $2(2x + 1)^2 - 3(2x - 1)^2 + 5(2x - 1)(2x + 1) = 0$

***Ejercicio nº 11.-***

**Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$

**b)** $x^4-26x^2+25=0$

***Ejercicio nº 12.-***

**Resuelve las ecuaciones:**

**a)** $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=2$

**b)** $\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x}=\frac{-7}{4}$

***Ejercicio nº 13.-***

**Resuelve:**

a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

***Ejercicio nº 14.-***

**Resuelve las ecuaciones:**

a) $2x+\sqrt{6x+1}=3$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{15}{4}$

***Ejercicio nº 15.-***

**Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$

b) $3x^4-10x^2-8=0$

***Ejercicio nº16.-***

**Resuelve:**

a) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{9x-2}=-1$

b) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{x^2}=\frac{5}{12}$

***Ejercicio nº 17.-***

**Resuelve la ecuacion:**

$2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$

***Ejercicio nº 18.-***

**Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{x^4+9}-\sqrt{6x^2+1}=0$

b) $x+\frac{8}{2x}=5$

***Ejercicio nº 19.-***

**Resuelve:**

a) $2(2x+1)^2-3(2x-1)^2+5(2x-1)(2x+1)=0$

b) $4x^4-25x^2=0$

***Ejercicio nº 20.-***

**Resuelve:**

a) $\frac{81}{x^3}-1=2$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$

***Ejercicio nº 21.-***

**Resuelve:**

a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

***Ejercicio nº 22.-***

**Resuelve las ecuaciones:**

a) $2x+\sqrt{6x+1}=3$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{15}{4}$

**RESOLUCION DE LOS EJERCICIOS DE ECUACIONES : DE PRIMER GRADO, SEGUNDO GRADO, BICUADRADAS, CON X EN EL DENOMINADOR Y CON RADICALES**

***Ejercicio nº 1.-***
***Solución:***

$$3(2x+1)-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$
$$6x+3-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$
$$6x+3-\frac{x+1}{2}=\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{6}$$
$$\frac{36x}{6}+\frac{18}{6}-\frac{3x+3}{6}=\frac{3x}{6}+\frac{6}{6}-\frac{x+1}{6}$$

$$36x+18-3x-3=3x+6-x-1$$

$$36x-3x-3x+x=6-1-18+3$$

$$31x=-10$$
$$x=\frac{-10}{31}$$

***Ejercicio nº 2.-***
***Solución:***

a) $4x^2-16=0 \quad\rightarrow\quad 4x^2=16 \quad\rightarrow\quad x^2=\frac{16}{4}=4 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{4}\ \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$

b) $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$

$$\frac{2(2x+5)(3x-1)}{6}+\frac{3x^2+15}{6}=\frac{7x-5}{6}+\frac{6}{6}$$

$$12x^2-4x+30x-10+3x^2+15-7x+5-6=0$$

$$15x^2+19x+4=0 \quad\rightarrow\quad a=15,\ b=19,\ c=4$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-19\pm\sqrt{361-240}}{30}=\frac{-19\pm\sqrt{121}}{30}=\frac{-19\pm 11}{30}\ \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{-8}{30}=\frac{-4}{15} \end{cases}$$

***Ejercicio nº 3.-***
***Solución:***

$$\frac{5(3x+1)}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{2(9x+5)}{8}$$
$$\frac{15x+5}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{18x+10}{8}$$
$$\frac{180x+60}{48}-\frac{96x-16}{48}=\frac{-27x}{48}+\frac{108x+60}{48}$$

$180x + 60 - 96x + 16 = -27x + 180x + 60$

$180x - 96x + 27x - 108x = 60 - 60 - 16$

$3x = -16$

$x = \frac{-16}{3}$

***<u>Ejercicio nº 4.-</u>***
***Solución:***

a) $x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1,\ b = 3,\ c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}x = \frac{10}{9}$

$$x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2x}{3} = \frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{9} \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

***<u>Ejercicio nº 5.-</u>***
***Solución:***

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = 2\left[\frac{3x}{10} - \left(\frac{x}{6} - 1\right)\right]$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = 2\left[\frac{3x}{10} - \frac{x}{6} + 1\right]$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = \frac{6x}{10} - \frac{2x}{6} + 2$$

$$\frac{12x+6}{30} - \frac{10x+10}{30} = \frac{18x}{30} - \frac{10x}{30} + \frac{60}{30}$$

$12x + 6 - 10x - 10 = 18x - 10x + 60$

$12x - 10x - 18x + 10x = 60 - 6 + 10$

$-6x = 64$

$$x = \frac{64}{-6} = \frac{-32}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-32}{3}$$

***<u>Ejercicio nº 6.-</u>***
***Solución:***

a) $2x^2 - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 32 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{32}{2} = 16$

$$x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

b) $\frac{2x^2 - 1}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{1 - x}{6}$

$$\frac{6x^2 - 3}{6} - \frac{2x - 2}{6} = \frac{1 - x}{6}$$

$6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - x$

$6x^2 - 2x + x - 3 + 2 - 1 = 0$

$6x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 6,\ b = -1,\ c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

***<u>Ejercicio nº 7.-</u>***
***Solución:***

$$\frac{3(x+1)}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{3(2x-1)}{4}$$
$$\frac{3x+3}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{6x-3}{4}$$
$$\frac{9x+9}{12} - \frac{8x-4}{12} = \frac{-4x}{12} + \frac{18x-9}{12}$$

$9x + 9 - 8x + 4 = -4x + 18x - 9$

$9x - 8x + 4x - 18x = -9 - 9 - 4$

$-13x = -22$

$$x = \frac{-22}{-13} = \frac{22}{13} \quad \rightarrow \quad x = \frac{22}{13}$$

***<u>Ejercicio nº 8.-</u>***
***Solución:***

a) $18x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 18x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $4(5x + 1)^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(25x^2 + 10x + 1) - 9 = 0$

$100x^2 + 40x + 4 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 100x^2 + 40x - 5 = 0$

$20x^2 + 8x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 20,\ b = 8,\ c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{40} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{40} = \frac{-8 \pm 12}{40} \begin{cases} x_1 = \frac{-20}{40} = \frac{-1}{2} \\ x_2 = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

***<u>Ejercicio nº 9.-</u>***
***Solución:***

$$\frac{2}{5}(x+5) - \frac{1}{2}(2x+1) = 2 - \frac{1}{4}(x-3)$$
$$\frac{2x+10}{5} - \frac{2x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}$$
$$\frac{8x+40}{20} - \frac{20x+10}{20} = \frac{40}{20} - \frac{5x-15}{20}$$

$8x + 40 - 20x - 10 = 40 - 5x + 15$

$8x - 20x + 5x = 40 + 15 - 40 + 10$

$-7x = 25$

$$x = \frac{25}{-7} = \frac{-25}{7} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-25}{7}$$

***<u>Ejercicio nº 10.-</u>***
***Solución:***

a) $3x^2 - 243 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 243 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{243}{3} = 81 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{81} \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

b) $2(2x + 1)^2 - 3(2x - 1)^2 + 5(2x - 1)\ (2x + 1) = 0$

$2(4x^2 + 4x + 1) - 3(4x^2 - 4x + 1) + 5(4x^2 - 1) = 0$

$8x^2 + 8x + 2 - 12x^2 + 12x - 3 + 20\,x^2 - 5 = 0$

$16x^2 + 20x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 8x^2 + 10x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 8,\ b = 10,\ c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{-10 \pm 14}{16} \begin{cases} x_1 = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} \\ x_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

***<u>Ejercicio nº 11.-</u>***
***Solución:***

a) Multiplicamos los dos miembros por 6:

$3\left(2x^2 - 1\right) - 2\left(x - 1\right) = 1 - x \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - x \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 6x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{-1}{2}$.

b) Por ser bicuadrada, hacemos el cambio $x^2 = z$:

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

Si $z = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$
Si $z = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = \pm 5$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$ y $x_4 = -5$.

***<u>Ejercicio nº 12.-</u>***
***Solución:***

a) $\sqrt{x-2} = 2 - \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad 4\sqrt{x} = 6 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{x} = 3$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$4x = 9 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{4}$ es la posible solución.

Lo comprobamos:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego $x = \frac{9}{4}$ es la solución buscada.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4x(x+2)$:

$4x - 4(x+2)^2 = -7x(x+2) \quad \rightarrow \quad 4x - 4(x^2 + 4x + 4) = -7x^2 - 14x \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 4x - 4x^2 - 16x - 16 = -7x^2 - 14x \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 16 = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \begin{cases} 2 \\ \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$$\frac{1}{4}-\frac{4}{2}=\frac{1-8}{4}=\frac{-7}{4} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ es solución.}$$

$$\frac{1}{\frac{-8}{3}+2}-\frac{\frac{-8}{3}+2}{\frac{-8}{3}}=\frac{1}{\frac{-2}{3}}-\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-8}{3}}=-\frac{3}{2}-\frac{2}{8}=\frac{-14}{8}=\frac{-7}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{-8}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1=2$ y $x_2=\frac{-8}{3}$.

***<u>Ejercicio nº 13.-</u>***
***Solución:***

a) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x^2=\frac{9}{9} \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$

Las soluciones son $x_1=1$ $y$ $x_2=-1$.

b) Ecuación bicuadrada; hacemos $x^2=z$ y obtenemos:

$$z^2 - 48z - 49=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \begin{cases} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{98}{2}=49 \end{cases}$$

Si $z=-1 \quad \rightarrow \quad x^2=-1 \quad \rightarrow$ no hay solución real
Si $z=49 \quad \rightarrow \quad x^2=49 \quad \rightarrow \quad x=\pm 7$

Las soluciones son $x_1=7$ y $x_2=-7$.

***<u>Ejercicio nº 14.-</u>***
***Solución:***

a) $\sqrt{6x+1}=3-2x$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$6x+1=9-12x+4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2-18x+8=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-9x+4=0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4} \begin{cases} \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{6}{2}+1}=1+\sqrt{4}=1+2=3 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ es solución

$8+\sqrt{24+1}=8+\sqrt{25}=8+5=13 \quad \rightarrow \quad x=4$ no es solución

La única solución es $x = \frac{1}{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4(x+1)(x-1)$:

$$4x(x-1)+8x(x+1)=15(x+1)(x-1) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 4x^2-4x+8x^2+8x=15x^2-15 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 12x^2+4x=15x^2-15 \quad \rightarrow \quad 3x^2-4x-15=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6} \quad f \quad \begin{matrix} \frac{18}{6}=3 \\ , \\ \frac{-10}{6}=\frac{-5}{3} \end{matrix}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1}+\frac{6}{3-1}=\frac{3}{4}+\frac{6}{2}=\frac{3+12}{4}=\frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1}+\frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1}=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=\frac{5}{2}+\frac{10}{8}=\frac{20+10}{8}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1=3$ y $x_2=\frac{-5}{3}$.

***<u>Ejercicio nº 15.-</u>***
***Solución:***

a) Multiplicamos ambos miembros por 6:

$$2(2x+5)(3x-1)+3(x^2+5)=7x-5+6 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 12x^2-4x+30x-10+3x^2+15-7x+5-6=0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 15x^2+19x+4=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-19\pm\sqrt{361-240}}{30}=\frac{-19\pm\sqrt{121}}{30}=\frac{-19\pm 11}{30} \quad f \quad \begin{matrix} \frac{-30}{30}=-1 \\ , \\ \frac{-8}{30}=\frac{-4}{15} \end{matrix}$$

Las soluciones son $x_1=-1$ y $x_2=\frac{-4}{15}$.

b) Haciendo $x^2=z$, se obtiene: $3z^2-10z-8=0$

$$z=\frac{10\pm\sqrt{100+96}}{6}=\frac{10\pm 14}{6} \quad f \quad \begin{matrix} \frac{24}{6}=4 \\ , \\ \frac{-4}{6}=\frac{-2}{3} \end{matrix}$$

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $z = \frac{-2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{-2}{3} \rightarrow$ no hay solución real.

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

***<u>Ejercicio nº 16.-</u>***
***Solución:***

a) $\sqrt{4x+1} = -1 + \sqrt{9x-2}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$4x+1 = 1 + (9x-2) - 2\sqrt{9x-2} \rightarrow$

$\rightarrow 4x+1 = 9x-1-2\sqrt{9x-2} \rightarrow 2\sqrt{9x-2} = 5x-2$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$4(9x-2) = 25x^2 - 20x + 4 \rightarrow$

$\rightarrow 36x - 8 = 25x^2 - 20x + 4 \rightarrow 25x^2 - 56x + 12 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{56 \pm \sqrt{3136-1200}}{50} = \frac{56 \pm \sqrt{1936}}{50} = \frac{56 \pm 44}{50} \begin{cases} \frac{100}{50} = 2 \\ \frac{12}{50} = \frac{6}{25} \end{cases}$$

Comprobamos las dos posibles soluciones, sustituyendo en la ecuación inicial:

$\sqrt{4 \cdot 2 + 1} - \sqrt{9 \cdot 2 - 2} = \sqrt{9} - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1 \rightarrow 2$ es solución

$\sqrt{\frac{24}{25}+1} - \sqrt{\frac{54}{25}-2} = \sqrt{\frac{49}{25}} - \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow \frac{6}{25}$ no es solución

La única solución es $x = 2$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $12x^2$, que es el m.c.m. de los denominadores:

$4x + 12 = 5x^2 \rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{10} = \frac{4 \pm 16}{10} \begin{cases} \frac{20}{10} = 2 \\ \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5} \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 2 \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12} \rightarrow 2$ es solución.

$x = \frac{-6}{5} \rightarrow -\frac{5}{18} + \frac{25}{36} = \frac{-10+25}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \rightarrow \frac{-6}{5}$ es solución.

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{-6}{5}$.

***Ejercicio nº 17.-***
***Solución:***

b) $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$ equivale a $2z^2 + z - 68 = 0$, siendo $z = x^2$.

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 544}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-9 \pm 25}{4} \begin{cases} \dfrac{-34}{4} = \dfrac{-17}{2} \\ \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Si $z = \dfrac{-17}{2} \rightarrow x^2 = \dfrac{-17}{2} \rightarrow$ no hay solución real.

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Las soluciones pedidas son $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$.

***Ejercicio nº 18.-***
***Solución:***

a) $\sqrt{x^4 + 9} = \sqrt{6x^2 + 1}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$x^4 + 9 = 6x^2 + 1 \rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Ecuación bicuadrada, que resolvemos haciendo el cambio $x^2 = z$:

$$z^2 - 6z + 8 = 0 \rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $z = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Comprobación:

$x = \pm 2 \rightarrow \sqrt{16+9} - \sqrt{24+1} = \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0 \rightarrow x = \pm 2$ son soluciones.

$x = \pm\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{4+9} - \sqrt{12+1} = \sqrt{13} - \sqrt{13} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ son soluciones.

Las soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{2}$ y $x_4 = -\sqrt{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $2x$:

$2x^2 + 8 = 10x \rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación de las posibles soluciones:

$4 + \dfrac{8}{8} = 4 + 1 = 5 \rightarrow 4$ es solución

$1 + \dfrac{8}{2} = 1 + 4 = 5 \rightarrow 1$ es solución

Las soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$.

***Ejercicio nº 19.-***
***Solución:***

a) Efectuamos los paréntesis teniendo en cuenta que todos son productos notables:

$$2\left(4x^2+4x+1\right)-3\left(4x^2-4x+1\right)+5\left(4x^2-1\right)=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 8x^2+8x+2-12x^2+12x-3+20x^2-5=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 16x^2+20x-6=0 \quad \rightarrow \quad 8x^2+10x-3=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{16}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{16}=\frac{-10\pm 14}{16} \quad \begin{cases} \dfrac{-24}{16}=\dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=\dfrac{-3}{2}$ y $x_2=\dfrac{1}{4}$.

b) Ecuación bicuadrada en la que podemos extraer $x^2$ como factor común:
(Observa que también se puede hacer con el cambio de variable, y entonces resolver: $4z^2-25z=0$. Compruébalo, y verás como obtienes los mismos resultados)

$$4x^4-25x^2=x^2\left(4x^2-25\right)$$

Así:

$$4x^4-25x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2\left(4x^2-25\right)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \\ 4x^2-25=0 \quad \rightarrow \quad x^2=\dfrac{25}{4} \quad \rightarrow \quad x=\pm\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=0$, $x_2=\dfrac{5}{2}$ y $x_3=-\dfrac{5}{2}$.

***Ejercicio nº 20.-***
***Solución:***

a) Multiplicamos ambos miembros por $x^3$:

$$\frac{81}{x^3}=3 \quad \rightarrow \quad 81=3x^3 \quad \rightarrow \quad x^3=27 \quad \rightarrow \quad x=3$$

Comprobamos si es, o no, solución en la ecuación inicial:

$$\frac{81}{27}-1=3-1=2 \quad \rightarrow \quad x=3 \text{ es solución}$$

b) $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$x+4=9+x-1-6\sqrt{x-1} \quad \rightarrow \quad 6\sqrt{x-1}=4 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{x-1}=2$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$9\left(x-1\right)=4 \quad \rightarrow \quad 9x-9=4 \quad \rightarrow \quad 9x=13 \quad \rightarrow \quad x=\frac{13}{9}$$

Comprobamos si es, o no, solución:

$$\sqrt{\frac{13}{9}+4}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$$

$$3-\sqrt{\frac{13}{9}-1}=3-\sqrt{\frac{4}{9}}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

Ambos miembros coinciden, luego $x=\frac{13}{9}$ es la solución buscada.

***Ejercicio nº 21.-***
***Solución:***

a) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x^2=\frac{9}{9} \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$

Las soluciones son $x_1=1$ *y* $x_2=-1$.

b) Ecuación bicuadrada; hacemos $x^2=z$ y obtenemos:

$$z^2-48z-49=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \begin{cases} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{98}{2}=49 \end{cases}$$

Si $z=-1 \quad \rightarrow \quad x^2=-1 \quad \rightarrow$ no hay solución real
Si $z=49 \quad \rightarrow \quad x^2=49 \quad \rightarrow \quad x=\pm 7$

Las soluciones son $x_1=7$ y $x_2=-7$.

***Ejercicio nº 22.-***
***Solución:***

a) $\sqrt{6x+1}=3-2x$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$6x+1=9-12x+4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2-18x+8=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-9x+4=0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4} \begin{cases} \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{6}{2}+1}=1+\sqrt{4}=1+2=3 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ es solución

$8+\sqrt{24+1}=8+\sqrt{25}=8+5=13 \quad \rightarrow \quad x=4$ no es solución

La única solución es $x = \frac{1}{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4(x+1)(x-1)$:

$$4x(x-1)+8x(x+1)=15(x+1)(x-1) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 4x^2-4x+8x^2+8x=15x^2-15 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 12x^2+4x=15x^2-15 \quad \rightarrow \quad 3x^2-4x-15=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6} \quad f \quad \begin{array}{l} \frac{18}{6}=3 \\ \frac{-10}{6}=\frac{-5}{3} \end{array}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1}+\frac{6}{3-1}=\frac{3}{4}+\frac{6}{2}=\frac{3+12}{4}=\frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1}+\frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1}=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}=\frac{5}{2}+\frac{10}{8}=\frac{20+10}{8}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1=3$ y $x_2=\frac{-5}{3}$.