1. Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

   a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **[1 punto]**

   b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **[1 punto]**

2. Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

   a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ **[1 punto]**

   b) $\int e^{3x}\operatorname{sen} 3x\,dx$ **[2 puntos]**

3. Resuelve las siguientes integrales racionales.

   a) $\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx$ **[1,5 puntos]**

   b) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3}\,dx$ **[1,5 puntos]**

4. Dada la función $f(x)=2\ln x$, se pide:
   a) Realizar un dibujo aproximado de la región encerrada por el eje X, la gráfica de la función f y las rectas verticales $x=\frac{1}{2}$ y $x=4$. **[0,5 puntos]**
   b) Calcular el área de la región anterior. **[1,5 puntos]**

Soluciones

1. Integrales inmediatas

a) $$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2}{x^{1/2}}dx - 2\int \frac{x}{x^{1/2}}dx + \int \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int x^{3/2}dx - 2\int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 2\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

b) $$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\left(1-x^2\right)^{1/2}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-1/2}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + 4\,\text{arcsen}\,x + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{1/2} + 4\,\text{arcsen}\,x + C = -\frac{2}{2}\left(1-x^2\right)^{1/2} + 4\,\text{arcsen}\,x + C = -\sqrt{1-x^2} + 4\,\text{arcsen}\,x + C$$

2. Integrales por cambio de variable y por partes.

a) $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt \Rightarrow dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = \int \frac{2}{t+1}dt = 2\int \frac{1}{t+1}dt =$$

$$= 2\ln(t+1) + C = 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$$

b) $$\int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{3x} \;\;;\;\; du = 3e^{3x}dx \\ dv = \text{sen}\,3x \;\;;\;\; v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right] = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 3x + \int e^{3x}\cos 3x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = e^{3x} \;\;;\;\; du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 3x\,dx \;\;;\;\; v = \dfrac{1}{3}\text{sen}\,3x \end{array}\right] = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 3x + \frac{1}{3}e^{3x}\text{sen}\,3x - \int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx$$

Hemos demostrado pues que: $\int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 3x + \frac{1}{3}e^{3x}\text{sen}\,3x - \int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx$. Pasando el último término al primer miembro: $\int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx + \int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 3x + \frac{1}{3}e^{3x}\text{sen}\,3x$. Es decir, $2\int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 3x + \frac{1}{3}e^{3x}\text{sen}\,3x$, con lo que finalmente:

$$\int e^{3x}\text{sen}\,3x\,dx = -\frac{1}{6}e^{3x}\cos 3x + \frac{1}{6}e^{3x}\text{sen}\,3x + C = \frac{e^{3x}\left(\text{sen}\,3x - \cos 3x\right)}{6} + C$$

3. Integrales racionales

a) Dividiendo el numerador entre el denominador tenemos $x^3 = (x-1)\left(x^2+x-2\right) + 3x - 2$, con lo que el integrando lo podemos escribir así: $\frac{x^3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2}$.

Además, como las raíces del denominador de la expresión $\frac{3x-2}{x^2+x-2}$ son $x=1$ y $x=-2$, tenemos:

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\2A-B=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^3}{x^2+x-2}dx=\int(x-1)dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{8}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{8}{3}\ln(x+2)+C$$

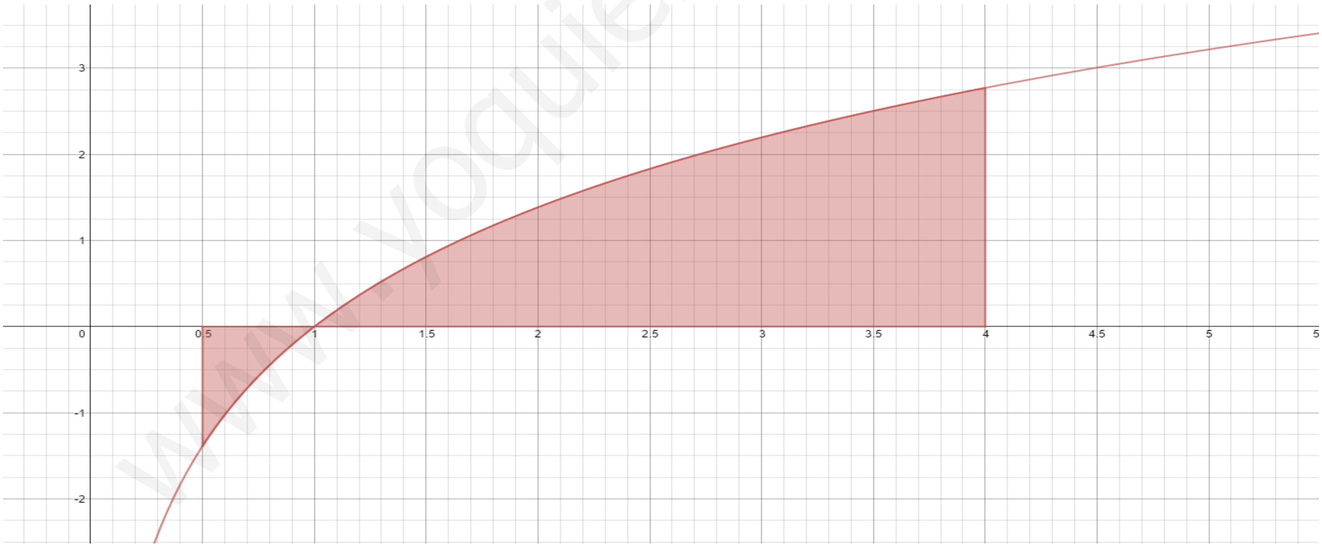
b) Descompongamos la fracción $\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$ en fracciones simples.

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}=\frac{Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)}{(x+1)^3}$$

Entonces $\begin{cases}A=1\\2A+B=0\\A+B+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-2\\C=2\end{cases}$. Por tanto $\frac{x^2+1}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$, es decir:

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{x+1}dx-2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+2\int\frac{1}{(x+1)^3}dx=\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+C$$

4. La función $f(x)=2\ln x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x=1$. Por tanto, la región es de la forma:



$\int_{1/2}^{4}2\ln x\,dx=\int_{1/2}^{1}2\ln x\,dx+\int_{1}^{4}2\ln x\,dx$, con lo que el área pedida será $A=\left|\int_{1/2}^{1}2\ln x\,dx\right|+\left|\int_{1}^{4}2\ln x\,dx\right|$.

Como $\int 2\ln x\,dx=2\int\ln x\,dx=2(x\ln x-x)+C$, tenemos:

$$\int_{1/2}^{1}2\ln x\,dx=2(x\ln x-x)\Big]_{1/2}^{1}=2(1\ln 1-1)-2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-2+\ln 2+1=\ln 2-1\cong-0{,}307$$

$$\int_{1}^{4}2\ln x\,dx=2(x\ln x-x)\Big]_{1}^{4}=2(4\ln 4-4)-2(1\ln 1-1)=8\ln 4-8+2=8\ln 4-6\cong 5{,}09$$

Por tanto $A=\left|\int_{1/2}^{1}2\ln x\,dx\right|+\left|\int_{1}^{4}2\ln x\,dx\right|\cong 0{,}307+5{,}09=5{,}397$ uds^2.