1. Sabiendo que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los

Siguientes determinantes indicando las propiedades que utilices.

$$\text{a) } \det(3A) \text{ .b) } \det(A^{-1}) \text{.c) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{.d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sol: a) 54 b)1/2 c)-12 d)-2

2. Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det (M) = 2. Calcula:
a) [0’5 puntos] El rango de M^3. **R(A)=3**
b) [0’75 puntos] El determinante de $2M^t$ (M_t es la matriz traspuesta de M). **Sol 16**
c) [0’75 puntos] El determinante de $(M^{-1})^2$.**Sol 1/4**
d) [0’5 puntos] El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M. **Sol. -2**

3. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son |A| = 1/2 y |B| = -2. Halla:
(a) [0'5 puntos] $|A^3|$.**Sol: 1/8**
(b) [0'5 puntos] $|A^{-1}|$.**Sol:2**
(c) [0'5 puntos] |-2A|.**Sol:-4**
(d) [0'5 puntos] $|AB^t|$, siendo Bt la matriz traspuesta de B.**Sol:-1**
(e) [0'5 puntos] El rango de B.Sol: **rg(B)=3**

4. De la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que det(A) = 4. Se pide:
(a) [1’25 puntos] Halla $\det(-3A^t)$ y det $\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$propiedades que utilizas.
(A^t es la matriz traspuesta de A).**Sol: 36, 24**
(b) [0’75 puntos] Calcula $\det(A^{-1}.A^t)$.**Sol:1**
(c) [0’5 puntos] Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla det(B). **Sol:1**

5. Sean F_1, F_2 , F_3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
(a) [0'5 puntos] El determinante de B^{-1}.**Sol: -1/2**
(b)[0'5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B. **Sol: 16**
(c) [0'5 puntos] El determinante de 2B.**Sol: -16**
(d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.**Sol:30**

6. Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:
(a) [1 punto] | - 3A| y $|A^{-1}|$
(b) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$. (c) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$. (e) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$
(c) Sol:a)1/2, b)-4, c)-2 e)30 f)-2

7. Sean C1, C2 y C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de 2A.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, 3C1 − C3, 2C3 y C2.

Sol: $|A^3| = 125;\ |A^{-1}| = \frac{1}{5};\ |2A| = 40;\ |3C_1 - C_3, 2C_3, C_2| = -30$

Rango

8. Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Discute el rango de A según los valores de "k".
(b) [1 punto] Para "k = 1", calcula el determinante de $2(A^tA^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.

Sol:a) K=0, K=-1; K=-2 R(A) =2 reto valores R(A) =3 b) 8 (Aplicamos propiedades determinantes)

9. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) Encuentra el valor, o los valores, de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo rango. **Sol: m=0 R(A)=R(B)=2**
b) Determina, si existen, los valores de *m* para los que *A* y *B* tienen el mismo determinante.
Sol $m = -1$ y $m = -4$, el det(A)=det(B).

10. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes**. Sol: si m ≠ 0 y m ≠ -1, | M | ≠ 0 y los vectores fila son linealmente independientes.**
(b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m.
Sol:Si m ≠ 0 y m ≠ -1, | M | ≠ 0 y rango (M) = 3.Para los otros valores rango =2
(c) [0'75 puntos] Para m = 1, calcula la inversa de M. **Sol:** $M^{-1} = (1/2).\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de *A* dependiendo de los valores α .**Sol: α =1 R(A) =1 $\alpha = -2$ R(A) =2 resto R(A)=3.**b) Para α = 2 , resuelve la ecuación matricial *A*· *X* = *B* ***Sol: X=*** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

a) **Sol:** Si $k \neq +\sqrt{3}$ y $k \neq -\sqrt{3}$ rango(A) = 3 Si $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$,rango(A) = 2

(b) [1'25 puntos] Para k = 0, halla la matriz inversa de A. $A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

13. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A\cdot B^t+\lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula la matriz X que verifica: $C\cdot X-X=2I$

Sol:

a) Si $\lambda\neq 0\Rightarrow$ Rango(A) = 3.
Si $\lambda=0\Rightarrow$ Rango(A) = 1.

b) $\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\2&0&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$

14. Considera la matriz: $A=\begin{pmatrix}0&1&m\\m-1&0&2\\0&1-m&0\end{pmatrix}$

a) Halla el valor, o valores, de *m* para los que la matriz *A* tiene rango 2. **Sol: m=0 y m=1**

b) Para m=1 determina A^{2016} **Sol: O_3**

15. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}. **Sol: no existe B^{-1}.A^{-1}:** $(1/2)\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) [0'25 puntos] Halla el **determinante** de $AB^{2013}A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. **Sol:0**

c) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface AX - B = AB. **Sol:** $\begin{pmatrix}-2&-2&5/2\\3&-1&1/2\\0&0&-3/2\end{pmatrix}$

16. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&6\end{pmatrix}$

a) [0'75 puntos] Halla A^{-1}. **Sol:** $(-1/2)\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\-2&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$

b) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ **Sol:** $\begin{pmatrix}0&8\\-1&14\\1&-6\end{pmatrix}$

c) [0'5 puntos] Halla el **determinante** de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$. **Sol.=0**

17. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) [1'25 puntos] Justifica que A es invertible y halla su inversa.

(c) [0'75 puntos) Calcula razonadamente A^{100}.

Sol: b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}$ **c) $A^{100}=-A$**

18. Sea $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

(a) [1'75 puntos] Comprueba que $A^2 = 2\cdot I$ y calcula A^{-1}.**Sol .A^{-1}=** $(1/2)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

(b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa. **Sol: A^{-1}=** $\frac{1}{2^{1007}}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ A= $(2^{1006})\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

19. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3, probar que $A^3 + I = O$.

b) Calcular A^{10}.

Solución: $A^{10} = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

20. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1'5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).
b) [1 puntos] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

Sol: a) $(1/3)\cdot\begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)0**

21. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.
(b) [1'5 puntos] Para k = 0, resuelve la ecuación matricial (X + I).A = A^t, donde I de nota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.
Sol: a) La matriz **A no tiene inversa si k = 1/2**. B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

22. Sean ***A*** ,***B*** , ***C*** y ***X*** matrices que verifican ***AXB = C***

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de ***A*** es ***3***, el de ***B*** es ***-1*** y el de ***C*** es ***6***, calcula el determinante de las matrices ***X*** y ***2X Sol:-16***

b) Calcula la matriz ***X*** Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ***Sol:*** $\begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1,25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz A^2+ 3A no tiene inversa.
Sol: λ **= -1 y** λ **= -4.**
(b) [1,25 puntos] Para λ = 0, halla la matriz X que verifica la ecuación AX + A = 2I, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Sol: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

24. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es (1/12).A. **Sol: α = - 3.**
(b) [1'25 puntos] Para α = -3, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.**Sol:** $(1/12).\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

Considera A, siendo a un número real. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ **Sol a=4**

(b) [1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes 2 A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

Sol:- $4a^2$,- a^2

(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta. **Sol: No es posible**

25. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala

(b) [1'5 puntos] Determina la matriz X que cumple que $A.X + C.B^t = B.B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Sol:a) $\frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}$

26. Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.

(b) [1'25 puntos] Para b = 2 halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Sol: a) la única solución que verifica las cuatro ecuaciones es b = 2. b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

27. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

(b) [1'25 puntos] Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes utilizar la igualdad del apartado (a)). Sol: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Sistemas de Ecuaciones

28. Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) [1'25 puntos] Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B_t la matriz traspuesta de B).

Sol: a) X $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **Y=** $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b) Sol Z=** $\begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

29. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta)

b) [1'25 puntos] Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

Sol: a) X = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **Y=** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ **b) Z=** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

30. a) [1 puntos] Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula, si existe, la matriz inversa de ***A***

b) [1'5 puntos] Calcula las matrices ***X*** e ***Y*** que satisfacen las ecuaciones matriciales ***XA = A + 2B*** y ***AY = A + 2B***

Sol: a) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ***b) X=*** $\begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$ ***Y=*** $\begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$