11 INTEGRALES DEFINIDAS

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

1 **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$

c) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} dx$

d) $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

e) $\int_{2}^{8} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2 x \cos x\, dx$

g) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

h) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

i) $\int_{0}^{5} x^2 e^x\, dx$

j) $\int_{2}^{3} \frac{x\, dx}{(1-x)^2}$

a) $\frac{-9}{2}$

b) 0

c) 1

d) $\frac{13}{2}$

e) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 8}$

f) $\frac{2}{3}$

g) $\frac{\pi}{6}$

h) $\frac{\pi}{2}$

i) $17e^5 - 2$

j) $\ln 2 + \frac{1}{2}$

2 **Halla la derivada de las siguientes funciones.**

a) $F(x) = \int_{a}^{x} \ln t\, dt$ ***b)*** $F(x) = \int_{2}^{x^2} \frac{dt}{t}$ ***c)*** $F(x) = \int_{2}^{x^2} e^t\, dt$

a) $F'(x) = \ln x$

b) $F'(x) = \frac{2}{x}$

c) $F'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

3 **Averigua el área que determinan la gráfica de la función $f(x) = |2x + 3|$, el eje de ordenadas, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = -2$.**

Sol: 2,5 u^2

4 **Determina el área de la región delimitada por la curva $y = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ y el eje de abscisas.**

Sol: 9,7604… u^2

5 **Calcula el área del trapecio mixtilíneo que determina la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(2x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.**

Sol: 0,5 u^2

6 **Calcula el área de la región del plano encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 2$.**

La curva corta al eje de abscisas en $x = 1$.

Sol: 0, 39 u^2

7 **Calcula el área que determinan la curva $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, los ejes de coordenadas y la recta de ecuación $x = 2$.**

La curva corta al eje vertical en (0, 1).

Sol: $\frac{2}{3} u^2$

8 **Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, el eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 4$.**

Sol: 3,1361 u^2

9 **Calcula el área delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.**

Sol: $\frac{1}{3} u^2$

10 **Determina el área de la región del plano limitada por las curvas $y = x^4 + 2x^2$ e $y = x^2 + 2$.**

Sol: $\frac{44}{15} u^2$

11 **Calcula el valor del coeficiente b sabiendo que el área delimitada por la parábola $y = x^2 + bx - 2$ y la recta $2x + y + 2 = 0$, es $\frac{4}{3} u^2$.**

Sol: $b = 0$ y $b = -4$.

12 **Averigua el área que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Sol: $4\sqrt{2}\, u^2$

13 **Calcula el volumen del elipsoide de revolución engendrado por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ al girar en torno al eje X.**

Sol: $\frac{16\pi}{3} u^3$

14 **Calcula el volumen del sólido engendrado al girar en torno al eje X el recinto limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.**

Sol: $\frac{3\pi}{10} u^3$

15 Calcula el volumen del sólido engendrado por el giro respecto del eje X formado por la curva $y = xe^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Sol: $\frac{e^2 - 1}{4}\pi\ u^3$

Ejercicios y problemas

Integral definida

16 Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{-1}^{0} x^2 (x^3+2)^2\,dx$

d) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

e) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$

f) $\int_{1}^{e} \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

g) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{2+2x^2}\,dx$

h) $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

i) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x\,dx$

j) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 (x+\pi)\,dx$

a) $\frac{16}{3}$

b) 0

c) $\frac{7}{9}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{12}$

f) $\frac{1}{4}$

g) 0

h) $\frac{2}{3}$

i) $\frac{\ln 2}{2}$

j) 2

17 Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

b) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2+x+1}$

c) $\int_{4/3}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

d) $\int_{0}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

e) $\int_{0}^{1} \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

f) $\int_{1}^{e} \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

g) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$

h) $\int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx$

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$

j) $\int_{0}^{2} \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\pi^2 - 4$

e) $\frac{\pi}{2} - 1$

f) $1 - \cos 1$

g) $\frac{\ln 3}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

h) 0

i) 2

j) $2 + \ln 5$

18 Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

b) $\int_{-3}^{1} |1-x^2|\,dx$

c) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

e) $\int_{0}^{1} \frac{2x+5}{x^2-x-2}\,dx$

f) $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$

g) $\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

h) $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{x+1}\,dx$

a) $\frac{\pi}{4}$

b) 8

c) $4 - 2\sqrt{e}$

d) $\frac{4}{15}$

e) $-4\ln 2$

f) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

g) $4 - 2\sqrt{2} + \ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$

h) $\ln 3$

19 Razona las afirmaciones siguientes:

a) El área de un trapecio mixtlíneo determinado por una función f continua en $[a, b]$ es el valor de la integral definida en dicho intervalo.

b) Si una función continua toma valores positivos y negativos en un intervalo $[a, b]$, el área que determina en dicho intervalo puede ser nula.

c) Para calcular el área que determina una función f definida negativa en $[a, b]$ hacemos $A = \int_{b}^{a} f$.

a) No es cierta.

b) No es cierta.

c) Es una afirmación cierta.

20 Sean las funciones $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Calcula $\int_{-1}^{0} x^2 (g \circ f)(x)\,dx$.

Sol: $-0{,}75$

21 El polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ se anula en $x = 2$ y cumple $\int_{0}^{2} p(x)\,dx = 4$. Calcula razonadamente a y b.

Sol: $a = -\frac{14}{3}$ y $b = \frac{16}{3}$.

22 Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

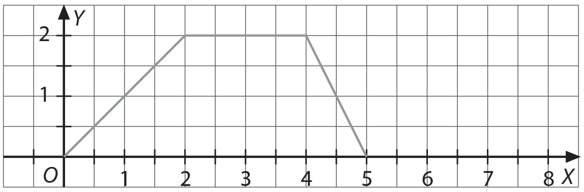
a) Calcula su máximo y mínimo absolutos.

b) Calcula $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

a) En $x = \frac{-1}{2}$ la función alcanza su valor máximo y en $x = \frac{1}{2}$ su valor mínimo.

b) $1 - \ln\sqrt{5}$

23 Se considera la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0, 5]$ que aparece representada en la figura siguiente:



a) ¿Cuál es la expresión de su función derivada cuando existe?

b) Calcula $\int_0^3 f(x)dx$.

a)
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{si } x \in (2, 4) \\ -2 & \text{si } x \in (4, 5) \end{cases}$$

b) 4 u^2

Teorema fundamental del cálculo integral

24 Halla el valor medio en el intervalo que se indica y señala para qué valor de dicho intervalo se alcanza.

a) $f(x) = \text{sen } x + 1$ en $[0, \pi]$

b) $f(x) = \ln x$ en $[e, e^2]$

a) El valor medio es: $f(c) = \dfrac{2 + \pi}{\pi}$ $\quad c = 0{,}69$ rad

b) El valor medio es: $f(c) = \dfrac{e}{e - 1}$ $\quad c = 4{,}86$

25 Halla el valor medio de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo $[0, 2]$ y calcula en qué punto del intervalo se alcanza.

Sol: $f(c) = \dfrac{e^2 + 1}{2} = 4{,}19$ $\quad c = 1{,}22$

26 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $G(x) = \int_3^x \dfrac{dt}{t + 5}$

b) $G(x) = \int_3^{x^2} \dfrac{dt}{t + 5}$

c) $G(x) = \int_x^{x^2} e^{2t + 1} dt$

d) $G(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$

a) $G'(x) = \dfrac{1}{x + 5}$

b) $G'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$

c) $G'(x) = 2x\,e^{2x^2 + 1} - e^{2x + 1}$

d) $G'(x) = 2\,e^{4x^2}$

Áreas

27 Dada la función $f(x) = x - 4 + \dfrac{16}{x + 4}$, calcula el área limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Sol: $0{,}487 \text{ u}^2$

28 Sabiendo que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(1, -4)$ y que su función derivada es $f'(x) = 2x - 2$:

a) Determina la expresión de $f(x)$.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas X.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $\dfrac{32}{3} \text{ u}^2$

29 Se sabe que cierta función derivable $F(x)$ verifica las condiciones $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ y $F(1) = 3$.

a) Calcula $F(x)$.

b) Calcula el área delimitada por $F(x)$ y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

a) $F(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{3}$

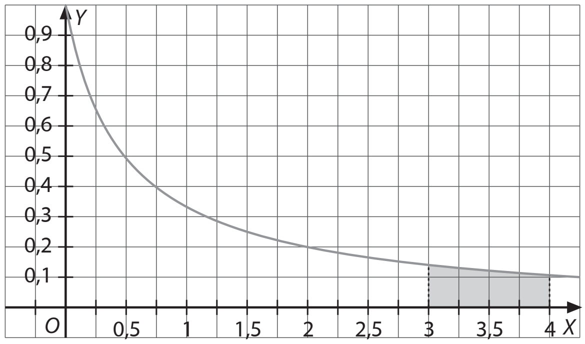
b) $\dfrac{17}{7}$

30 Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = xe^x$ en x 0, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 1$.

La función es positiva en $x > 0$ de modo que el área de la región dada en el enunciado es:

Sol: 1 u^2

31 La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$ para $x > 0$, es:



a) Halla una primitiva de f.

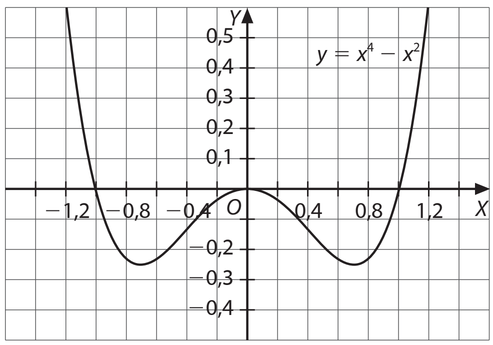
b) Calcula el área de la región sombreada.

a) $F(x) = \dfrac{\ln(2x + 1)}{2}$

b) $\ln\dfrac{3\sqrt{7}}{7} \text{ u}^2$

32 Buscando sus extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes, realiza una representación aproximada de la curva de ecuación $y = x^4 - x^2$. A continuación, calcula el área encerrada por esta curva y el eje de abscisas.

Sol:



$A = \dfrac{4}{15} \text{ u}^2$

33 **Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:**

a) **Dibuja su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.**

b) **Calcula el área comprendida entre el eje X y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.**

a) Dom $f = \mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales.

$y = 0$ asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

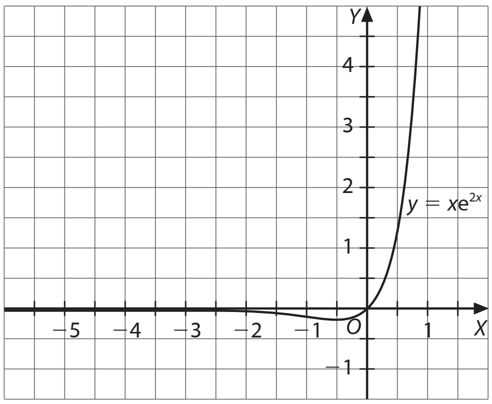
no hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

En $x = -1/2$ hay un mínimo

f es creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y f es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$.

En $x = -1$ hay un punto de inflexión.

f es cóncava en $(-1, +\infty)$ y f es convexa en $(-\infty, -1)$.



b) 2,25 u²

34 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje X.**

Sol: 9,827 u²

35 **Sea la función $y = 2e^{-2|x|}$:**

a) **Estudia su monotonía, extremos relativos y asíntotas.**

b) **Calcula el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.**

a) si $x < 0$, y es creciente.

si $x > 0$, y es decreciente.

$y = 0$ es una asíntota horizontal.

El máximo se encuentra en $x = 0$: $M(0, 2)$

b) $2\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)$ u²

36 **Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas $y = x^2 + 2x - 1$ e $y = -x^2 + 3$.**

Sol: 9 u²

37 **Calcula el área comprendida entre las gráficas de $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$ en el primer cuadrante.**

Sol: 12,17 u²

38 **Determina el área encerrada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$ en el primer cuadrante.**

Sol: $\dfrac{1}{2}$ u²

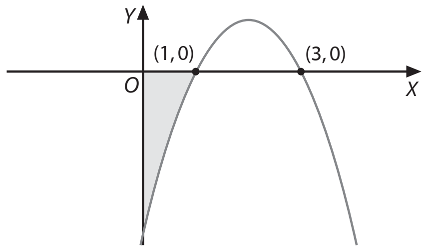
39 **Calcula el área del recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = x^2$ cuando se consideran valores de $x \le 0$.**

Sol: $\dfrac{5}{12}$ u²

40 **Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$, $y = 1$ y $x = 0$.**

Sol: 1 u²

41 **En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado dos. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son el (1, 0) y el (3, 0). Además, el área limitada por la curva y los dos ejes de coordenadas vale 4/3 u². Halla la expresión de la función polinómica.**



Sol: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

42 **Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.**

Sol: 1,24 u²

43 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$ y el eje de abscisas.**

Sol: $\dfrac{10}{3}$ u²

44 **Calcula el área del recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las gráficas de $f(x) = x\,e^{-3x}$ y $g(x) = (x^2 - x)\,e^{-3x}$.**

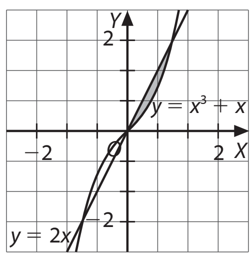
Sol: 0,15 u²

45 **Calcula el área del recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por el trozo de elipse $x^2 + 9y^2 = 9$, con $x \ge \dfrac{3}{2}$.**

Sol: 1,84 u²

46 **Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abscisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$ y por la recta $y = 2x$. Calcula su área.**

Sol:



$A = 0,25$ u²

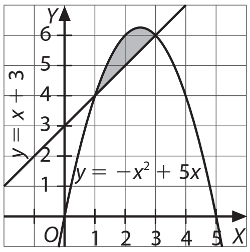
47 **Dadas las funciones:**

- $f(x) = -x^2 + 5x$
- $g(x) = x + 3$

a) **Dibuja el recinto plano limitado por las funciones.**

b) **Halla su área.**

a)



b) $\frac{4}{3}$ u^2

48 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Calcula el área del recinto limitado por la tangente y la curva dada.**

Sol: La recta tangente es $y = 2$.

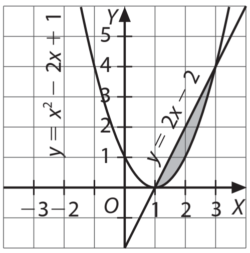
A = 6,75 u^2

49 **Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y el segmento que une los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$.**

Sol: $\frac{2}{e}$ u^2

50 **La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito del plano. Traza un esquema gráfico de dicho recinto y calcula su área.**

Sol: $\frac{4}{3}$ u^2



51 **Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + x - 2}$ es estrictamente positiva en $(2, +\infty)$ y halla el área de la región determinada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.**

Sol: 0,627 u^2

52 ***a)*** **Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.**

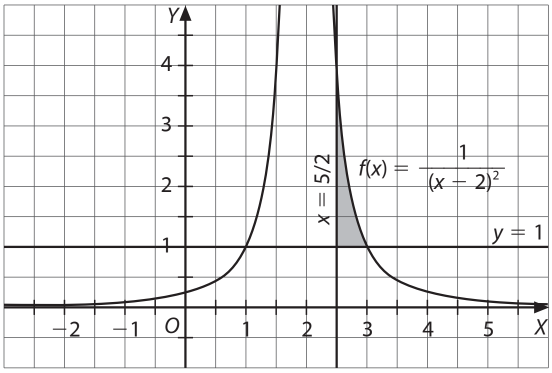
b) **Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.**

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

En $(-\infty, 2)$ la función es creciente, en $(2, +\infty)$ la función es decreciente. No hay extremos.



b) Cuando $y = 1$, la curva y la recta se cortan en $x = 3$

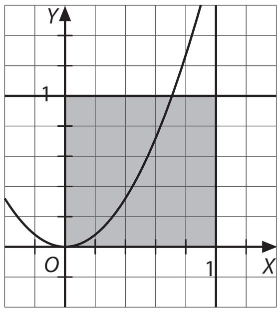
$A =$ 0,5 u^2

53 **La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(1,0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$ en dos recintos.**

a) **Dibuja dichos recintos.**

b) **Halla el área de cada uno.**

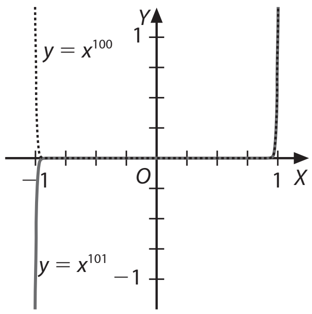
a)



b) $A_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ u^2 $\qquad$ $A_2 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{3}$ u^2

54 **Haz un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ y $y = x^{101}$. Calcula el área de este recinto.**

Sol:



$A = \dfrac{1}{10\,302}$ u^2

55 **Calcula el área que, en el primer cuadrante, delimitan las curvas $y = x^2$, $y = 4x^2$ e $y = 16$.**

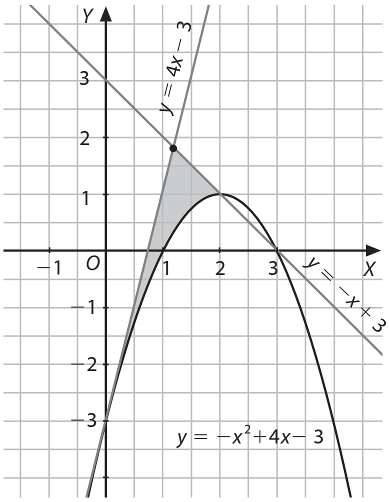
Sol: $\frac{64}{3}$ u^2

56 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$, $y = \ln 3$ y $x = 0$.**

Sol: 2 u^2

57 Dibuja el recinto limitado por $y = -x^2 + 4x - 3$, su recta tangente en el punto $P(0, -3)$ y la recta $y = -x + 3$. Calcula su área.

Sol:

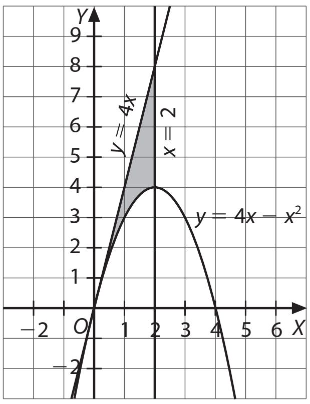


$$A = \frac{16}{15}\ u^2$$

58 Calcula el área de la región plana limitada por la parábola $y = 4x - x^2$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Dibuja también esta región.

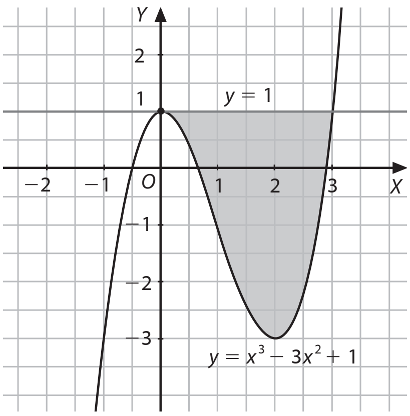
Sol:

$$A = \frac{8}{3}\ u^2$$



59 Halla el área limitada por $y = x^3 - 3x^2 + 1$ y la recta tangente a la misma en el punto en que alcanza su máximo relativo. Dibuja el recinto.

Sol:



$$A = \frac{27}{4}\ u^2$$

60 Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $xy = 1$ y la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ que pase por el punto de coordenadas (1, 1).

Sol: $\left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) u^2$

61 Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1}$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

Sol: $2(1 - \ln 2)\ u^2$

62 Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}\ x$ y $g(x) = \cos x$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

Sol: $0{,}45\ u^2$

63 Calcula el área del recinto finito limitado por una gráfica de la función $f(x) = x^4$, su recta tangente en el punto (1, 1) y el eje Y.

Sol: $\frac{6}{5}\ u^2$

64 Calcula el valor de a para que el área delimitada por la curva $y = a\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y las rectas $y = 0$ y $x = \pi$, sea igual a 4.

Sol: $a = 2$ o $a = -2$

65 Encuentra la recta vertical $x = k$ que divide en dos partes iguales el área del recinto que está limitado por las curvas $y = x^2$, $x = 2$ e $y = 0$.

Sol: $x = \sqrt[3]{4}$

66 Calcula el valor de a para que el área delimitada por la recta $y = a$ y la parábola $y = -x^2 + 1$ sea $A = \frac{8\sqrt{2}}{3}\ u^2$.

Sol: $a = -1$

67 Dada la curva $y = x^2 + a$:

a) Calcula el valor de a para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisa de valor absoluto 1, pasen por el origen de coordenadas.

b) Para $a = 1$, halla el área de la región del plano delimitada por la curva y las tangentes a la curva en los puntos (1, 2) y (−1, 2).

a) $a = 1$

b) $\frac{2}{3}\ u^2$

68 Calcula el valor positivo de a tal que el área comprendida entre $y = ax + 2a$ e $y = ax^2$ sea 18.

Sol: $a = 4$

69 **Considera la parábola $y = x^2 + 2x - 3$.**

a) **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.**

b) **Calculando el mínimo de la función $y = x^2 + 2x - 3$, halla el vértice de la parábola.**

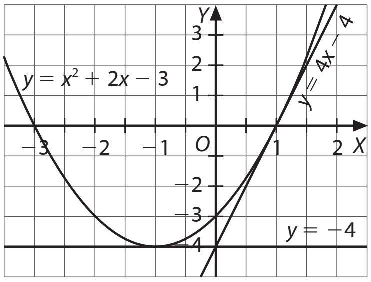
c) **Halla los puntos de intersección de la parábola con los ejes y realiza una representación gráfica de la parábola y de las tangentes obtenidas en el apartado *a)*.**

d) **Calcula el área comprendida entre la parábola y las rectas tangentes.**

a) En $x = -1$, $y = -4$.
En $x = 1$, $y = 4x - 4$.

b) $(-1, -4)$.

c) $(-3, 0), (1, 0), (0, -3)$.



d) $\frac{2}{A}$ u²

Volúmenes

70 **Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto limitado por la curva $y = x(x - 1)$ y el eje de abscisas, al girar alrededor de dicho eje.**

Sol: $\frac{\pi}{30}$ u³

71 **Calcula el volumen del casquete parabólico generado por la parábola $y = 3x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, al girar alrededor del eje *X*.**

Sol: $\frac{288\pi}{5}$ u³

72 **El eje *X* y la gráfica de una cierta función *f* limitan un recinto plano. Este recinto gira alrededor del eje *X* y genera un volumen. Hállalo sabiendo que *f* se define como $x + 2$ en el intervalo [2, 4], vale 2 en [4, 6] y es nula en el resto de la recta real.**

Sol:184,31 u³

73 **Calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ alrededor del eje *X*.**

Sol: $\frac{2\pi}{3}$ u³

74 **Calcula el volumen de la figura de revolución que obtenemos si hacemos girar alrededor del eje de abscisas la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$.**

Sol: $\pi(e - 2)$ u³

75 **Calcula el volumen que engendra la figura del plano delimitada por la hipérbola $xy = 1$ y la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{\sqrt{17}}{2}$ en el primer cuadrante.**

Sol: 9/4π u³

76 **En un depósito esférico de 1 m de radio tenemos una cierta cantidad de agua. Calcula cuántos litros hay si sabemos la distancia entre el punto más bajo del depósito y el nivel de agua es de medio metro. (Ten en cuenta que un casquete esférico es una figura de revolución).**

Sol: 654,5 litros

77 **Considera la figura plana encerrada entre las curvas $y = \sqrt[3]{x^2}$ e $y = x^2$, cuando $0 \le x \le 1$. Halla el volumen que genera cuando da una vuelta completa alrededor del eje *X*.**

Sol: $\frac{8}{35}\pi$ u³

78 **Encuentra el valor de $k > 0$, tal que el volumen del cuerpo de revolución generado por la curva $y = kx^2$, $0 \le x \le 1$, al girar en torno al eje *X* sea igual a 1.**

Sol: $k = \frac{\sqrt{5\pi}}{\pi}$

Ejercicios de aplicación

79 **Considera la función $f(x) = x^2 + |x|$.**

a) **Calcula los puntos en que la gráfica corta a los ejes.**

b) **Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento *f*.**

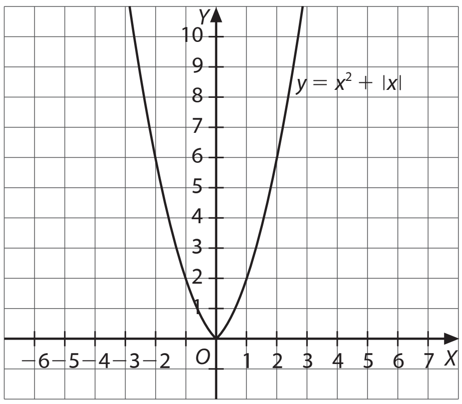
c) **Dibuja la gráfica de *f*.**

d) **Calcula $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.**

a) (0, 0).

b) $f(x)$ decrecen en $x < 0$
$f(x)$ crecen en $x > 0$
Mínimo absoluto: $m(0, 0)$

c)



d) $\frac{11}{2}$

80 **Dadas $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$.**

a) **Calcula *a* y *b* de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 3$, es decir, que tengan la misma tangente en este punto.**

b) **Halla la ecuación de la recta tangente del apartado *a)*.**

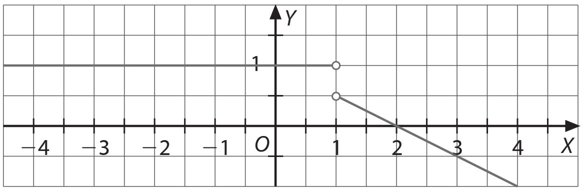
c) **Para el valor de a obtenido en el primer apartado, calcula el valor del área de la región limitada por el eje de abscisas y la función $f(x)$.**

a) $a = 3, b = -\frac{17}{2}$

b) $y = 3x - 13$

c) $\frac{125}{6}$u²

81 **La función derivada $f'(x)$ de una cierta función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función a trozos formada por las semirrectas del dibujo.**



a) **Determina si es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y por qué.**

b) **Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.**

c) **Averigua si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de que tipo.**

d) **Sabiendo que $f(0) = 1$, calcula $f(1)$.**

a) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) La función crece $x \in (-\infty, 2)$ y decrece $x \in (2, +\infty)$.

c) Para $x = 2$ tenemos un máximo relativo.

d) $f(1) = 2$

82 **Sea la función $f(x) = \text{sen}\, x$.**

a) **Calcula $a > 0$, tal que el área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje X y la recta $x = a$, sea 1/2.**

b) **Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/4$.**

c) **Calcula el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$.**

a) $a = \dfrac{\pi}{3}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $0{,}57\ \text{u}^2$

83 **Halla el área de la elipse $\dfrac{x^2 + y^2}{4} = 1$ y el volumen del sólido engendrado al girar dicha elipse sobre el eje X.**

Sol: $A = 4\pi\ \text{u}^2$ $\quad V = \dfrac{32\pi}{3}\ \text{u}^3$

84 **Los beneficios de una empresa, en miles de euros por año, se ajustan a la siguiente función:**

$$B(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$$

¿A cuánto ascienden los beneficios acumulados en los cinco primeros años de vida de la empresa?

Sol: 4 952,50 €.

85 **Un proyectil se lanza desde un avión con velocidad, en m/s, de ecuación $v(t) = 10 + 32t$. Si a los 10 s todavía no ha llegado al suelo, ¿qué se puede afirmar sobre la altura a la que va el avión?**

Sol: La altura a la que va el avión es superior a los 1 700 m.

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

86 **Halla todos los valores reales z tales que**

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}\, dx = \ln 25$$

a) **$z = 9, z = 3$**

b) **No tiene solución.**

c) **$z = \pm 3, z = 9$**

Sol: La respuesta correcta es la ***a)***

87 **Calcula el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = e^{2x}$ e $y = e^{-2x}$, y la recta $y = 5$.**

a) **$\ln 5\ \text{u}^2$**

b) **$(5 \ln 5 - 4)\ \text{u}^2$**

c) **$0\ \text{u}^2$**

Sol: La respuesta correcta es la ***b)***.

88 **En un plano el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?**

a) **15 600 €**

b) **16 000 €**

c) **23 300 €**

Sol: La respuesta correcta es la ***b)***.

1. **Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, halla la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha parti-ción y dicho intervalo.**

   Sol: Suma superior: 14

   Suma inferior: 1

2. **Halla el valor medio de la función $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 2]$.**

   Sol: 2,07

3. **Encuentra el punto en el que se alcanza el valor medio de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo $[-2, 1]$.**

   Sol: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

4. **Determina la derivada de la función $G(x) = \displaystyle\int_4^{x+3} \frac{1}{t-3}$ en $x = 2$.**

   Sol: $G'(2) = \dfrac{1}{2}$

5. **Calcula el área limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.**

   Sol: $\dfrac{3}{2}$ u^2

6. **Calcula el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ y el eje de abscisas.**

   Sol: $\dfrac{32}{3}$ u^2

7. **Halla el área de la región del plano delimitada por la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y las rectas $y = x + 1$ y $x = 3$.**

   Sol: 9,751611… u^2

8. **¿Cuál es el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$?**

   Sol: 5,869… u^2

9. **Halla el área delimitada por los ejes de coordenadas, la curva $y = \sqrt{x - 2}$ y la tangente a dicha curva en el punto de abscisa 6.**

   Sol: $\dfrac{13}{6}$ u^2

10. **Determina una constante positiva, a, sabiendo que la figura plana delimitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$, tiene área $A = (a^2 - 1)^2$.**

    Sol: $a = \sqrt{3}/3$

11. **Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al hacer girar la curva de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$, en torno al eje X, entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.**

    Sol: $\dfrac{\pi^2 \sqrt{2}}{8}$ u^2

12. **La evolución de la demanda de un producto, en miles de artículos, en los cinco años transcurridos desde su aparición en el mercado, viene dada por la expresión $d(t) = 16e^{-0,1t}$, donde t expresa el tiempo, contado por semestres. Encuentra:**

    a) **El número de artículos demandados durante los tres primeros años.**

    b) **La demanda media de artículos durante los dos últimos años.**

    a) Unos 72 190 artículos.

    b) Una media anual de 28 949 artículos.