

# 10

# INTEGRALES INDEFINIDAS

## ACTIVIDADES

- 1** Comprueba que las integrales de las funciones que se ofrecen en la tabla son correctas derivando los resultados para obtener la función que se integra.

### INTEGRALES INMEDIATAS

$\int k \, dx = kx + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x  + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ si } a > 0 \text{ y } a \neq 1$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C$

- 2** Calcula las siguientes integrales, descomponiéndolas si es necesario.

$$\begin{array}{ll} a) \int x^{10} \, dx & e) \int \sqrt{2x^3} \, dx \\ b) \int \frac{1}{x^2} \, dx & f) \int 4\sqrt{3x} \, dx \\ c) \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx & g) \int \frac{5}{\sqrt{5x^3}} \, dx \\ d) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 3}} \, dx & h) \int \left(2x - \frac{3}{x^4}\right) \, dx \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} i) \int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 7) \, dx & m) \int \frac{4^x + 6^x}{2^{x-1}} \, dx \\ j) \int \left(3x + 4x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \, dx & n) \int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2 - 2x} \, dx \\ k) \int (e^x + 3^x - \sin x + 4) \, dx & \tilde{n}) \int \cot^2 x \, dx \\ l) \int \frac{x^3 - 2\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{x} - 1}{5x} \, dx & o) \int \sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x^2 \sqrt{x^3}}} \, dx \\ a) \frac{x^{11}}{11} + C & \\ b) -\frac{1}{x} + C & \\ c) \frac{-2}{\sqrt{x}} + C & \\ d) \frac{-2}{x\sqrt{x}} + C & \\ e) \frac{2x^2\sqrt{2x}}{5} + C & \\ f) \frac{8x\sqrt{3x}}{3} + C & \\ g) \frac{-10}{\sqrt{5x}} + C & \\ h) x^2 + \frac{1}{x^3} + C & \\ i) \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C & \\ j) \frac{3x^2}{2} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C & \\ k) e^x + \frac{3^x}{\ln 3} + \cos x + 4x + C & \\ l) \frac{x^3}{15} - \frac{6\sqrt[3]{x}}{5} + \frac{4x\sqrt{x}}{15} - \frac{\ln|x|}{5} + C & \\ m) 2 \left( \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} \right) + C & \\ n) x + \arctan x + C & \\ \tilde{n}) -\cot x - x + C & \\ o) \frac{8}{19} \cdot x^2 \sqrt[8]{x^3} + C & \end{array}$$

**3** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int x(3x^2 - 5)^5 dx$

b)  $\int e^{2x+1} dx$

c)  $\int \frac{3x+1}{x^2+4} dx$

d)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} dx$

e)  $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^3 - 4x^2 + 2x + 5} dx$

f)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

a)  $\frac{(3x^2 - 5)^6}{36} + C$

b)  $\frac{e^{2x+1}}{2} + C$

c)  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$

d)  $\sqrt{e^{2x} + 3} + C$

e)  $\frac{1}{2} \ln |2x^3 - 4x^2 + 2x + 5| + C$

f)  $\frac{(\ln|x|)^2}{2} + C$

g)  $\ln|1 + \sen x| + C$

h)  $\frac{\sen^2 3x}{6} + C$

i)  $\frac{1}{5} \tg 5x^2 + C$

j)  $\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$

k)  $-\sqrt{5 - x^2} + C$

l)  $-2 \ln|1 - \sqrt{x}| + C$

**4** Resuelve estas integrales ensayando, si es preciso, un cambio de variable.

a)  $\int \frac{5x}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx$

b)  $\int \frac{dx}{1 + 3x^2}$

c)  $\int \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^4}} dx$

a)  $-\frac{5}{2} \sqrt{1 - 2x^2} + C$

b)  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg(\sqrt{3}x) + C$

c)  $\frac{1}{2} \arcsen 3x^2 + C$

g)  $\int \frac{\cos x}{1 + \sen x} dx$

h)  $\int \sen(3x) \cos(3x) dx$

i)  $\int \frac{2x}{\cos^2 5x^2} dx$

j)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

k)  $\int \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} dx$

l)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$

a)  $\frac{(3x^2 - 5)^6}{36} + C$

b)  $\frac{e^{2x+1}}{2} + C$

c)  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$

d)  $\sqrt{e^{2x} + 3} + C$

e)  $\frac{1}{2} \ln |2x^3 - 4x^2 + 2x + 5| + C$

f)  $\frac{(\ln|x|)^2}{2} + C$

g)  $\ln|1 + \sen x| + C$

h)  $\frac{\sen^2 3x}{6} + C$

i)  $\frac{1}{5} \tg 5x^2 + C$

j)  $\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$

k)  $-\sqrt{5 - x^2} + C$

l)  $-2 \ln|1 - \sqrt{x}| + C$

**5** Resuelve estas integrales, realizando el cambio de variable indicado.

a)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$        $t^2 = x^2 + 1$

b)  $\int x^3 (x^2 + 1)^6 dx$        $t = x^2 + 1$

c)  $\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$        $t = \sqrt{x}$

d)  $\int x \sqrt{1 + x} dx$        $t^2 = 1 + x$

e)  $\int \frac{2^x - 3 \cdot 4^x}{2 + 4^x} dx$        $t = 2^x$

f)  $\int \frac{\ln x}{x \ln(2x)} dx$        $t = \ln x$

g)  $\int \frac{2e^x}{e^x + 2e^{-x}} dx$        $t = e^x$

h)  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$        $t = \sqrt{x}$

a)  $\frac{(\sqrt{x^2 + 1})^3}{3} - \sqrt{x^2 + 1} + C$

b)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2 + 1)^8}{8} - \frac{(x^2 + 1)^7}{7} \right] + C$

c)  $\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + C$

d)  $\frac{2}{5} (\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 + C$

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} \arctg\left(\frac{2^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{2 \ln 2} \ln(2 + 4^x) + C$

f)  $\ln|x| - \ln 2 \ln|\ln|2x|| + C$

g)  $\ln(e^{2x} + 2) + C$

h)  $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$

**6** Resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int x \ln x dx$       f)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

b)  $\int x^2 \sen x dx$

c)  $\int \arc tg x dx$

d)  $\int x^2 e^{2x} dx$

e)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

a)  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

b)  $-x^2 \cos x + 2x \sen x + 2 \cos x + C$

c)  $x \arc tg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

d)  $e^{2x} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$

e)  $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

g)  $\int (x^2 - 2x + 3) e^{-2x} dx$

h)  $\int \cos(3x) e^{2x} dx$

i)  $\int x^3 e^{x^2} dx$

f)  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + C$

g)  $\frac{-2x^2 + 2x - 5}{4} e^{-2x} + C$

h)  $\frac{3}{13} e^{2x} \left( \sen(3x) + \frac{2}{3} \cos(3x) \right) + C$

i)  $\frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$

**7** Resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} dx$

b)  $\int \frac{2x^2 + 5}{x - 1} dx$

c)  $\int \frac{x - 2}{x^2 + 5} dx$

d)  $\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$

e)  $\int \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

a)  $\frac{3x^2}{2} - 2x + C$

b)  $x^2 + 2x + 7 \ln|x - 1| + C$

c)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arc tg} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + C$

d)  $2 \ln|x + 1| + 3 \ln|x - 3| + C$

e)  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc tg} \left( \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$

f)  $-\ln|x| + \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} + C$

g)  $\ln|x + 1| + \frac{1}{5} \ln|x - 2| - \frac{6}{5} \ln|x + 3| + C$

h)  $\frac{11}{12} \ln|x + 2| + \frac{13}{24} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arc tg} \left( \frac{x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$

i)  $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln(2 + e^x) + C$

**Ejercicios y problemas**

**Cálculo de integrales**

**8** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 \sqrt{x} dx$

b)  $\int \frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x} dx$

c)  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

d)  $\int \frac{3}{x \ln(2x)} dx$

e)  $\int \operatorname{sen}^2(3x) \cos(3x) dx$

a)  $\frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + C$

b)  $-\ln|3 + \cos x| + C$

c)  $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$

d)  $3 \ln|\ln|2x|| + C$

e)  $\frac{\operatorname{sen}^3(3x)}{9} + C$

**9** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{\sqrt{7 + 2 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$

b)  $\int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$

c)  $\int \operatorname{tg}(2x + 1) dx$

d)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

e)  $\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$

a)  $\frac{\sqrt{(7 + 2 \operatorname{tg} x)^3}}{3} + C$

b)  $-2 \ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen} x| + C$

c)  $-\frac{1}{2} \ln|\cos(2x + 1)| + C$

d)  $\sqrt{x^2 + 1} + C$

e)  $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$

f)  $\int \frac{x}{x^4 + 9} dx$

g)  $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos^3 x} dx$

h)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x \cos^2 \sqrt[3]{x}} dx$

i)  $\int \frac{2e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

j)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1}$

f)  $\frac{1}{6} \operatorname{arc tg} \left( \frac{x^2}{3} \right) + C$

g)  $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{tg} x + C$

h)  $3 \operatorname{tg} \sqrt[3]{x} + C$

i)  $2 \operatorname{arc sen} e^x + C$

j)  $\frac{-1}{4x + 2} + C$

**10** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{\operatorname{ln}(2x^2)}{x} dx$

c)  $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}} dx$

b)  $\int \frac{5x + 2}{1 + 2x^2} dx$

d)  $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}} dx$

a)  $\frac{1}{4} \operatorname{ln}^2(2x^2) + C$

c)  $\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x} + C$

b)  $\frac{5}{4} \operatorname{ln}(1 + 2x^2) + \sqrt{2} \operatorname{arc tg}(\sqrt{2}x) + C$

d)  $\sqrt{2} e^{\sqrt{2x}} + C$

**11** Halla estas integrales.

a)  $\int \operatorname{sen}^3 x dx$

d)  $\int \frac{2e^{-x}}{2 + e^{-x}} dx$

b)  $\int \frac{2x^3}{1 + x^8} dx$

e)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arc sen} x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

c)  $\int \frac{2^x}{1 + 4^x} dx$

f)  $\int 2^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx$

a)  $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

b)  $\frac{1}{2} \operatorname{arc tg} x^4 + C$

c)  $\frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arc tg} 2^x + C$

d)  $-2 \operatorname{ln}|2 + e^{-x}| + C$

e)  $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arc sen} x)^3} + C$

f)  $\frac{2^{\operatorname{sen}^2 x}}{\ln 2} + C$

**12** Determina las siguientes integrales, utilizando los cambios de variable que se indican.

a)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$        $t = \sqrt{x}$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$        $t^6 = x$

c)  $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$        $t = \sqrt{x}$

d)  $\int \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}-1} dx$        $t = \sqrt{5x}$

e)  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$        $t^2 = x^2 - 1$

f)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$        $t^2 = x + 3$

a)  $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$

b)  $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$

c)  $-x - 4\sqrt{x} - 4\ln|1-\sqrt{x}| + C$

d)  $x + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + \frac{2}{5}\ln|\sqrt{5x}-1| + C$

e)  $\sqrt{x^2-1} - \arctan \sqrt{x^2-1} + C$

f)  $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 6\sqrt{x+3} + C$

**13** Halla las siguientes integrales, utilizando los cambios de variable que se indican.

a)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx$        $t^2 = 1 + e^x$

b)  $\int \frac{2}{3x+2\sqrt{x}} dx$        $t = \sqrt{x}$

c)  $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$        $t^2 = x - 1$

a)  $\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+e^x}\right)^3 - 2\sqrt{1+e^x} + C$

b)  $\frac{4}{3}\ln|3\sqrt{x}+2| + C$

c)  $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 2\sqrt{x-1} + C$

**14** Determina el resultado de estas integrales, usando los cambios de variables que se indican.

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{1-x}}$        $t^6 = 1-x$

b)  $\int \frac{3^x+27^x}{1+9^x} dx$        $t = 3^x$

c)  $\int 6x^7(3x^4+2)^{10} dx$        $t = 3x^4 + 2$

a)  $-2\sqrt{1-x} + 3\sqrt[3]{1-x} - 6\sqrt[6]{1-x} + 6\ln|\sqrt[6]{1-x}+1| + C$

b)  $\frac{3^x}{\ln 3} + C$       c)  $\frac{1}{72}\left(3x^4+2\right)^{12} - \frac{1}{33}\left(3x^4+2\right)^{11} + C$

**15** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{x+e^x}{e^{2x}} dx$

e)  $\int x \ln^2 x dx$

b)  $\int x^2 \sin x dx$

f)  $\int e^x \cos x dx$

c)  $\int (x^2+1) \sin(2x) dx$

g)  $\int \sin(\ln x) dx$

d)  $\int x^2 \ln(2x+1) dx$

h)  $\int \arcsin x dx$

a)  $\frac{-x e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x} - e^{-x} + C$

b)  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

c)  $\frac{-x^2 \cos(2x)}{2} + \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$

d)  $\frac{x^3}{3} \ln(2x+1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{12} x + \frac{1}{24} \ln(2x+1) + C$

e)  $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$

f)  $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$

g)  $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

h)  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

**16** Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int x^2 \cos 4x dx$

d)  $\int x^3 e^{-4x^2} dx$

b)  $\int x^5 e^{-x^3} dx$

e)  $\int x \ln(1+x^2) dx$

c)  $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$

f)  $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

a)  $\frac{x^2}{4} \sin 4x + \frac{x}{8} \cos 4x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$

b)  $-\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3 + 1) + C$

c)  $\ln x (\ln x^2 - \ln x) + C$

d)  $-\frac{1}{8} x^2 e^{-4x^2} - \frac{1}{32} e^{-4x^2} + C$

e)  $\frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

f)  $\frac{-\sin x - \cos x}{2e^x} + C$

17 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$

f)  $\int \frac{3x + 2}{[(x - 1)^2 + 3^2](x - 1)} dx$

b)  $\int \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 4} dx$

g)  $\int \frac{10x^2}{9x^3 - 9x^2 + x - 1} dx$

c)  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx$

h)  $\int \frac{5x + 8}{2x^2 - x - 3} dx$

d)  $\int \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^2}$

i)  $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx$

e)  $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

j)  $\int \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx$

a)  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C$

b)  $x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$

c)  $\ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

d)  $\frac{1}{9} \ln|x - 1| - \frac{1}{9} \ln|x + 2| + \frac{1}{3x + 6} + C$

e)  $\frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

f)  $\frac{1}{9} \ln|x - 1| - \frac{1}{18} \ln|x^2 - 2x + 10| + \arctg\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

g)  $\ln|x - 1| + \frac{1}{18} \ln|9x^2 + 1| + \frac{1}{3} \arctg(3x) + C$

h)  $-\frac{3}{5} \ln|x + 1| + \frac{31}{10} \ln|2x - 3| + C$

i)  $x + \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C$

j)  $x - \frac{5}{2} \ln|x - 3| + \frac{3}{2} \ln|x - 1| + C$

18 ■■■ Halla las siguientes integrales utilizando los cambios de variable que se indican.

a)  $\int \frac{dx}{e^x + 1} \quad e^x = t$

b)  $\int \frac{3 dx}{1 + 2\sqrt{e^{-x}}} \quad t^2 = e^{-x}$

c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad x = \sin t$

a)  $x - \ln(e^x + 1) + C$

b)  $3x + 6 \ln|1 + 2\sqrt{e^{-x}}| + C$

c)  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

19 ■■■ Halla estas integrales usando los cambios de variable.

a)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} \quad x = \frac{1}{\cos t}$

b)  $\int \frac{\sen x}{\sen x + \cos x} dx \quad t = \tg x$

c)  $\int \sqrt{9 - x^2} dx \quad x = 3 \sen t$

a)  $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$

b)  $-\frac{1}{2} \ln|\tg x + 1| + \frac{1}{4} \ln|1 + \tg^2 x| + \frac{1}{2} x + C$

c)  $\frac{9 \arcsen(x/3)}{2} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$

20 ■■■ Resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{\cos(2x)}{\sen^2 x} dx$

b)  $\int \sen^3 x \cos^2 x dx$

c)  $\int \frac{\sen^3 x}{\cos x} dx$

d)  $\int \frac{dx}{\sen x} \quad t = \tg\left(\frac{x}{2}\right)$

a)  $-\cotg x - 2x + C$

b)  $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

c)  $-\ln|\cos x| + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

d)  $\ln \left| \tg\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C$

21 ■■■ Utilizando distintos métodos de integración resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$

e)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

b)  $\int (4 + \tg^2 x) dx$

f)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

c)  $\int \frac{7}{4 + 9x^2} dx$

g)  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$

d)  $\int \sen^2(3x) dx$

a)  $\left( \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \right) \sqrt{x} + C$

e)  $2 \arctg \sqrt{2x-1} + C$

b)  $3x + \tg x + C$

f)  $2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x}$

c)  $\frac{7}{6} \arctg\left(\frac{3x}{2}\right) + C$

g)  $\frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + C$

d)  $\frac{x}{2} - \frac{\sen(6x)}{12} + C$

**22** Calcula estas integrales.

a)  $\int \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3} dx$

e)  $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

b)  $\int \ln(\sqrt{x^2+1}) dx$

f)  $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

c)  $\int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

g)  $\int xe^{-x} dx$

d)  $\int \sen(\ln x) dx$

h)  $\int \frac{x+1}{x^2-4} dx$

a)  $\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{3\sqrt{x+1}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \arctg(\sqrt{2x+2}) + C$

b)  $\frac{x}{2} \ln(\sqrt{x^2+1}) - x + \arctg x + C$

c)  $x - \sqrt{1-x^2} \arcsen x + C$

d)  $\frac{1}{2}(x \sen(\ln x) - x \cos(\ln x)) + C$

e)  $\frac{1}{4} \arcsen\left(\frac{4x}{5}\right) + C$

f)  $\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \ln|x-1| + C$

g)  $-(1+x) \cdot e^{-x} + C$

h)  $\frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$

**23** Determina todas las funciones cuyas derivadas sean como la siguiente.

$$f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Indica, además, su dominio de definición.

Sol:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

## Cálculo de primitivas

**24** Dada la función:  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$

a) Halla su integral indefinida.

b) Determina la primitiva de  $f(x)$  tal que pasa por el punto  $(\pi/2, 0)$

a)  $F(x) = \frac{\sen^3 x}{3} + C$

b)  $F(x) = \frac{\sen^3 x - 1}{3}$

**25** Calcula la primitiva de la función que se anula en el punto de abscisa  $x = 2$ :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Sol: } F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}$$

**26** Calcula la primitiva de la función  $f(x) = (\ln x)^2$  que se anula en  $x = e$ .

$$\text{Sol: } F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - e$$

**27** Encuentra la primitiva de la función  $f(x)$  que se anula en  $x = \frac{\pi}{4}$ :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

Sol: El ejercicio no tiene solución.

**28** Para cada una de estas dos funciones, calcula la primitiva que cumple la condición de que su gráfica pase por el punto de coordenadas  $(0, 1)$ :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ y } g(x) = \tg x$$

$$\text{Sol: } F(x) = \sqrt{x^2+1}. \quad G(x) = -\ln|\cos x| + 1.$$

**29** Calcula  $f(x)$  tal que  $f'(x) = x \ln(x^2+1)$  y  $f(0) = 0$ .

$$\text{Sol: } f(x) = \frac{x^2+1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}$$

**30** Halla la función  $f(x)$  tal que  $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ , sabiendo que  $f(0) = 2$ .

$$\text{Sol: } f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2$$

**31** Determina la función  $f$ , definida en todo  $\mathbb{R}$  tal que  $f'(x) = x^2 e^x$  y cuya gráfica pasa por el punto  $(0, 2)$ .

$$\text{Sol: } f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

**32** Obtén la expresión de una función  $f(x)$ , sabiendo que  $f'(x) = (x+1)e^{2x}$ , y que  $f(0) = \frac{5}{4}$ .

$$\text{Sol: } f(x) = e^{2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + 1$$

**33** Encuentra la primitiva de  $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$  sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal  $y = 2$ .

$$\text{Sol: } F(x) = \frac{1}{x-2} + 2$$

**34** Encuentra la primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  cuya recta tangente en  $x = e$  pasa por  $(0, 0)$ .

$$\text{Sol: } F(x) = \ln|\ln|x|| + 1$$

## Actividades de aplicación

**35** Determina:

a) Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función  $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$ .

b) Una función  $F(x)$  tal que su derivada sea  $f(x)$  y  $F(0) = 4$ .

a) En  $x = 1$  hay un máximo relativo y en  $x = -1$  un mínimo relativo.

En  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{3}$  hay puntos de inflexión.

b)  $F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 4$ .

**36** Sea la integral  $\int e^{2x} \sen e^x dx$ :

a) Intégrala mediante el cambio de variable  $t = e^x$ .

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

a)  $\sen e^x - e^x \cos e^x + C$

b)  $C = 0,9824$

**37** Se sabe que la gráfica de una función pasa por el punto  $(1, 1)$  y que  $f'(1) = 2$ . Se conoce también que su derivada segunda es la función  $g(x) = 2$ . Calcula la función  $f$ .

$$\text{Sol: } f(x) = x^2$$

- 38  Halla  $f(x)$  sabiendo que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  y  $f''(x) = 3x$ .

Sol:  $f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$ .

- 39  ¿Existe alguna función  $y = f(x)$  tal que  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  y que  $f(0) = 2$  y  $f(3) = 3$ ? ¿Y que  $f(2) = 2$  y  $f(3) = 3$ ? Justifica la respuesta. En el caso de que exista tal función  $f$  en alguna de estas situaciones, calcúlala.

Sol: En el primer caso, no existe

En el segundo caso:  $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} - 1,44x + 3,54$

- 40  Determina la expresión algebraica de la función  $F(x)$  que verifica las siguientes condiciones:

- $F'(x) = 2x - 6$
- La gráfica de la función  $F(x)$  presenta un mínimo en el punto de ordenada  $-1$ .

Sol:  $F(x) = x^2 - 6x + 10$

- 41  Halla la ecuación de una curva  $y = f(x)$  sabiendo que pasa por el punto  $(1, 1)$  y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa  $x$  es  $m = 3x + 1$ .

Sol:  $f(x) = \frac{3x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

- 42  Halla la ecuación de la curva  $y = f(x)$  que cumple que  $f''(x) = 4$ , y la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 3$  tiene por ecuación  $y = 9x - 13$ .

Sol:  $y = 2x^2 - 3x + 5$ .

- 43  De una función  $y = f(x)$  sabemos:

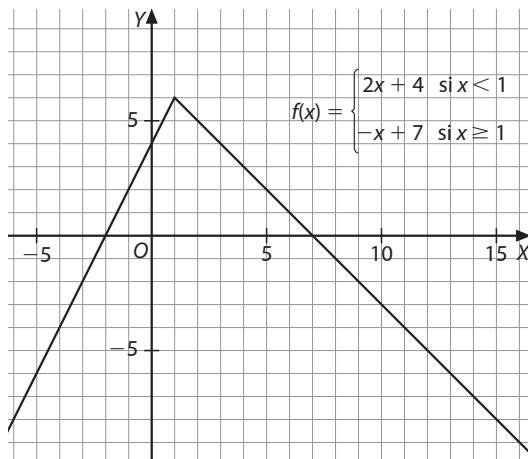
- Su dominio de definición es todo  $\mathbb{R}$ .

- Su función derivada es:  $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- $f(x)$  es continua en todo punto y  $f(-1) = 2$ .

Determina el valor de  $f(1)$  y dibuja la gráfica de la función  $f(x)$ .

Sol:  $f(1) = 6$



- 44  Determina la primitiva de la función  $f(x) = \frac{-a}{(ax+1)^2}$  cuya gráfica tiene por asíntota horizontal la recta  $y = 2$ , y por asíntota vertical la recta  $x = 1/2$ .

Sol:  $F(x) = \frac{-4x+3}{-2x+1}$

### Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

- 45  El resultado de  $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 4}$  es:

- a)  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$       c)  $\operatorname{arc tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$   
 b)  $\sqrt{3} \operatorname{arc tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$       d)  $\ln |4x^2 - 4x + 4| + C$

La respuesta correcta es la a).

- 46  Para resolver  $\int e^{2x} \sin e^x dx$  se realiza este cambio de variable:

- a)  $t = \sin x$   
 b)  $t = e^{2x}$   
 c)  $t = e^x$   
 d)  $t = \ln x$

La respuesta correcta es la c).

- 47  Si  $F'(x) = \frac{1}{2}x + 2$  y la gráfica de  $F(x)$  presenta un mínimo en el punto de ordenada 4, entonces:

- a)  $F(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$       c)  $F(x) = \frac{x^2}{4} + 8x + 2$   
 b)  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$       d)  $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 8$

La respuesta correcta es la d).

## Evaluación

1. Calcula una primitiva de la función:  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln x^2}}$

Sol:  $\sqrt{1 - \ln x^2} + C$

2. Resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

b)  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$

c)  $\int \frac{x}{2^x} dx$

d)  $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$

e)  $\int \frac{x+1}{3x^2+12} dx$

a)  $2e^{\sqrt{x}} + C$

b)  $\ln |\sin x - \cos x| + C$

c)  $\frac{-1}{2^x \ln 2} \left( x + \frac{1}{\ln 2} \right) + C$

d)  $-2 \ln |x| + \frac{1}{x} + 2 \ln |x-1| + C$

e)  $\frac{1}{6} \ln |x^2 + 4| + \frac{1}{6} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + C$

3. Halla  $\int (\tan^4 x + \tan^6 x) dx$ . Comprueba el resultado con medios tecnológicos.

Sol:  $\frac{\tan^5 x}{5} + C$

4. Mediante el cambio de variable  $t = \sqrt{x}$ , calcula  $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$ .

Sol:  $x - 2\sqrt{x} + 4 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$

5. Determina la función cuya derivada segunda es 6 sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(-1, 0)$  y en dicho punto la pendiente de su recta tangente es  $-4$ .

Sol:  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

6. Averigua la ecuación de la parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$  que en el punto de abscisa  $x = -1$  tiene por tangente la recta  $y = -x + 3$ , y  $f''(x) = 3$ .

Sol:  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

7. Determina la función  $f$  sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(1, 3)$ , y que  $f'(x) = \ln x + 1$ .

Sol:  $f(x) = x \ln x + 3$