

1º) Deriva y simplifica:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2e^{5x} - x$

b) $f(x) = L\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

2º) Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$

a) Determina los valores de a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de f en $x = 6$ sea horizontal.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, determina su curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su representación gráfica.

4º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3-e^{-2x}}{e^x} dx$

b) $\int \frac{1+x}{(x^2+2x+5)^2} dx$

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x) = \frac{5}{\sqrt{1-2x}}$ que cumple $F(0) = 7$

6º) Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones $f(x) = -x^2 + 9x - 8$ y $g(x) = 2x - 2$. Si se mide en metros:

a) Representa la parcela

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70% de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 420€ el metro cuadrado, el 20% se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

Puntuación

1, 4, 5 ----- 1 punto

2 ----- 2 "

3, 6 ----- 2'5

1º) Deriva y simplifica:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2e^{5x} - x$

b) $f(x) = L\left(\frac{2}{e^x-1}\right)$

Resolución

a) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 10e^{5x} - 1$

b) $f'(x) = \frac{e^x-1}{2} \cdot \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{e^x-1}$

2º) Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

Resolución

$x \equiv$ euros invertidos en televisión ; $y \equiv$ euros invertidos en radio

El planteamiento del problema es: $\begin{cases} V = x^2y + 27y + 20 \text{ maximizar} \\ \text{s.a. } x + y = 15 \end{cases}$

$y = 15 - x$ y, sustituyendo, $V(x) = x^2 \cdot (15 - x) + 27 \cdot (15 - x) + 20$

Simplificando, $V(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 425$

$V'(x) = -3x^2 + 30x - 27$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 30x - 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$

$V''(x) = -6x + 30 \begin{cases} V''(9) = -24 < 0 \text{ Máximo en } x = 9 : y = 6 \\ V''(1) = 24 > 0 \text{ Mínimo en } x = 1 : y = 14 \end{cases}$

$V(9,6) = 9^2 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 20 = 668$

Por tanto, debemos invertir 9000 € en televisión y 6000 € en radio con un valor máximo de ventas de 668000 unidades.

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$

a) Determina los valores de a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de f en $x = 6$ sea horizontal.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, determina su curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su representación gráfica.

Resolución

a) Del enunciado, $f(2) = -4$ y $f'(6) = 0$

$f'(x) = \frac{2x \cdot (a-bx) + b \cdot x^2}{(a-bx)^2} \begin{cases} f(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{4}{a-2b} = -4 \Rightarrow a - 2b = 1 \\ f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{12 \cdot (a-3b)}{(a-2b)^2} = 0 \Rightarrow a - 3b = 0 \end{cases} \text{ de donde } a = 3 ; b = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

Curvatura y puntos de inflexión

$f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$

$f''(x) = \frac{(2x+2) \cdot (1+x)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \begin{cases} < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \text{ Convexa} \\ > 0 \text{ en } (-1, +\infty) \text{ Cóncava} \end{cases}$

Como $x = -1$ no está en el dominio de la función, ésta **no tiene puntos de inflexión**.

Asíntotas

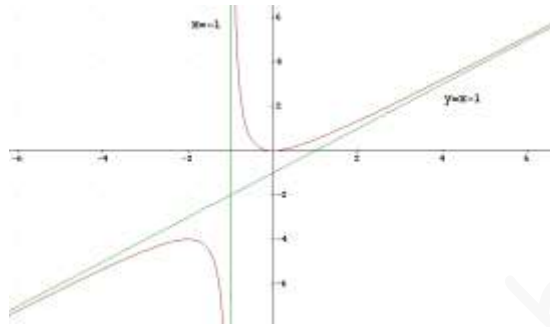
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{1+x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{1+x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{1+x} = +\infty \end{cases} \quad \text{Por tanto, la recta } x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty$, **no hay asíntota horizontal.**

$$y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+x^2} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = -1 \end{cases}$$

La recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

Representación gráfica



4º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3-e^{-2x}}{e^x} dx$

b) $\int \frac{1+x}{(x^2+2x+5)^2} dx$

Resolución

a) $\int \frac{3-e^{-2x}}{e^x} dx = 3 \cdot \int e^{-x} dx - \int e^{-3x} dx = -3e^{-x} + \frac{e^{-3x}}{3} + c$

b) $\int \frac{1+x}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2+2x}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int (x^2+2x+5)^{-2} \cdot (2+2x) dx = \frac{-1}{2 \cdot (x^2+2x+5)} + c$

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x) = \frac{5}{\sqrt{1-2x}}$ que cumple $F(0) = 7$

Resolución

$$F(x) = \int \frac{5}{\sqrt{1-2x}} dx = \frac{-5}{2} \cdot \int \frac{-2}{\sqrt{1-2x}} dx = -5 \cdot \sqrt{1-2x} + c ; F(0) = 7 \Leftrightarrow -5 + c = 7 ; c = 12$$

La primitiva es $F(x) = 5 \cdot \sqrt{1-2x} + 12$

6º) Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones

$f(x) = -x^2 + 9x - 8$ y $g(x) = 2x - 2$. Si se mide en metros:

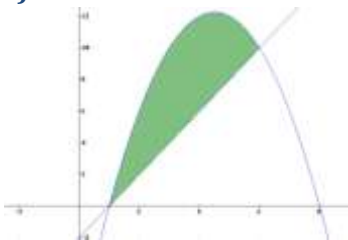
a) Representa la parcela

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70% de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 420 € el metro cuadrado, el 20% se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

Resolución

a)



b) Cortes de ambas funciones: $2x - 2 = -x^2 + 9x - 8 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^6 (-x^2 + 9x - 8 - (2x - 2)) dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_1^6 = \frac{125}{6} m^2 \end{aligned}$$

c) $0'7 \cdot \frac{125}{6} \cdot 420 + 0'1 \cdot \frac{125}{6} \cdot 45 = 6125 + 93'75 = 6218,75 \text{ euros}$