38. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $-2a(a+2)+6a^2(a+2)^2+8a(a+2)$

b) $\frac{2(x+1)}{5}-\frac{1}{5}x(x+1)^2$

c) $-4(a-3b)+8a(a-3b)-3b(a-3b)$

d) $5x^2(x^2+1)-5(x^2+1)$

e) $2b(a+b)-4a(a+b)+4(a+b)$

Regla de Ruffini

39. Utiliza la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^5-1):(x-1)$

b) $(x^5-2x^3+3x-4):(x-2)$

c) $(-2x^5-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)$

d) $(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2):(x+2)$

e) $(-x^5+3x):(x+1)$

f) $(2x^6-3x^3+4x^2):(x+1)$

g) $(6x^7-18x^6-3x^3+7x^2+6x):(x-3)$

h) $(-3x^6+15x^5+6x^4-30x^3-2x^2+10x):(x-5)$

40. Determina el valor de a para que la división sea exacta:

$$(2x^5+4x^4-3x^3-4x^2+x+a):(x+2)$$

Raíces de un polinomio. Teorema del resto

41. Determina el resto de las siguientes divisiones sin realizar la división:

a) $(x^5-1):(x-1)$

b) $(x^5-2x^3+3x-4):(x-2)$

c) $(-2x^5-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)$

d) $(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2):(x+2)$

42. Sin hacer la división, determina el resto de las siguientes divisiones:

a) $(-x^5+3x):(x+1)$

b) $(2x^6-3x^3+4x^2):(x+1)$

c) $(6x^7-18x^6-3x^3+7x^2+6x):(x-3)$

d) $(-3x^6+15x^5+6x^4-30x^3-2x^2+10x):(x-5)$

43. Determina el valor de a para que el resto de las siguientes divisiones sea 0:

a) $(x^4+2x^3-3x+a):(x+2)$

b) $(2x^5+ax^4-3x^3-x^2-x):(x+1)$

44. Determina el valor de a para que el resto de la siguiente división sea 0:

$$(ax^4-7x^3+5x^2+4x-4):(x-2)$$

45. Determina el valor de a para que el resto de la siguiente división sea -1:

$$(-x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7):(x-3)$$

46. Determina el valor de a para que el siguiente polinomio verifique que $P(-2)=0$:

$$P(x)=-x^4+ax^3-4x^2+2x-4$$

47. Encuentra dos raíces enteras para los siguientes polinomios:

a) $2x^3-x^2-13x-6$

b) $5x^3-x^2-14x-8$

c) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

d) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

48. Escribe dos polinomios de grado 3 que tengan una raíz doble en $x=-2$ y una raíz en $x=1$.

49. ¿Puede tener seis raíces un polinomio de grado 4? Razona tu respuesta.

50. Escribe un polinomio de grado 4 con una raíz doble en $x=-1$.

51. Determina el polinomio de grado 3 que verifica:

$$P(-1)=P(2)=P(-3)=0 \qquad P(-2)=18$$

52. Escribe un polinomio de grado 4 con una única raíz doble.

Factorización de polinomios

53. Utiliza las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios:

a) x^4-8x^2+16

b) $16x^4-8x^2+1$

c) $16x^4-72x^2+81$

54. Extrae factor común y utiliza las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios:

a) x^3-2x^2+x

b) $8x^3+8x^2+2x$

c) $3x^5-54x^3+243x$

d) $162x^5-36x^3+2x$

55. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $2x^3-x^2-13x-6$

b) $5x^3-x^2-14x-8$

c) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

d) x^3-3x^2+3x-1

56. Calcula el MCD y el mcm de los polinomios:

a) $P(x)=x^2-4,\ Q(x)=x^3+4x^2-7x-10$

b) $S(x)=x^3-x^2-8x+12,\ R(x)=x^3-2x^2-9x+18$

c) $T(x)=x^2-1,\ U(x)=x^2+3x+2,\ V(x)=x^2-2x-3$

57. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4+5x^3+9x^2+7x+2$

b) $x^3+6x^2+12x+8$

c) $2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x$

d) $x^6+5x^5+7x^4+5x^3+6x^2$

→

SOLUCIONES

38.

a) $-2a\cdot(a+2)+6a^2\cdot(a+2)^2+8a\cdot(a+2)=2a\cdot(a+2)\cdot(-1+3a^2+6a+4)=2a\cdot(a+2)\cdot(3a^2+6a+3)$

b) $\dfrac{2\cdot(x+1)}{5}-\dfrac{1}{5}x\cdot(x+1)^2=\dfrac{1}{5}(x+1)\cdot(2-x\cdot(x+1))=\dfrac{1}{5}(x+1)\cdot(-x^2-x+2)$

c) $-4\cdot(a-3b)+8a\cdot(a-3b)-3b\cdot(a-3b)=(a-3b)\cdot(-4+8a-3b)$

d) $5x^2\cdot(x^2+1)-5\cdot(x^2+1)=5\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)$

e) $2b\cdot(a+b)-4a\cdot(a+b)+4\cdot(a+b)=2\cdot(a+b)\cdot(b-2a+2)$

Regla de Ruffini.

39.

a) $C(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$
$R(x)=-2$

	1	0	0	0	0	-1
-1		-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-2

b) $C(x)=x+2x^3+2x^2+4x+11$
$R(x)=18$

	1	0	-2	0	3	-4
2		2	4	4	8	22
	1	2	2	4	11	18

c) $C(x)=-2x^4+3x-2$
$R(x)=-4$

	-2	-6	0	3	7	-10
-3		6	0	0	-9	6
	-2	0	0	3	-2	-4

d) $C(x)=3x^3-x^2-2x$
$R(x)=2$

	3	5	-4	-4	2
-2		-6	2	4	0
	3	-1	-2	0	2

e) $C(x)=-x^4+x^3-x^2+x+2$
$R(x)=-2$

	1	0	0	0	3	0
-1		1	-1	1	-1	-2
	1	1	-1	1	2	-2

f) $C(x)=2x^5-2x^4+2x^3-5x^2+9x-9$
$R(x)=9$

	2	0	0	-3	4	0	0
-1		-2	2	-2	5	-9	9
	2	-2	2	-5	9	-9	9

g) $C(x) = 6x^6 - 3x^2 - 2x$
$R(x) = 0$

	6	-18	0	0	-3	7	6	0
3		18	0	0	0	-9	-6	0
	6	0	0	0	-3	-2	0	0

h) $C(x) = -3x^5 + 6x^3 - 2x$
$R(x) = 0$

	-3	15	6	-30	-2	10	0
5		-15	0	30	0	-10	0
	-3	0	6	0	-2	0	0

40.
Si la división $(2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + a) : (x + 2)$ tiene que ser exacta, entonces su resto es 0, y por tanto, $(x + 2)$ tiene que ser factor del polinomio dividendo $P(x)$, por lo tanto, $P(-2) = 0$. (Teorema del resto)

$P(-2) = 2\cdot(-2)^5 + 4\cdot(-2)^4 - 3\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 + (-2) + a = 0$
$-64 + 64 + 24 - 16 - 2 + a = 0$
$6 + a = 0$
$a = -6$

Raíces de un polinomio. Teorema del Resto

41.
Aplicando el Teorema del Resto podemos asegurar que el resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - a$, es el valor numérico de $P(x)$ cuando x toma el valor a, es decir, $P(a)$.

Por lo tanto:

a) $R(x) = P(1) = 1^5 - 1 = 0$
b) $R(x) = P(2) = 2^5 - 2\cdot(2)^3 + 3\cdot2 - 4 = 32 - 16 + 6 - 4 = 6$
c) $R(x) = P(-3) = -2\cdot(-3)^5 - 6\cdot(-3)^4 + 3\cdot(-3)^2 + 7\cdot(-3) - 10 = 27 - 21 - 10 = -4$
d) $R(x) = P(-2) = 3\cdot(-2)^4 + 5\cdot(-2)^4 - 4\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 2 = 48 - 40 - 16 + 8 + 2 = 2$

42.
a) $R(x) = P(-1) = -(-1)^5 + 3\cdot(-1) = 1 - 3 = -2$
b) $R(x) = P(-1) = 2\cdot(-1)^6 - 3\cdot(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 = 2 + 3 + 4 = 9$
c) $R(x) = P(3) = 6\cdot(3)^7 - 18\cdot(3)^6 - 3\cdot(3)^3 + 7\cdot(3)^2 + 6\cdot3 = 0$
d) $R(x) = P(5) = -3\cdot(5)^6 + 15\cdot(5)^5 + 6\cdot(5)^4 - 30\cdot(5)^3 - 2\cdot(5)^2 + 10\cdot5 = 0$

43.
Si el resto de la división P(x) : (x – a) es cero, entonces (x – a) es un factor en la factorización de P(x), y por tanto, por el teorema del resto, P(a) = 0.

a) $(x^4 + 2x^3 - 3x + a) : (x + 2)$
$P(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2) + a = 0$
$16 - 16 + 6 + a = 0$
a = -6

b) $(2x^5 + ax^4 - 3x^3 - x^2 - x) : (x + 1)$
$P(-1) = 2\cdot(-1)^5 + a\cdot(-1)^4 - 3\cdot(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) = 0$
$-2 + a + 3 - 1 + 1 = 0$
a = -1

44.
$(ax^5 - 7x^3 + 5x^2 + 4x - 4) : (x - 2)$
$P(2) = a\cdot 2^5 - 7\cdot 2^3 + 5\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 4 = 0$
$32a - 56 + 20 + 8 - 4 = 0$
$32a = 32$
a = 1

45.
Si el resto de la división $(-x^5 + 3x^4 + ax^3 + 9x^2 + 2x - 7) : (x - 3)$ es -1, entonces, por el teorema del resto podemos asegurar que P(3) = -1

$P(3) = -3^5 + 3\cdot 3^4 + a\cdot 3^3 + 9\cdot 3^2 + 2\cdot 3 - 7 = -1$
$-243 + 243 + 27a + 27 + 6 - 7 = -1$
$27a = -27$
a = -1

46.
$P(x) = -x^4 + ax^3 - 4x^2 + 2x - 4.$
$P(-2) = -(-2)^4 + a\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 4 = 0$
$-16 - 8a - 16 - 4 - 4 = 0$
a = 5

47.
a) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6.

$P(-1) = 2\cdot(-2)^3 - (-2)^2 - 13\cdot(-2) - 6 = 0$
$P(3) = 2\cdot 3^3 - 3^2 - 13\cdot 3 - 6 = 0$

En este caso, -1 y 3 son dos raíces de $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

b) Las posibles raíces de $P(x) = 5x^3 - x^2 - 14x - 8$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8.

$P(-1) = 5\cdot(-1)^3 - (-1)^2 - 14\cdot(-1) - 8 = 0$
$P(2) = 5\cdot 2^3 - 2^2 - 14\cdot 2 - 8 = 0$

En este caso, -1 y 2 son dos raíces de $P(x) = 5x^3 – x^2 – 14x – 8$.

c) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^4 – x^3 – 6x^2 – x + 2$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2.

$P(-1) = 2\cdot(-1)^4 – (-1)^3 – 6\cdot(-1)^2 – (-1) + 2 = 0$
$P(2) = 2\cdot2^4 – 2^3 – 6\cdot2^2 – 2 + 2 = 0$

En este caso, -1 y 2 son dos raíces de $P(x) = 2x^4 – x^3 – 6x^2 – x + 2$.

d) Las posibles raíces de $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3 y -3.

$P(-1) = (-1)^4 + 4\cdot(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3 = 0$
$P(-3) = (-3)^4 + 4\cdot(-3)^3 + 4\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3 = 0$

En este caso, -1 y -3 son dos raíces de $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

48.
Si el polinomio tiene como raíz doble -2, entonces, uno de sus factores es $(x + 2)^2$.
Si 1 es otra de sus raíces, otro de sus factores es $(x – 1)$.

Con estos dos factores ya tenemos el polinomio base que buscamos:

$P(x) = (x – 1) \cdot(x + 2)^2 = x^3 + x^2 + 2x – 4$.

Otro polinomio que cumpla las mismas propiedades sería:

$P(x) = 2\cdot(x – 1)\cdot(x + 2)^2 = 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8$.

49.
Por el Teorema Fundamental del Álgebra, el número de raíces de un polinomio contadas con su multiplicidad, es decir, el número de veces que se repiten, coinciden con su grado. Por lo tanto, ningún polinomio de grado 4 puede tener 6 raíces diferentes, a lo sumo tendrá 4.

50.
Si el polinomio tiene una raíz doble en -1, uno de sus factores es $(x + 1)^2$. Las otras dos raíces, puesto que debe ser de grado 4, pueden ser cualquier número entero.

$P(x) = (x – a) \cdot (x – b) \cdot (x + 1)^2$

Por ejemplo: $P(x) = x\cdot(x – 1)\cdot(x + 1)^2 = x^4 + x^3 – x^2 – 4x$.

51.

Si el polinomio es de grado 3 y P(-1) = P(2) = P(-3) = 0, entonces sus raíces son -1, 2 y -3 y por tanto, los tres factores del polinomio son: (x + 1) , (x – 2) y (x +3), y así, el polinomio es de la forma:

$P(x) = a\cdot(x + 1)\cdot(x - 2)\cdot(x + 3) = a(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$

Por otra parte P(-2) = 18, por tanto: $P(-2) = a\cdot(-2 + 1)\cdot(-2 - 2)\cdot(-2 + 3) = 4a = 18$;

$$a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

El polinomio que buscamos es $P(x) = \frac{9}{2}\cdot(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = \frac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{45}{2}x - 18$

52.

Supongamos que -1 es la raíz doble del polinomio, entonces el factor asociado es $(x + 1)^2$.
Y supongamos también que las otras dos raíces son 0 y 2, luego, el polinomio es:
$P(x) = x(x - 2)(x + 1)^2$

Factorización de polinomios.

53.

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$

b) $16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2 - 1)^2$

c) $16x^4 - 72x^2 + 81 = (4x^2 - 9)^2$

54.

a) $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = x\cdot(x - 1)^2$

b) $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = x\cdot(x - 1)^2$

c) $3x^5 - 54x^3 + 243x = 3x\cdot(x^4 - 18x^2 + 81) = 3x\cdot(x^2 - 9)^2$

d) $162x^5 - 36x^3 + 2x = 2x\cdot(81x^4 - 18x^2 + 1) = 3x\cdot(3x^2 - 1)^2$

55.

a) Aplicando Ruffini tenemos que:

	2	-1	-13	-6
-2		-4	10	6
	2	-5	-3	0
3		6	3	
	2	1	0	

$$2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (x + 2)\cdot(x - 3)\cdot(2x + 1)$$

b) Aplicando Ruffini obtenemos:

$$5x^3 - x^2 - 14x - 8 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(5x+4)$$

	5	-1	-14	-8
-1		-5	6	8
	5	-6	-8	0
2		10	8	
	5	4	0	

c) Por Ruffini sabemos que:

$$2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = (x+1)^2 \cdot (x-2)\cdot(2x-1)$$

	2	-1	-6	-1	2
-1		-2	3	3	-2
	2	-3	-3	2	0
-1		2	5	-2	
	2	-5	2	0	
2		4	-2		
	2	-1	0		

d) Aplicando Ruffini sabemos que:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & 3 & -1 \\
1 & & 1 & -2 & 1 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
1 & & 1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & \\
1 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

56.

El *máximo común divisor* de dos polinomios es el polinomio formado por los factores comunes elevados al menor exponente.

El *mínimo común múltiplo* es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

a)

$P(x) = x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2)$

$Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+5)$

$mcd(P(x), Q(x)) = x - 2$

$mcm(P(x), Q(x)) = (x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+5) = x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20$

b)

$S(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2\cdot(x+3)$

$R(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-2)\cdot(x+3)^2$

$mcd(S(x), R(x)) = (x-2)\cdot(x+3) = x^2 + x - 6$

$mcm(S(x), R(x)) = (x-2)^2\cdot(x+3)^2 = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$

c)

$$T(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$$

$$U(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2)$$

$$V(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)\cdot(x-3)$$

$$mcd(T(x),U(x),V(x)) = x+1$$

$$mcm(T(x),U(x),V(x)) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

57.

a) Como es polinomio de grado cuatro con término independiente, lo único que podemos hacer es aplicar Ruffini:

	1	5	9	7	2
-1		-1	-4	-5	-2
	1	4	5	2	0
-1		-1	-3	-2	
	1	3	2	0	

Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener las dos raíces que quedan:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio es: $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = (x+1)^3 \cdot (x+2)$

b) Aplicamos Ruffini sobre el polinomio inicial para obtener la primera raíz:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)\cdot(x^2 + 4x + 4)$$

Por las igualdades notables conseguimos la raíz doble que nos falta: 2. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

c) Sacamos factor común x y aplicamos Ruffini sobre un polinomio de grado 4:

$$2x^5 + 9x^4 + 9x^4 - x^2 - 3x = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3) = x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x^2 + x - 1)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y conseguimos así todas las raíces necesarias:

$$2x^5 + 9x^4 + 9x^3 - x^2 - 3x = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3) = x\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(2x-1)$$

Sacamos factor común x2 y aplicamos Ruffini sobre un polinomio de grado 4:

$$x^6+5x^5+7x^4+5x^3+6x^2=x^2\cdot(x^4+5x^3+7x^2+5x+6)=x^2\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x^2+1)$$

El factor de segundo grado no tiene raíces enteras, luego la factorización del polinomio estaría terminada.