

ANÁLISIS. Derivabilidad y continuidad

1.- Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Contestar, razonadamente, a las siguientes preguntas:

- ¿Es continua en el punto $x = 0$?
- ¿Es derivable en el punto $x = 0$?
- ¿Alcanza algún extremo?

2.- La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, ¿cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$?

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

- Determinar m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$.
- Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

4.- Hallar la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea 60 m.

5.- Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$.

- Determinar a , b , c y d
- ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

6.- Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 6x + 9x$

Indica dominio. Estudia la monotonía y halla máximos y el mínimos de la función $f(x)$. Y puntos de inflexión. Representala gráficamente, a partir de los datos obtenidos.. (No tiene asíntotas, es una función polinómica)

7.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Calcula las asíntotas, estudia la monotonía y halla máximos y el mínimos de la función $f(x)$. Representala gráficamente, a partir de los datos obtenidos..

8.- Sea la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = |8 - x^2|$

- Esboza la gráfica y halla los extremos relativo de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores)
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$.

9.-Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- a) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

10.- Calcular los siguientes límites (donde “ln”significa Logaritmo Neperiano)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\ln x)^2 + 2x}{5x-1}$$

11.- Sea la función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$. Determina la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión.

12.- Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

en el punto $x = 2$.

¿Podríamos obtener la recta tangente en el punto $x = 1$?

13.- En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima