Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x)=2x|4-x|$

a. Estudiar su continuidad y derivabilidad.
b. Dibujar su gráfica.
c. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$ y el eje OX.

$$f(x)=\begin{cases}2x(4-x) & si\ \ x\le 4\\ 2x(x-4) & si\ \ x>4\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}8x-2x^2 & si\ \ x\le 4\\ 2x^2-8x & si\ \ x>4\end{cases}$$

Las dos ramas de la función son parábolas, con lo que sabemos que son continuas y derivables en todos los puntos salvo quizás en x=4. Estudiemos, en ese punto, la continuidad y derivabilidad de la función.

$$f(4)=0\ ;\ \ \lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(8x-2x^2)=0\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(2x^2-8x)=0\end{cases} \Rightarrow f(4)=\lim_{x\to 4} f(x) \Rightarrow f(x)\ es$$

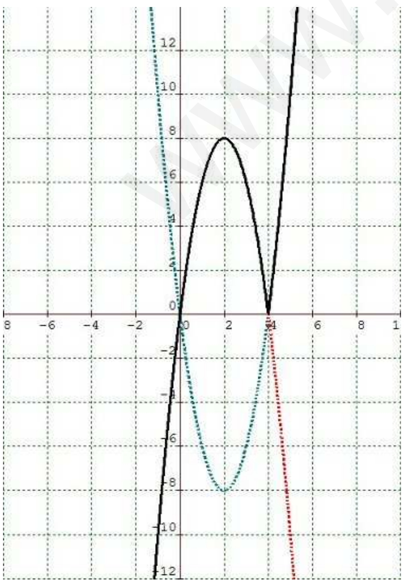
$$continua\ en\ x=4 \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f'_-(4)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{8(4+h)-2(4+h)^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-2h-8)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2h-8)=-8$$

$$f'_+(4)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(4+h)^2-8(4+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(2h+8)}{h}=\lim_{h\to 0^+}(2h+8)=8$$

$$f'_-(4)\neq f'_+(4) \Rightarrow f(x)\ \ no\ es\ derivable\ en\ x=4$$

Vamos a representar gráficamente la función teniendo en cuenta que está compuesta por dos trozos de parábolas.



$y=8x-2x^2$ *corta al eje OX en los puntos* $(0,0)$ *y* $(4,0)$

$y'=8-4x \Rightarrow$ *tiene un máximo en el punto* $(2,8)$

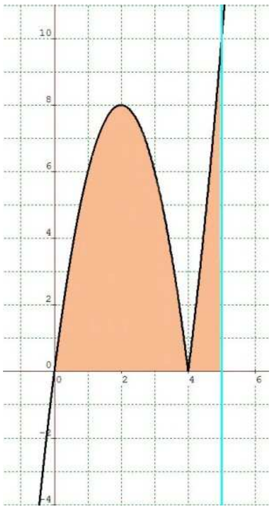
la gráfica se correspondería con la parábola de trazo rojo

$y=2x^2-8x$ *corta al eje OX en los mismos puntos* $(0,0)$ *y* $(4,0)$

$y'=4x-8 \Rightarrow$ *tiene un mínimo en el punto* $(2,-8)$

la gráfica se correspondería con la parábola de trazo azul

La gráfica de $f(x)$ *la representamos en negro y se obtiene a partir de la primera parábola en el intervalo* $(-\infty,4]$ *y de la segunda en* $(4,+\infty)$



El área pedida se corresponde con la zona coloreada

$$A=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx+\int_4^5\left(2x^2-8x\right)dx=\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4+\left[\frac{2x^3}{3}-4x^2\right]_4^5=$$

$$=\left[\left(64-\frac{128}{3}\right)-0\right]+\left[\left(\frac{250}{3}-100\right)-\left(\frac{128}{3}-64\right)\right]=26$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{sen\,x\left(1-sen\,x\right)}{\left(\cos x\right)^2}$ b) $\int x\cdot(\ln x)^2\,dx$ c) $\int\dfrac{1}{x^3+2x}dx$

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x\left(1-sen\,x\right)}{\left(\cos x\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\,x-sen^2x}{\left(\cos x\right)^2}=\left(L'H\hat{o}pital\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-2sen\,x\cos x}{-2\cos x\,sen\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-2sen\,x}{-2sen\,x}=\frac{1}{2}$$

$$b)\ \int x\left(\ln x\right)^2dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int x\cdot\ln x\cdot dx=$$

$$\left\{\begin{array}{l}u=\left(\ln x\right)^2\ \Rightarrow du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx\\ dv=xdx\ \Rightarrow\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}\qquad\left\{\begin{array}{l}u=\ln x\ \Rightarrow\ du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=xdx\ \Rightarrow\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}$$

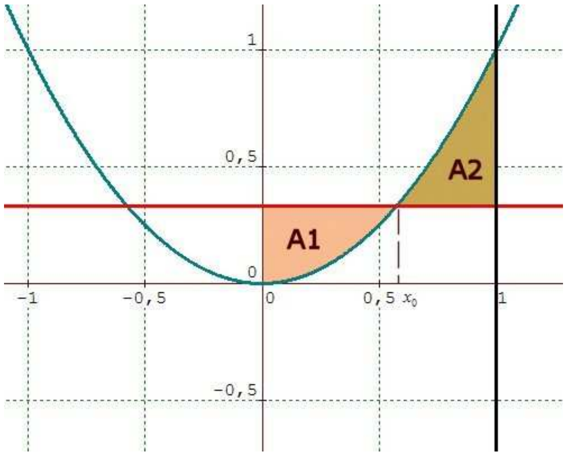
$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$$

$$c)\ \int\frac{1}{x^3+2x}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x}dx-\int\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2\right)+C$$

$$\frac{1}{x^3+2x}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2}=\frac{(A+M)x^2+Nx+2A}{x\left(x^2+2\right)}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A+M=0\\ N=0\\ 2A=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\dfrac{1}{2}\ ,\ M=-\dfrac{1}{2}\\ N=0\end{array}\right.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde a es un número real con $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.



Se trata de encontrar el valor de "a" para que $A_1 = A_2$

$$A_1 = \int_0^{x_0} (a - x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0} = ax_0 - \frac{x_0^3}{3}$$

$$A_2 = \int_{x_0}^{1} (x^2 - a)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax\right]_{x_0}^{1} = \frac{1}{3} - a - \left(\frac{x_0^3}{3} - ax_0\right)$$

entonces $\quad ax_0 - \frac{x_0^3}{3} = \frac{1}{3} - a - \frac{x_0^3}{3} + ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$

Se define la función $g(x) = \int_0^{sen\,x} f(t)\,dt$. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$

$$g(x) = \int_0^{senx} f(t)\,dt \Rightarrow g(0) = \int_0^{0} f(t)\,dt = 0$$

según el teorema fundamental del cálculo integral $g'(x) = \frac{1}{1 + e^{senx}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{1 + e^{senx}}$

entonces $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = (L'\,Hôpital) = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 + e^{senx}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\nwarrow \frac{0}{0}$