PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función f(x) sea derivable en todo R

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2\,, & si \quad x \le 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}\,, & si \;\; x > 1 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Comprueba si la función **f(x) = x² - 4** verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-3 , 3].

a) Para ser derivable, primeramente, tiene que ser continua

$$\begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a.1^2 + b.1 + 2 = a + b + 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a\sqrt{1} - \dfrac{b}{1^2} = a - b \end{cases} \rightarrow f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow a + b + 2 = a - b$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & si \quad x < 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2b}{x^3}\,, & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 2a.1 + b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{1}} + \dfrac{2b}{1^3} \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \rightarrow 2a + b = \frac{a}{2} + 2b$$

$$\begin{cases} \mathrm{a + b + 2 = a - b \rightarrow 2b = -2 \rightarrow \mathbf{b = -1}} \\ \mathrm{2a - 1 = \dfrac{a}{2} - 2 \rightarrow 2a - \dfrac{a}{2} = -1 \rightarrow \dfrac{4a - a}{2} = -1 \rightarrow \dfrac{3a}{2} = -1 \rightarrow \mathbf{a = -\dfrac{2}{3}}} \end{cases}$$

(b)

Comprueba si la función **f(x) = x² - 4** verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-3 , 3].

El Teorema de Rolle nos dice: Si una función f verifica que es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) y además f(a) = f(b) (toma valores iguales en los extremos del intervalo) entonces existe al menos un punto c $\in$ (a,b) tal que f '(c) = 0.

La función f(x) = $x^2 - 4$ es continua y derivable en todo R, en particular continua en [-3, 3] y derivable en (-3,3); además: f(-3) = f(3) = $(\pm 3)^2 - 4 = 5$. Luego **verifica el Teorema de Rolle y existe al menos un punto c $\in$ (-3, 3) tal que f '(c) = 0. En nuestro caso f '(x) = -2x = 0, de donde x = c = 0 $\in$ (-3,3).**

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función g(x) = - x^2 + 2x + 3, la recta x = - 2 y el eje de abscisas. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función g(x) en el punto de abscisa x = 4. (1 punto)
a)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \rightarrow y = 0 \rightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.3 = -10 < 0 \rightarrow Sin\ solución$$

$$x = -1 \in (-2\,,0) \rightarrow g(-1) = -(-1)^2 + 2.(-1) - 3 = -6 < 0 \rightarrow g(x) < 0$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (-x^2 + 2x - 3)\ dx \right| = \int_{-2}^{0} (x^2 - 2x + 3)\ dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-2}^{0} - \frac{1}{2}[x^2]_{-2}^{0} + 3[x]_{-2}^{0}$$

$$A = \frac{1}{3}[0^3 - (-2)^3] - \frac{1}{2}[0^2 - (-2)^2] + 3[0 - (-2)] =$$

$$A = \frac{1}{3}[0 - (-8)] - \frac{1}{2}(0 - 4) + 3(0 + 2) = \frac{8}{3} + 2 + 6 = \frac{8 + 6 + 12}{3} = \frac{26}{3}\ u^2$$

Continuación del Ejercicio 2.A de la Propuesta A

b)

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x - 3 \rightarrow g(4) = -4^2 + 2.4 - 3 = -11 \\ g'(x) = -2x + 2 \rightarrow m = g'(4) = -2.4 + 2 = -6 \rightarrow m_n = -\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{11} \rightarrow \end{cases}$$

$$y - (-11) = \frac{1}{11}(x - 4) \rightarrow 11y + 121 = x - 4 \rightarrow x - 11y - 125 = 0$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro **a**$\in \boldsymbol{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4 + a) \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor **a = 1**. (1 punto)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1-a \end{vmatrix} = a(1-a) \rightarrow Si\ |A| = 0 \rightarrow a(1-a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\forall a \in R - \{0\ ,\quad 1\} \rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

Si **a = 0**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A\ /\ B) = 3$$

$\rightarrow Sistema\ Incompatible$

Si **a = 1**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rang(A) = rang(A\ /\ B) = 2 < Número\ de\ incógnitas$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

b)

Si **a = 1** $\rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x + 2y = 1 \rightarrow x = 1 - 2y \rightarrow -1 + 2y + y + z = 5 \rightarrow z = 6 - 3y$$

$$Solución \rightarrow (x\ ,\quad y\ ,\quad z) = (1 - 2\alpha\ ,\quad \alpha\ ,\quad 6 - 3\alpha)$$

4A. Dados los puntos A(1 , 2 , 0); B(0 ,-1 ,2); C(2 , -1 , 3) y D(1 ,0 , 1) :
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)
a) Los vectores AB, CD y AG, donde G el punto genérico del plano, son coplanarios y, por ello, su producto mixto nulo ya que lo es el volumen del paralelepípedo que forman.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 2) - (1, 2, 0) = (-1, -3, 2) \equiv (1, 3, -2) \\ \overrightarrow{CD} = (1, 0, 1) - (2, -1, 3) = (-1, 1, -2) \equiv (1, -1, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 2, 0) = (x-1, y-2, z) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$6(x-1) - 2(y-2) - z - 3z - 2(x-1) - 2(y-2) = 0 \rightarrow 4(x-1) - 4(y-2) - 4z = 0 \rightarrow$$

$$4x - 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow \pi \equiv x - y - z + 1 = 0$$

c) El volumen de un tetraedro es un sexto del volumen, en valor absoluto, determinado por los vectores AB, AC y AD que es su producto mixto (Hay que dar los valores reales de los vectore)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) - (1, 2, 0) = (1, -3, 3) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 0, 1) - (1, 2, 0) = (0, -2, 1) \end{cases} \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 6 + 3$$

$$= |-4|$$

$$\left|\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right| = 4 \rightarrow VV_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\, u^3$$

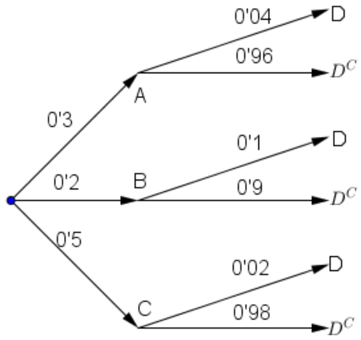
5A. a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salga defectuoso. (0,75 puntos)
a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. (0,5 puntos)

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:
b1) Tres chicas. (0,75 puntos)
b2) Al menos tres chicos. (0,5 puntos)

a)
Llamemos A, B, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, “fabrica A”, "fabrica B", "fabrica C", “tractor defectuoso” y "no tractor defectuoso”, respectivamente.

Datos del problema p(A) = 30% = 0’3; p(B) = 20% = 0’2; p(D/A) = 4% = 0’04; p(D/B) = 10% = 0’1, p(D/C) = 2% = 0’02 ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a1)
No salga defectuoso.

Por el teorema de la Probabilidad Total :
Nos piden **p(no salga defectuoso) = p(D^C) =** p(A).p(D^C/A) + p(B).p(D^C/B) + p(C).p(D^C/C) =
= (0’3)·(0’96) + (0’2)·(0’9) + (0’5)·(0’98) **= 479/500 = 0’958**.
a2)
Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(A/D) + p(B/D) = $\frac{p(A \cap D)}{p(D)} + \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A).p(D/A)}{1 - p(D^C)} + \frac{p(B).p(D/B)}{1 - p(D^C)} = \frac{(0'3)\cdot(0'04)}{1 - 0'958} + \frac{(0'2)\cdot(0'1)}{1 - 0'958}$ **=**

= 2/7 + 10/21 =16/21 $\cong$ **0'7619**.

b)

En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

Recordamos que si realizamos **n** veces (5) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 16/20 = 0'8) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'8 = 0'2), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(5; 0'8)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (5\ sobre\ k)\cdot 0'8^{k}\cdot 0'2^{(5-k)} = \binom{5}{k}.0'8^{k}\cdot 0'2^{(5-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

b1)

Tres chicas.

En nuestro caso piden **p(X = 3) =** $\binom{5}{3}\cdot 0'8^{3}\cdot 0'2^{2}$ **= 0'2048.**

b2)

Al menos tres chicos.

Sea **Y** la variable donde **p** es **q** y viceversa.
En nuestro caso piden **p(Y** $\geq$ **3) = p(Y = 3) + p(Y = 4) + p(Y = 5) =**

= $\binom{5}{3}\cdot 0'2^{3}\cdot 0'8^{2} + \binom{5}{4}\cdot 0'2^{4}\cdot 0'8^{1} + \binom{5}{5}\cdot 0'2^{5}\cdot 0'2^{0}$ **=** 0'0512 + 0'0064 + 0'00032 **= 0'05792.**

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left(\frac{2e^{1-1}}{1+1}\right)^{\frac{1}{1-1}}=\left(\frac{2e^{0}}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\to L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}\to$$

$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{x-1}=$$

$$=\frac{1.\ln\left(\frac{2e^{1-1}}{1+1}\right)}{1-1}=\frac{\ln\left(\frac{2e^{0}}{1+1}\right)}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)+\frac{1}{\frac{2e^{x-1}}{x+1}}\cdot\frac{2e^{x-1}(x+1)-2e^{x-1}}{(x+1)^2}\cdot x}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)+\frac{x+1}{2e^{x-1}}\cdot\frac{2e^{x-1}(x+1-1)}{(x+1)^2}x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)+\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)+\frac{x^2}{(x+1)}\right]=\ln\left(\frac{2e^{1-1}}{1+1}\right)+\frac{1^2}{(1+1)}=\ln\left(\frac{2e^{0}}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\ln\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}=\ln 1+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\to\ln L=\ln\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{x-1}=\frac{1}{2}\to\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{x-1}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{x-1}=\sqrt{e}$$

b)

$$\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\frac{-e^{(-1)^2-1}-(-1)}{(-1)^2+4\cdot(-1)+3}=\frac{-e^{1-1}+1}{1-4+3}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to -1}\frac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=$$

$$=\frac{-2(-1)e^{(-1)^2-1}-1}{2\cdot(-1)+4}=\frac{2e^{1-1}-1}{-2+4}=\frac{2e^{0}-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones **f(x)** y **g(x).** (1 punto)

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones **f(x)** y **g(x).** (1,5 puntos)

a)

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\to Creciente\to f'(x)>0\to\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}>0\to\begin{cases}2<0\to\forall x\in\mathbb{R}\\ x>0\\ \left(1+x^2\right)^2>0\to\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\to$$

	$-\infty$	**0** ∞
-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(1 + x^2)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\mathbb{R}/x<0$ **Decrecimiento** $\forall x\in\mathbb{R}/x>0$

Máximo relativo en $x=0\to f(0)=\dfrac{1}{1+0^2}=1$ **De Crecimiento pasa a Decrecimiento**

$$g'(x)=2x\to Crecimiento\to g'(x)=0\to 2x>0\to\begin{cases}2>0\to\forall x\in\mathbb{R}\\ x>0\end{cases}$$

Crecimiento $\forall x\in\mathbb{R}/x>0$ **Decrecimiento** $\forall x\in\mathbb{R}/x<0$

Mínimo relativo en $x=0\to g(0)=\dfrac{0^2}{2}=0$ **De Decrecimiento pasa a Crecimiento**

b)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\to y=0\to\begin{cases}0=\dfrac{1}{1+x^2}\to 1\neq 0\to No\ existe\\ 0=\dfrac{x^2}{2}\to x^2=0\to x=0\end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones\to\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\to x^4+x^2=2\to x^4+x^2-2=0\to x^2=t\to$$

$$t^2+t-2=0\to\Delta=1^2-4.1.(2)=1+8=9\geq 0\to t=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2.1}\to\begin{cases}t=\dfrac{-1+3}{2}=1\to x=\pm\sqrt{1}\to\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ t=\dfrac{-1-3}{2}=-2\to x=\pm\sqrt{-2}\to No\end{cases}$$

Continuación del Problema 2.B de la opción B

$$f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)\to Función\ simétrica$$

$$g(-x)=\frac{(-x)^2}{2}=\frac{x^2}{2}=g(x)\to Función\ simétrica$$

$$x=\frac{1}{2}\in(0,1)\to\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5} \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{1}{8}\end{cases}\to\frac{4}{5}>\frac{1}{8}\to f(x)>g(x)\to$$

$$A=2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-2\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=2\cdot[arc\,tg\ x]_0^1-\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1=2\cdot(arc\,tg\,1-arc\,tg\,0)-\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)=2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{1}{3}$$

$$A=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\pi-2}{6}u^2$$

3B. Dadas matrices $A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de **A**. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz **X** que verifica que **A .X - 2B = C**. (1,5 puntos)
a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no sea nulo

$$\|A\|=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{Vmatrix}-1&1\\2&-1\end{Vmatrix}=-(1-2)=1\neq 0\to Existe\ A^{-1}\to A^{-1}=\frac{1}{\|A\|}adj\ A^t\to$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&1&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\to adj\ A^t=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&-1\\1&-3&-2\end{pmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&-1\\1&-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&-1\\1&-3&-2\end{pmatrix}$$

b) A.X = C + 2B $\to$ A^{-1}.A.X = A^{-1} (C + 2B) $\to$ I.X = A^{-1} (C + 2B) $\to$ X = A^{-1} (2B + C)

$$2B+C=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&4\\0&2&2\\2&-2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}\to$$

$$X=A^{-1}\cdot(2B+C)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&-1\\1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&-4\\0&7&-2\\-5&-2&-13\end{pmatrix}$$

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto **P(3 , 1 , -1)** y el plano $\pi \equiv$ **2x + y - z = 0**.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto **Q**, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. (1,25 puntos)
a) Hallamos un plano β perpendicular a la recta r, que tendrá como vector director el de dicha recta, que pasara por el punto A; dicho vector es perpendicular al vector AG siendo G el punto genérico del plano que se busca y su producto escalar nulo y la ecuación buscada.
Hallaremos el punto de corte **R** del plano hallado con la recta r, el módulo del vector **AQ** es la distancia pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\beta} = \overrightarrow{v_r} = (3,1,\ 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,\ y,\ z) - (3,1,\ -1) = (x-3\ ,\ y-1,\ z+1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \perp \overrightarrow{AG} \rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \rightarrow$$

$$(x-3\ ,\ y-1,\ z+1) \cdot (3,1,\ 2) = 0 \rightarrow 3x-9+y-1+2z+4 = 0 \rightarrow \beta \equiv 3x+y+2z-6 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \rightarrow 3+9\lambda+\lambda-2+4\lambda-6 = 0 \rightarrow -5+14\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{14} \rightarrow R \begin{cases} x = 1+3\cdot\frac{5}{14} \\ y = \frac{5}{14} \\ z = -1+2\cdot\frac{5}{14} \end{cases} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{AR} = \left(\frac{29}{14}, \frac{5}{14}, -\frac{4}{14}\right) - (3\ ,1,\ -1) = \left(-\frac{13}{14}, -\frac{9}{14}, \frac{10}{14}\right) \rightarrow d(r\ ,\pi) = \left|\overrightarrow{AR}\right| = \sqrt{\left(-\frac{13}{14}\right)^2 + \left(-\frac{9}{14}\right)^2 + \left(\frac{10}{14}\right)^2}$$

$$d(r\ ,\pi) = \sqrt{\frac{169+81+100}{196}} = \frac{\sqrt{350}}{14} = \frac{5\sqrt{14}}{14} u$$

b) El plano π' paralelo a π es de la forma **2x + y – z + D = 0** sabiendo que pasa por **P**; una vez hallado calcularemos el punto de intersección **Q,** que nos permite calcular la ecuación de la recta **s**.

$$2.3+1-(-1)+D = 0 \rightarrow 8+D = 0 \rightarrow D = -8 \rightarrow \pi' \equiv 2x+y-z-8 = 0 \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \rightarrow$$

$$2+6\lambda+\lambda+1-2\lambda-8 = 0 \rightarrow 5\lambda-5 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow Q \begin{cases} x = 1+3\cdot 1 \\ y = 1 \\ z = -1+2\cdot 1 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (4\ ,1,\ 1) - (3\ ,1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1,0,\ 2) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3+\mu \\ y = 1 \\ z = -1+2\mu \end{cases}$$

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores. (0,75 puntos)
a2) Se active solo uno de los sensores. (0,5 puntos)

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal N(10 , 2). Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas. (0,75 puntos)
b2) En menos de siete horas. (0,5 puntos)

a)
Sean A y B los sucesos "primer sensor" y "segundo sensor", con p(A) = 0'98, p(B) = 0'96 y que $p(A \cap B)$ = {al ser independientes} $p(A) \cdot p(B) = (0'98) \cdot (0'96) = 0'9408$.
a1)
Se active al menos uno de los dos sensores.
Me piden **p(se active al menos un sensor) = $\mathbf{p(A \cup B)}$** $= p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'98 + 0'96 - 0'9408 =$
$= 0'9992$.
a2)
Se active solo uno de los sensores.

Me piden **p(A y no B ó no A y B) = $\mathbf{p(A \cap B^C) + p(A^C \cap B)}$** =
= $p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) = 0'98 - 0'9408 + 0'96 - 0'9408$ **= 0'0584.**
b)
Se trata de una distribución normal N(10, 2). Calculemos las probabilidades pedidas:

b1)
Entre 6,5 y 13 horas.

Me piden **$\mathbf{p(6'5 \le X \le 13)}$ =** $p\left(\frac{6'5 - 10}{2} \le Z \le \frac{13 - 10}{2}\right) = p(-1'75 < Z \le 1'5) =$
$= p(Z \le 1'5) - p(Z \le -1'75) = p(Z \le 1'5) - [1 - p(Z \le 1'75)] = 0'9332 + 0'9599 - 1$ **= 0'8931 = 89'31 %.**
b2)
En menos de siete horas.
Me piden **$\mathbf{p(X \le 7)}$ =** $p\left(Z \le \frac{7 - 10}{2}\right) = p(Z \le -1'5) = 1 - p(Z \le 1'5) = 1 - 0'9332$ **= 0'0668 = 6'68 %.**