Análisis

1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f*. *(2 puntos)*
   b) Calcule sus asíntotas. *(1 punto)*
   c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$. *(2 puntos)*

2) El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por al función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \leq t \leq 8$. ¿Cuál será el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza? *(1.5 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = x^3+3x^2$.

   a) Halle su punto de inflexión *(1 punto)*
   b) Dibuje la gráfica de la función estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos *(2,5 puntos)*

Soluciones

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f. *(2 puntos)*

Continuidad

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con $y=2^x$, que es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, por ser exponencial. En particular, en los e este intervalo. Luego f es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y=\dfrac{2}{x}$, que es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, porque 0 anula el denominador. Como $0\notin(1,+\infty)$, f es continua en todos los puntos del intervalo.
- x = 1: En primer lugar, $\exists f(1)=\dfrac{2}{1}=2$. Además:

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2^x=2;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x}=2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$$

  Luego es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad

Usando las reglas de derivación en intervalos abiertos:

$f'(x)=\begin{cases} 2^x L2 & \text{si } x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$ de donde $f'(1^-)=2^1L2=2\,L2$; $f'(1^+)=-2$. Como no coinciden, f no es derivable en $x=1$.

b) Calcule sus asíntotas. *(1 punto)*

Asíntotas verticales. Sólo puede tenerlas en los puntos de discontinuidad. Como vimos antes que es continua en todo $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales. La función tiene diferente definición en $-\infty$ que en $+\infty$. Distinguimos, entonces, a la hora de calcular el límite:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2^x=\left(2^{-\infty}\right)=\left(\frac{1}{2^{+\infty}}\right)=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0 \;\Rightarrow\; y=0 \text{ es asíntota}$$

horizontal por el lado de $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\left(\frac{2}{+\infty}\right)=0 \;\Rightarrow\; y=0 \text{ es asíntota horizontal, también,}$$

por el lado de $+\infty$

Asíntotas oblicuas. Al tener asíntota horizontal tanto al acercarnos a $-\infty$ como a $+\infty$, no tiene asíntotas oblicuas (al calcularlas, se obtendría, de nuevo, la asíntota horizontal).

c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$. *(2 puntos)*

De los dos intervalos donde nos definen f de forma distinta, $x = 2$ pertenece a $[1, +\infty)$, donde $f(x) = \dfrac{2}{x}$. Nos limitamos a esta fórmula de f, pues.

Cuando $x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow$ El punto de tangencia es $(2, 1)$.

La pendiente de la recta tangente será $f'(2)$, según la interpretación geométrica de la derivada. Como $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Luego la recta tangente será, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

2) El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por al función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \le t \le 8$. ¿Cuál será el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza? *(1.5 puntos)*

Usamos el método general.

- Extremos del intervalo de definición: $t=1$ y $t=8$.
  $f(1) = -4\cdot1^2+60\cdot1-15 = -4+60-15 = 60-19 = 41$
  $f(8) = -4\cdot8^2+60\cdot8-15 = -256+480-15 = 480-271 = 209$
- Discontinuidades de f: No tiene, porque es polinómica.
- Discontinuidades de f': Tampoco, por la misma razón, puesto que $f'(t) = -8t+60$
- $f'(t) = 0 \Rightarrow -8t+60 = 0 \Rightarrow 60 = 8t \Rightarrow t = 7{,}5$
  $f(7{,}5) = -4\cdot7{,}5^2+60\cdot7{,}5-15 = 210$

Por tanto, el máximo absoluto vale 210 y se alcanza para $t=7{,}5$. O sea, que el valor máximo de las existencias es 210 miles de euros y se alcanza en el instante $t=7{,}5$ años.

3) Sea la función $f(x) = x^3+3x^2$.

a) Halle su punto de inflexión *(1 punto)*

Tenemos dos posibilidades: Estudiar la curvatura completa, o usar el criterio de que si $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$, en $(x, f(x))$ hay un punto de inflexión. Ésta segunda forma es más corta y contesta lo que se pide, si bien la primera forma nos puede ser útil para el apartado siguiente. De todas formas, hay poca diferencia entre ambas. Responderemos de la segunda forma.

$f'(x) = 3x^2+6x \Rightarrow f''(x) = 6x+6 \Rightarrow$ Se anula la segunda derivada cuando $6x+6 = 0 \Rightarrow x = -1$

Como $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(-1) = 6 \neq 0$, por lo que en $x = -1$ hay un punto de inflexión, cuyas coordenadas son, puesto que $f(-1) = 2$: $(-1, 2)$

Si hubiésemos empleado la primera forma, tendríamos:

- Discontinuidades de f ó f'': No hay, porque ambas son polinómicas
- $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x+6 = 0 \Rightarrow x = -1$

Al dividir $\mathbb{R}$ en intervalos mediante el único punto obtenido, resulta:

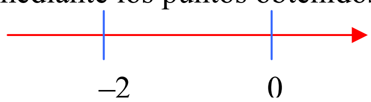
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Por lo que el punto de inflexión es el obtenido antes: $(-1, 2)$

b) Dibuje la gráfica de la función estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos *(2,5 puntos)*

- Discontinuidades de f ó f': No hay, porque ambas son polinómicas
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2+6x = 0 \Rightarrow x(3x+6) = 0 \Rightarrow$ Como un producto vale 0 sólo si alguno de los factores se anula: $\begin{cases} x = 0 \\ o \\ 3x+6=0 \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos:



Obteniendo:

	(–∞, –2)	–2	(–2, 0)	0	(0, +∞)
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	Mín	↗

Como $f(-2) = 4 \Rightarrow (-2, 4)$ Máximo relativo (antes es creciente, después, decrec.)
Y $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es mínimo relativo (antes, decreciente; después, creciente)

Teniendo en cuenta que, al ser una función polinómica, su dominio es todo R, y no tiene asíntotas, según lo visto, su gráfica es: