

Análisis

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + L(2x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 1$. (2 puntos)

2) Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ (5 puntos)

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) Represente gráficamente esta función

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de f (3 puntos)

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + L(2x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos $x=1$. La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de f , será, por tanto: $f(1) = 1 + L(2 - 1) = 1 + L = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$ El punto es $(1, 1)$

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada: $f'(x) = 0 + \frac{2}{2x-1} =$

$\frac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$ será la pendiente, puesto que $x = 1$ es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será: $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

2) Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

1. Dominio. $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}}$ porque -2 anula el denominador

2. Intersecciones con los ejes. OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow 0 = x+1 \Rightarrow -1 = x$,

que es una solución válida, porque no anula el denominador de la ecuación inicial $\Rightarrow \boxed{(-1, 0)}$

OY: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\left(0, \frac{1}{2}\right)}$

3. Asíntotas. Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ es A. Hor.}}$

Verticales: Sólo podría tenerlas en $x = -2$, que es el único punto de discontinuidad.

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \left(\frac{-1}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = -2 \text{ es A. Vert.}}$

Oblicua: No puede tenerla, puesto que posee asíntota horizontal (saldría ésta, de nuevo, si intentásemos calcularla).

4. Monotonía. $f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$

Dividimos el $D(f)$ en intervalos mediante:

a) Discontinuidades de f : $x = -2$

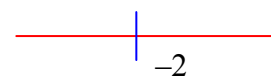
b) Discontinuidades de f' : $x = -2$ (si anulamos el denominador de f' queda $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$)

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$, que no es posible

para ningún valor de x .

La división en intervalos la hacemos con ayuda del gráfico:

Resulta el siguiente cuadro:



	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	\nexists	$+$
f	\nearrow	\nexists	\nearrow

A la vista de este resultado, concluimos que no existen extremos relativos.

5. Curvatura. No nos la piden, pero la vamos a calcular (en general, en un examen real no debe contestarse a lo que no se pregunte, si bien en este caso lo que hacemos es completar la información disponible para dibujar la gráfica). Comenzamos por calcular la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

- a) Discontinuidades de f : $x = -2$
- b) Discontinuidades de f'' : $x = -2$
- c) $f''(x) = 0 \Rightarrow -2 = 0$ que no es posible.

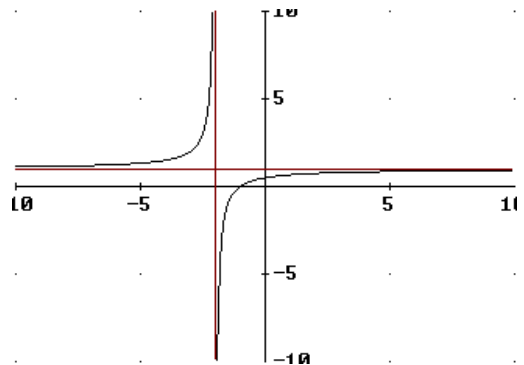
La división en intervalos es la misma que antes, por lo que resulta:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f''	+	\exists	-
f	\cup	\exists	\cap

No tiene puntos de inflexión: sería, en todo caso, $x = -2$, pero resulta que no es un punto del dominio.

d) Represente gráficamente esta función

Combinando los resultados anteriores, se obtiene la gráfica adjunta.



3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de f

Continuidad.

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con $y = 2^x$. Las exponenciales son continuas en todo $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y = 2/x$, cuya única discontinuidad está en $x = 0$, que no pertenece al intervalo $\Rightarrow f$ es continua, también, en todo el intervalo.
- $x = 1$: Los puntos que separan distintas zonas de definición de las funciones definidas a trozos siempre se estudian por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 \quad f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f$ es continua en $x = 1$

Por tanto, f es continua en todo \mathbb{R} , por lo que puede ser derivable

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{porque podemos derivar directamente en intervalos abiertos.}$$

Para el punto que separa las zonas de definición, vemos los límites laterales de esta función:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \ln 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

Como no coinciden, no puede ser derivable la función f en $x = 1$.