Análisis

1) La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión $f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2}$ ¿en qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura? *(3 puntos)*

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \mathrm{L}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   a) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x = -1$ *(1 punto)*
   b) Represente gráficamente la función anterior si $a = 3$ *(2 puntos)*
   c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ para la función obtenida en el apartado anterior. *(1 punto)*

3) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3 *(2 puntos)*
   b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(-1, 2)$ *(1 punto)*

Soluciones

1) La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión $f(t)=\frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}$ ¿en qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

Al tratarse de una parábola abierta hacia abajo, con máximo (puesto que el coeficiente de t^2 es negativo), dicho máximo será el vértice, y es lícito limitarse a calcularlo:

Eje: $t=\frac{-b}{2a} \Rightarrow t=\frac{-\frac{5}{2}}{2\frac{-1}{2}} \Rightarrow t=\frac{-\frac{5}{2}}{-1} \Rightarrow t=\frac{5}{2}$

Vértice: $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\frac{5}{2}}{2}-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}=\frac{25}{4}-\frac{\frac{25}{4}}{2}=\frac{25}{4}-\frac{25}{8}=\frac{50}{8}-\frac{25}{8}=\frac{25}{8}$

Es decir, el máximo absoluto se alcanza para t=5/2 y vale 25/8, que es la altura máxima alcanzada.

Por el procedimiento general de cálculo de extremos absolutos, tendremos que comparar las imágenes o límites en los siguientes puntos:

a) Extremos del intervalo de definición: Suponemos que el tiempo $t\in[0,+\infty)$.

$f(0)=\frac{5\cdot 0}{2}-\frac{0^2}{2}=0$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}=-\infty$ (el orden del ∞ producido por el término de segundo grado, es mayor que el del primer sumando)

b) Discontinuidades de f ó de f ’: No hay (son polinómicas ambas)

c) Puntos que anulan la primera derivada: $f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}-t=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\frac{5}{2}}{2}-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}=\frac{25}{8}$ (se calculó antes)

La máxima imagen es 25/8, obtenida para t=5/2, y la mínima (límite en este caso), $-\infty$. Por tanto, no tiene mínimo absoluto (la función baja hasta el $-\infty$) y el máximo absoluto es de 25/8, altura máxima conseguida para t=5/2.

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x\le -1 \\ -x^2+2 & \text{si } -1<x\le 1 \\ \mathrm{L}x & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Calcule el valor de “a” para que f sea continua en $x = -1$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(2x+a)=-2+a$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(-x^2+2)=-(-1)^2+2=-1+2=1$

Por tanto, el límite completo existirá si los dos laterales, que hemos visto que existen, coinciden. Eso sucederá cuando: $-2+a=1 \Leftrightarrow a=3$. Para este valor:

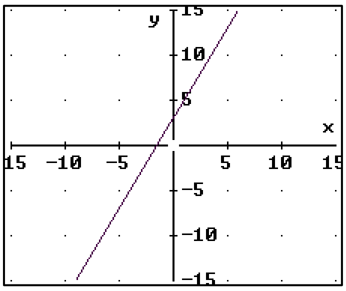
$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$, y

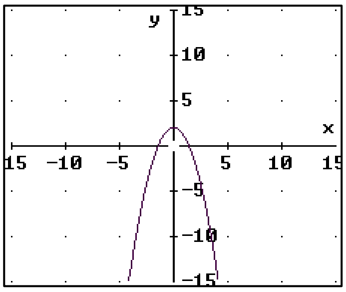
$f(-1) = 2(-1)+3 = -2+3 = 1$

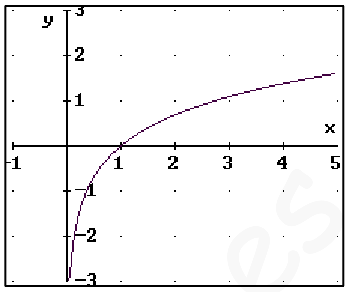
Por tanto, la función será continua.

b) Representa gráficamente la función anterior si $a = 3$

$y = 2x+3$ es una recta: $y = -x^2+2$ es una parábola: $y = \mathrm{L}x$ es conocida:

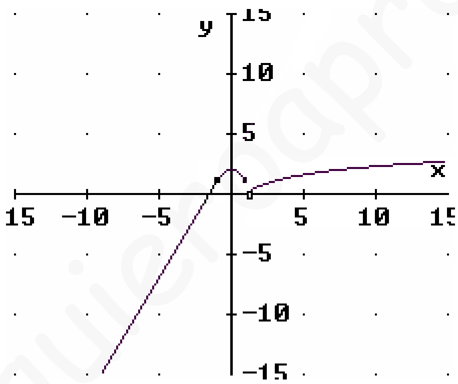






El dibujo de la recta es, simplemente, una tabla de valores. El de la parábola, pasa por calcular su eje x=0, su vértice (0, 2), y sus cortes con OX ($-\sqrt{2}$,0), ($\sqrt{2}$,0). y=Lx es conocida, y pasa por (1, 0) y (e, 1) (e=2,7182818284…).

Limitamos cada una de esas tres funciones a las zonas en las que f coincide con ellas y resulta:



c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ para la función obtenida en el apartado anterior.

En x=1 la función no es continua, como se aprecia en el dibujo. Pero las conclusiones de cálculo a partir de gráficos deben evitarse, por lo que nos aseguramos de ello comprobándolo analíticamente.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x^2+2) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \mathrm{L}x = 0$

Es decir, hay una discontinuidad de salto finito (primera especie). Pues bien, al no ser continua, no puede ser derivable en x=1.

En $x = -1$ si es continua (se comprobó antes). Puede ser, por tanto, derivable. Lo comprobamos por la definición de derivada:

- $$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$
- $$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2-1)}{x+1} =$$
  $$\lim_{x\to -1^+} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} -(x-1) = 2$$

Ha sido necesario calcular la derivada por la derecha y por la izquierda, dado que la definición de f es diferente a un lado y otro de –1. Como ambos límites coinciden, existe el límite completo, que es la derivada en –1: $f'(-1)=2$.

Observaciones: Cuando tenemos una función definida a trozos, podemos derivar las funciones que la componen directamente, usando las reglas de derivación, y restringir la validez de los resultados a intervalos abiertos (las fórmulas de las tablas de derivadas son válidas en intervalos abiertos). La derivada de los puntos que separan unas zonas de otras debe ser calculada por separado, aplicando la definición. Eso es lo que hemos hecho aquí.

Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones, la derivada de los puntos que separan unas zonas de definición de otras coincide con el límite de la función derivada en dichos puntos, si existe. De modo que, si nos vemos apurados en un examen, podemos estudiar la continuidad de la función derivada para decidir si existe la derivada en esos puntos.

Pero el método no es fiable y se recomienda emplear la definición de derivada, como se ha hecho aquí. Por ejemplo, la función $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ tiene como derivada $f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$. Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, parece que debe existir $f'(0)=1$. Pero no es así, porque f no es derivable en 0, ya que no es continua. También puede comprobarse calculando dicha derivada aplicando la definición.

Otro ejemplo, si bien es de un nivel superior al de este curso, sería el de la función $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$, cuya derivada puede comprobarse que resulta $g'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\leq 0 \\ 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ Luego g es derivable, incluyendo la derivada de 0, que se calcula aplicando la definición de derivada. Pero la función derivada g' no es continua en $x=0$ porque $\nexists \lim_{x\to 0^+} g'(x)$.

En caso de haber discontinuidad de salto finito para f' en uno de esos puntos de separación, entonces puede afirmarse que la función no será derivable en dicho punto. Esto se ha empleado en este documento en la resolución del apartado b (estudio de la monotonía) del problema 2 del examen del 11 de marzo de 2.002.

3) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3

Para calcular la ecuación de la recta tangente a una curva, necesitamos un punto de dicha recta y su pendiente.

El punto será donde la recta toque a la curva; es decir, es un punto que está sobre la curva. De este punto sólo conoceremos, por lo general, la coordenada x; la segunda coordenada se hallará sustituyendo dicho valor de x en la fórmula de la función.

La pendiente es, según la interpretación geométrica de la derivada, el valor de la derivada en el valor del x del punto de tangencia.

Una vez que tenemos el punto de tangencia $(a, f(a))$ y la pendiente $m=f'(a)$, la recta tangente será, según la ecuación punto-pendiente: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En este problema no nos dan el punto de tangencia, sino la pendiente: 3. La coordenada x de dicho punto será tal que $f'(x)=3$, por la interpretación geométrica de la derivada. Es decir:

$$f'(x)=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1 \text{ ó } x=1$$

Hay dos puntos donde eso ocurre, por lo que el problema tiene dos soluciones.

1ª: $x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=1-1=0 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (1, 0). Como la pendiente es 3, la recta es: $y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$

2ª: $x=-1 \Rightarrow f(x)=f(-1)=-1-1=-2 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (–1, –2). Como la pendiente es 3, la recta es: $y+2=3(x+1) \Rightarrow y=3x+3-2 \Rightarrow \boxed{y=3x+1}$

b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en (–1, 2)

Primeramente, debe pasar por (–1, 2), para que pueda éste ser un punto de inflexión.
Luego $f(-1)=2 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b=2 \Rightarrow a+b=3$

Por otra parte, la x del punto de inflexión verifica que $f''(x)=0$. O sea: $f''(-1)=0 \Rightarrow$

Como $f'(x)=3x^2+2ax$ y $f''(x)=6x+2a$, será: $6(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

Sustituyendo en $a+b=3 \Rightarrow 3+b=3 \Rightarrow \boxed{b=0}$.