

Análisis

- 1) Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B , en millones de pesetas, depende del tiempo t , en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1,5t^2 + 168t - 954$
- Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio? *(3 puntos)*
 - Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo. *(1,5 puntos)*
- 2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$
- Dibuje la gráfica de esta función *(1,5 puntos)*
 - Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos *(4 puntos)*

Soluciones

1) Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B , en millones de pesetas, depende del tiempo t , en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1,5t^2 + 168t - 954$

a) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

El problema es muy simple, puesto que la función es una parábola abierta hacia abajo, es decir, con máximo, ya que el coeficiente de t^2 es negativo. Simplemente hallando las coordenadas del vértice, contestamos el apartado a del problema, y con las intersecciones con OX tendremos el b.

$$\text{Pues bien. La ecuación del eje es: } x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-168}{2(-1,5)} \Leftrightarrow x = 56$$

$$\text{El vértice, por tanto, es: } B(56) = -1,5 \cdot 56^2 + 168 \cdot 56 - 954 = 3750 \Rightarrow (56, 3750)$$

Por tanto, el máximo absoluto se obtiene para $t=56$ minutos, cifrándose en 3.750 millones.

Esta forma de resolución es absolutamente correcta. Con el único objeto de recordarlo, vamos a hacerlo por el método general. Para empezar, vamos a volvernos rigurosos y delimitamos el intervalo de actuación de la función. Éste será desde 0 minutos diarios hasta 24 horas por 60 minutos cada hora igual a 1.440 minutos diarios máximo. Es decir, que $\text{Dom}(B) = [0, 1.440]$. Comparamos, entonces, las imágenes (o límites) en:

a) Extremos del intervalo de definición: $B(0) = -954$; $B(1.440) = -2.869.434$

b) Discontinuidades de B y/o de B' : No tiene (la función es un polinomio)

c) $B'(t)=0 \Leftrightarrow -3t+168=0 \Leftrightarrow 3t=168 \Leftrightarrow t=56$. Imagen: $B(56)=3.750$

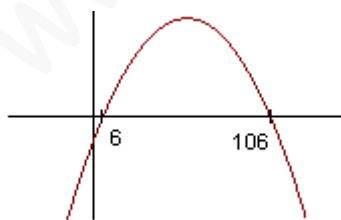
Por tanto, el mínimo absoluto (que no nos lo piden) se alcanza para $t=1.440$ y su valor es de $-2.869.434$ (mínima imagen/límite de entre los puntos estudiados), y el máximo absoluto está en $t=56$ y vale 3.750 (máxima imagen/límite entre los puntos estudiados). La respuesta es la que obtuvimos antes, evidentemente.

b) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo.

Responder a esta cuestión consiste en interpretar la gráfica. Para completarla, necesitamos las intersecciones con OX:

$B(t)=0 \Leftrightarrow -1,5t^2 + 168t - 954 = 0 \Leftrightarrow$ (multiplicamos los dos miembros por -2 para eliminar decimales y hacer que el coeficiente de la máxima potencia sea positivo):

$$3t^2 - 336t + 1908 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{336 \pm \sqrt{112896 - 22896}}{6} = \frac{336 \pm 300}{6} = \begin{cases} = 106 \\ = 6 \end{cases}$$



La gráfica es, consiguientemente, la adjunta. A la vista de ella, se concluye que los valores de t que hacen que la y (el beneficio) sea mayor que 0 estrictamente son:

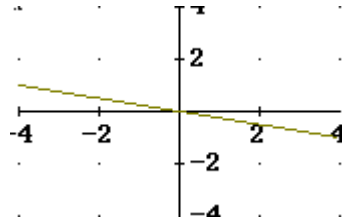
$$t \in (6, 106)$$

Es decir, hay beneficio positivo con más de 6 minutos de publicidad y menos de 106 diarios.

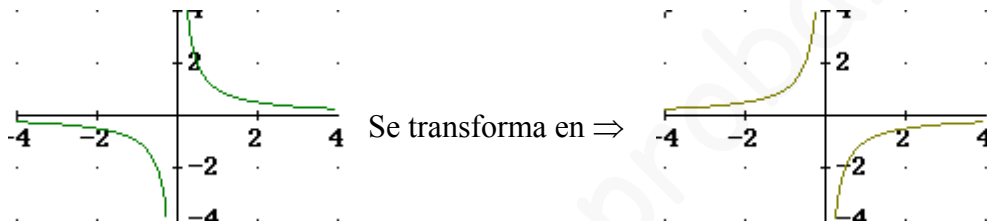
2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$

a) Dibuje la gráfica de esta función

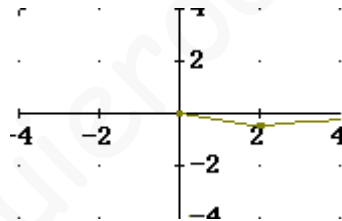
En $[0, 2]$ la función es un trozo de la recta $y = -\frac{x}{4}$:



En $(2, +\infty)$ es la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ cambiada de signo:



Luego la gráfica es:



b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos

Continuidad

- $[0, 2)$: $f(x) = -\frac{1}{4}x$ que no tiene discontinuidades (es polinómica) \Rightarrow Continua en todo el intervalo.
- $(2, +\infty)$: $f(x) = -\frac{1}{x}$, continua salvo en $x=0$, que anula el denominador, pero que no pertenece a $(2, +\infty)$ \Rightarrow Continua en todo el intervalo.
- $\underline{x=2}$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{x}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{1}{2} = f(2) \Rightarrow$ Es continua.

Luego es continua en todo $[0, +\infty)$

Asíntotas

No tiene asíntotas verticales, porque no hay discontinuidades. Por el lado de la recta, no tiene asíntotas. Por el lado de la hipérbola, calculamos asíntotas horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow y=0$ es asíntota horizontal por el lado del $+\infty$. Por tanto, no tiene oblicua.

Monotonía y extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 2 < x \end{cases} \quad \text{y } \nexists f'(2) \text{ porque } f'(2^-) \neq f'(2^+)$$

- Discontinuidades de f : No tiene
- Discontinuidades de f' : $x=2$
- Puntos que anulan f' : No hay, porque $-\frac{1}{4}=0$ no es posible y $\frac{1}{x^2}=0$ requiere que $1=0$, luego tampoco es posible.

Por tanto:

	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$-$	\nexists	$+$
f	\searrow	$-1/2$	\nearrow

Luego tiene un mínimo relativo en $(2, -1/2)$, ya que antes es decreciente y luego creciente, y la función tiene imagen para $x=2$.