Análisis

1) Hallar el dominio de $y = \sqrt{-3x^2 + 4x - 1}$ *(2 puntos)*
2) Decir si la siguiente función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:

$$y = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1}$$ *(2 puntos)*

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-2}$. *(2 puntos)*
4) Calcular: *(4 puntos)*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{4x^3 - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 3}{x - 1} - \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} \right)$

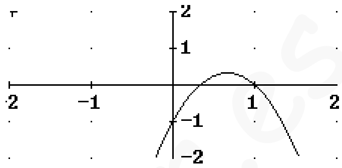
c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{4x - 2}$

Soluciones

1) Hallar el dominio de $y=\sqrt{-3x^2+4x-1}$

Los polinomios dan resultado para cualquier valor de x. Pero las raíces cuadradas exigen que el radicando sea mayor o igual que 0. Luego $x \in D(f) \Leftrightarrow -3x^2+4x-1 \geq 0$. Para resolver esta inecuación, dibujamos la parábola $y=-3x^2+4x-1$. Como el coeficiente de x^2 es negativo (–3), se abre hacia abajo, con un máximo. Corta al eje OX en: $-3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow$ $x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-6}=\frac{-4\pm 2}{-6}=\begin{cases} =1 \\ =\frac{1}{3} \end{cases}$. Su gráfica será:



Luego los valores de x que hacen que la y sea positiva, que son la solución de la inecuación (porque hemos llamado y a $-3x^2+4x-1$, y la inecuación es $-3x^2+4x-1 \geq 0$) y, por tanto, el dominio, son: $D(f)=[\frac{1}{3},1]$

2) Decir si la siguiente función es par, impar o ninguna de las dos cosas:

$$y=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}$$

$f(x)=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1} \Rightarrow f(-x)=\frac{2(-x)^4-3(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow$ Es par

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x)=\frac{4x-1}{2x-2}$.

La única operación que presenta restricciones en el cálculo de la imagen, de entre las que aparecen en f, es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, no pertenecen al dominio los valores de x que anulen el denominador, esto es: $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. Es decir: $D(f)=\mathrm{R}-\{1\}$

Intersección con OX: $y=0 \Rightarrow 0=\frac{4x-1}{2x-2} \Rightarrow 0=4x-1 \Rightarrow 1=4x \Rightarrow x=\frac{1}{4}$ (observar que es solución, porque no anula el denominador; además, los puntos que anulan el denominador estaban excluidos del dominio) $\Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$ son las coordenadas de la intersección.

Intersección con OY: $x=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

4) Calcular:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{4x^3-2}=+\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}-\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)=$ (en principio, produce la indeterminación $\infty-\infty$) $=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^3+x^2-3x-3)-(x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en x=2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -5 & -4 & 4\\ 2 & & 6 & 2 & -4\\ \hline & 3 & 1 & -2 & 0\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4\\ 2 & & 4 & -4\\ \hline & 1 & -2 & 0\end{array}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(3x^2+x-2)}{(x-2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-2}{x-2}=$ $\dfrac{12+2-2}{2-2}=\infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es $+\infty$ y cuando $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2}=$ (en el ∞, equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$