EXAMEN RESUELTO DE INECUACIONES

1. $2x^3 - x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Solución:

- Descomponemos factorialmente el polinomio $2x^3 - x^2 - 2x + 1$, usando Ruffini. Probamos con ± 1.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & -2 & 1 \\
1 & & 2 & 1 & -1 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & & -2 & 1 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 0 &
\end{array} \Rightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)$$

Así que la inecuación se puede escribir de un modo más conveniente para su resolución como sigue:

$(x-1)(x+1)(2x-1) \leq 0$

- Ahora discutimos el signo de cada factor para cada una de las cuatro regiones que determinan las raíces de $(x-1)(x+1)(2x-1) = 0$, que son $x = -1$, $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$

Zona 1: los valores menores que -1; **zona 2**: los valores comprendidos entre -1 y $\frac{1}{2}$; **zona 3**: los valores comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y 1; **zona 4:** los valores mayores que 1.

Veamos en cuáles de estas 4 zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y $\frac{1}{2}$	zona 3 Entre $\frac{1}{2}$ y 1	zona 4 Entre 1 y ∞
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(2x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)(2x-1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

La inecuación se satisface para las zonas 1 y 4. Podemos comprobar que los puntos -1, 1 y $\frac{1}{2}$ verifican también la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en los tres casos $0 = 0$.

Conclusión:

La solución de $(x-1)(x+1)(2x-1) \leq 0$ es: $\boxed{x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{2x-2}{5} + \frac{5-2x}{3} < 1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{2x-3}{4} > \frac{3}{4} \end{array}\right\}$

Solución:

- Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\dfrac{2x-2}{5}+\dfrac{5-2x}{3}<1 \Rightarrow 6x-6+25-10x<15 \Rightarrow -4x<-4 \Rightarrow 4x>4 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in(1,\infty)$

a.2 $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x-3}{4}>\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4x+8-6x+9>9 \Rightarrow -2x>-8 \Rightarrow 2x<8 \Rightarrow x<4 \Rightarrow x\in(-\infty,4)$

Conclusión:

$x\in(-\infty,4)\cap(1,\infty) \Rightarrow \boxed{x\in(1,4)}$

3. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\leq 0$

Solución:

- Factorizamos el numerador y el denominador para resolver más cómodamente la inecuación:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4}\leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)}\leq 0$$

- Esta inecuación racional se satisface de simultáneamente de dos formas:

a.1 Cuando el numerador es positivo o cero y el denominador negativo:

$$\left.\begin{array}{l}(x+1)(x-1)\geq 0\\(x+2)(x-2)<0\end{array}\right\}$$

- Solución para $(x+1)(x-1)\geq 0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y 1	zona 3 Entre 1 y ∞
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)\cdot(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Los puntos 1 y -1 satisfacen la inecuación. La solución de $(x+1)(x-1)\geq 0$ es $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

- Solución para $(x+2)(x-2)<0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -2	zona 2 Entre -2 y 2	zona 3 Entre 2 y ∞
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)\cdot(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Los puntos 2 y -2 no satisfacen la inecuación. La solución de $(x+2)(x-2)<0$ es $x\in(-2,2)$

- La solución de este primer sistema es la intersección de la solución de ambas ecuaciones:

$x_1\in\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}\cap(-2,2) \Rightarrow x_1\in(-2,1]\cup[1,2)$

a.2 Cuando el numerador es negativo o cero y el denominador positivo.

$$\left.\begin{array}{l}(x+1)(x-1)\leq 0\\(x+2)(x-2)>0\end{array}\right\}$$

- Solución para $(x+1)(x-1)\leq 0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y 1	zona 3 Entre 1 y ∞
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)\cdot(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Los puntos 1 y -1 satisfacen la inecuación. La solución de $(x+1)(x-1)\leq 0$ es $x\in[-1,1]$

- Solución para $(x+2)(x-2)>0$:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -2	zona 2 Entre -2 y 2	zona 3 Entre 2 y ∞
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)\cdot(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Los puntos 2 y -2 no satisfacen la inecuación. La solución de $(x+2)(x-2)>0$ es $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

- La solución de este segundo sistema es la intersección de la solución de ambas ecuaciones:

$$x_2\in\{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\}\cap[-1,1]\Rightarrow x_2\in\varnothing$$

Conclusión final:

La solución de $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\leq 0$ viene dada por la unión de las soluciones de los sistemas que hemos estado discutiendo:

$$x=x_1\cup x_2\Rightarrow\boxed{x\in(-2,1]\cup[1,2)}$$

4. $\left.\begin{array}{l}|1-2x|<4\\ x(1-x)\leq -2\end{array}\right\}$

Solución:

- Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $|1-2x|<4\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1-2x<4\\-(1-2x)<4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x>-\dfrac{3}{2}\\ x<\dfrac{5}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow x_1\in\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$

a.2 $x(1-x)\leq -2\Rightarrow x^2-x-2\geq 0$

- Descomponemos factorialmente el polinomio x^2-x-2 y para ello resolvemos la ecuación $x^2-x-2=0$

$$x^2-x-2=0\Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\end{cases}$$

Entonces, la inecuación se puede escribir también así: $(x-2)\cdot(x+1)\geq 0$

- Ahora discutimos el signo de cada factor para cada una de las tres regiones que determinan los puntos -1 y 2. Serán solución los intervalos que satisfacen la inecuación.

Zona 1: los valores menores que -1 , **zona 2**: los valores comprendidos entre -1 y 2 y **zona 3**: los valores mayores que 2 .

Veamos en cuáles de estas tres zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 Entre $-\infty$ y -1	zona 2 Entre -1 y 2	zona 3 Entre 2 y ∞
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)\cdot(x+1)$	$+$	$-$	$+$

La inecuación se satisface para las zonas 1 y 3. Podemos comprobar también que los puntos -1 y 2 verifican la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en ambos casos $0 \geq 0$. Así que $x_2 \in (-\infty,-1] \cup [2,\infty)$

Conclusión:

La solución final es $x_1 \cap x_2$, es decir $x \in \left(-\frac{3}{5},1\right] \cup \left[2,\frac{5}{2}\right)$

5. $\left.\begin{array}{r} x-y>0 \\ 3x-y<4 \\ x+y>0 \end{array}\right\}$

Solución:

- Se representan gráficamente, en el mismo plano, las ecuaciones $x-y=0$, $3x-y=4$ y $x+y=0$, **prestando especial atención a si los puntos de cada una de las rectas forman parte o no de la solución**. En nuestro caso, los puntos de todas las rectas no forman parte de la solución, ya que en ellas no aparece el signo "=". Esto se representa mediante trazos discontinuos.

Se puede comprobar que sólo la región interior determinada sistema. Ésta región es la solución que buscamos.