8 DERIVADAS

ACTIVIDADES

1 **Dada la función $f(x) = (1 - x)^2$, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto?**

Sol: $f'(1) = 0$

La recta tangente es horizontal.

2 **Averigua el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

Sol: 4

3 **Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

Sol: La pendiente es $\frac{1}{4}$ $\qquad y = \frac{x}{4} + 1$

4 **Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} = 4$$

Sol: (3,3)

5 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

Recta tangente: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

Recta normal: $y - 2 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 10$

6 **Determina, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 1$:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Sol: $f'(1) = -1$

7 **Calcula si, en el punto de abscisa 2, existe la derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: No.

8 **Calcula si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en $x = -1$ y $x = 1$.**

Sol: No.

9 **Determina si la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ es derivable en $x = -1$.**

Sol: No.

10 **Determina si es derivable en $x = 2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: No.

11 **Calcula el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 1/2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -\frac{a}{x} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sol: No tiene solución

12 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - x$, calcula $f'(1)$, $f''(-2)$ y $f'''(2)$.**

Sol: $f'(1) = 5$, $f''(-2) = 6$, $f'''(2) = 0$

13 **Halla las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3 - 2$.**

Sol: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{4)}(x) = 0$, $f^{5)}(x) = 0\ldots$

$f^{n)}(x) = 0$

14 **Calcula la segunda derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} (x - 5)^2 + 7 & \text{si } x \geq 5 \\ -(x - 5)^2 + 7 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Sol:
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 5 \\ -2 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

15 **Determina la función derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Sol:
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

16 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 - \frac{2x}{3} - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{5x^5}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = 3 - x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}$

a) $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{-4}{x^3} - \frac{3}{x^6}$

c) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

17 Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \left(\sqrt{3x} - \dfrac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot (x-1)^2$

a) $f'(x) = \dfrac{5x\sqrt{3x}}{2} - 3\sqrt{3x} - 1$

b) $f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

18 Determina:

a) Para qué valores de x la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$ es paralela a la recta $y = 3$.

b) Los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x - 15y + 3 = 0$.

a) $x = -1, x = 5$

b) $(0, 0)$ y $(4, -92)$

19 Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$, y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene pendiente igual a -1.

Sol: $a = \dfrac{1}{2}$; $b = -2$; $c = \dfrac{3}{2}$

20 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = ax^2 + b$, calcula a y b para que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

Sol: $a = \dfrac{1}{2}$ $\quad b = 1$

21 Calcula para qué valores de a las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$ son perpendiculares entre sí.

Sol: $a = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

22 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2x^2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{(1 - x^3) \cdot (x - 1)}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{6x - 2x\sqrt{x}}{9 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x + 3}{(x-1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{54 - 27\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{(9-x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

23 Averigua las ecuaciones de las rectas, de pendiente $\dfrac{1}{2}$, tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$.

Sol: $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

24 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = (1 + x) \cdot 2^{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

d) $f(x) = \ln(x + e^{-x})$

e) $f(x) = \sqrt{2^{2x+1} + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3xe^{-x}}{\sqrt{e^x}}$

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2^{x+1} \cdot [1 + (1 + x)\ln 2]$

c) $f'(x) = \dfrac{-4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{2^{2x+1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^{2x+1} + 1}}$

f) $f'(x) = \dfrac{-9x + 6}{2e^x\sqrt{e^x}}$

25 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

d) $f(x) = \cos 2x^2$

e) $f(x) = \cos(x^2 - 3x)$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \cos x^2$

g) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x^2$

h) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2}$

i) $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} x^2)^2$

j) $f(x) = \ln \cos e^x$

a) $f'(x) = 2\cos 2x$

b) $f'(x) = \operatorname{sen} 2x$

c) $f'(x) = 2x \cos x^2$

d) $f'(x) = -4x \operatorname{sen} 2x^2$

e) $f'(x) = -(2x - 3)\operatorname{sen}(x^2 - 3x)$

f) $f'(x) = 2x(\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{4x \operatorname{tg} x^2}{\cos^2 x^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

i) $f'(x) = \dfrac{4x \operatorname{arc\,tg} x^2}{1 + x^4}$

j) $f'(x) = -e^x \operatorname{tg} e^x$

26 Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$

b) $f(x) = \sqrt[x]{x - 2}$

c) $f(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^{\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^x (\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{cotg} x)$

b) $f'(x) = \sqrt[x]{x - 2}\left(\dfrac{-\ln(x-2)}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 2x}\right)$

c) $f'(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}} \left(\dfrac{x + \ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}\right)$

d) $f'(x) = 2(\operatorname{tg} x)^{2\operatorname{sen} x}\left(\ln(\operatorname{tg} x)^{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x}\right)$

27 Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

a) $f'(x) = \dfrac{2\cos x}{(1-\text{sen}\, x)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1-\text{sen}\, x}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

28 Halla el punto de la gráfica de $y = x + \ln x$ en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $2x + 6y = 5$.

Sol: $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$

Ejercicios y problemas

Reglas de derivación y función derivada

29 Calcula la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

c) $f(x) = (\text{sen}\, x + 1)^2$

d) $f(x) = x^2 \cdot \text{sen}\, x$

e) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-2}$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

g) $f(x) = 3x\sqrt{x^2-1}$

h) $f(x) = 2^x \ln(x+1)$

i) $f(x) = \dfrac{x\, e^x}{\ln x}$

j) $f(x) = x^2\, 2^x\, e^{2x}$

k) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{tg}\, x}$

l) $f(x) = (\text{tg}^2\, x + 1)\cos x$

a) $f'(x) = (6x+9)(x^2+3x)^2$

b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$

c) $f'(x) = \text{sen}\, 2x + 2\cos x$

d) $f'(x) = 2x\,\text{sen}\, x + x^2 \cdot \cos x$

e) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x - 6}{(x^2-2)^2}$

f) $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{6x^2-3}{\sqrt{x^2-1}}$

h) $f'(x) = 2^x\left(\ln 2 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}\right)$

i) $f'(x) = \dfrac{e^x(\ln x + x\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

j) $f'(x) = 2^x e^{2x}(2x + x^2 \ln 2 + 2x^2)$

k) $f'(x) = -\text{sen}\, x - \cos x - \dfrac{\cos x}{\text{sen}^2\, x}$

l) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}$

30 Calcula la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}\,(\cos x))$

b) $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}\,(\text{sen}^2\, x))$

c) $f(x) = \text{arc sen}\,(\cos x)$

d) $f(x) = \cos\,(\text{arc sen}\, x)$

e) $f(x) = \ln(\text{sen}\, x^2)$

f) $f(x) = \ln\left(1-\sqrt{x}\right)^3$

g) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{\text{tg}^2\, x + 1}}$

h) $f(x) = \text{cotg}^3\,(3x^3)$

i) $f(x) = e^{\text{tg}\, x}$

j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)$

k) $f(x) = 3x + \sqrt{\cos(2x+1)}$

l) $f(x) = x \cdot \text{arc sen}\sqrt{1-x^2}$

m) $f(x) = \ln(\text{sen}\,(\text{arc cos}\, x))$

n) $f(x) = \ln(\text{tg}\,(\text{arc sen}\, x))$

a) $f'(x) = -\cos(\text{sen}\,(\cos x)) \cdot \cos(\cos x) \cdot \text{sen}\, x$

b) $f'(x) = \cos(\text{sen}\,(\text{sen}^2\, x)) \cdot \cos(\text{sen}^2\, x) \cdot \text{sen}\, 2x$

c) $f'(x) = -1$

d) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $f'(x) = 2x\,\text{cotg}\, x^2$

f) $f'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}$

g) $f'(x) = \cos 2x$

h) $f'(x) = \dfrac{-27x^2\,\text{cotg}^2\,(3x^3)}{\text{sen}^2\,(3x^3)}$

i) $f'(x) = \dfrac{e^{\text{tg}\, x}}{\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \text{cotg}\, x - \dfrac{1}{x}$

k) $f'(x) = 3 - \dfrac{\text{sen}\,(2x+1)}{\sqrt{\cos(2x+1)}}$

l) $f'(x) = \text{arc sen}\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $f'(x) = \dfrac{-x}{1-x^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$

31 De las siguientes funciones halla la derivada del orden que se indica:

a) $f(x) = \cos 2x \qquad \Rightarrow f^{4)}(x)$

b) $f(x) = 2^{1/x} \qquad \Rightarrow f'''(x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \qquad \Rightarrow f^{4)}(x)$

d) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \Rightarrow f'''(x)$

e) $f(x) = \dfrac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^x} \qquad \Rightarrow f'''(x)$

f) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \qquad \Rightarrow f''(x)$

a) $f^{4)}(x) = 16\cos 2x$

b) $f'''(x) = -2^{1/x}\left(\dfrac{\ln^3 2}{x^6} + \dfrac{6\ln^2 2}{x^5} - \dfrac{6\ln 2}{x^4}\right)$

c) $f^{4)}(x) = \dfrac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2+1)^5}$

d) $f'''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

e) $f'''(x) = -64\,e^{-4x} + 8\,e^{2x}$

f) $f''(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

32 Averigua la expresión de la derivada *n*–ésima de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = 2^x$

a) $f^{n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot e^{-x}$

b) $f^{n)}(x) = (\ln 2)^n \cdot 2^x$

33 Calcula la función derivada de las funciones indicadas a continuación.

a) $f(x) = (2x+1)^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = (\ln x)^{x^2+1}$

c) $f(x) = x^{x^2}$

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

f) $f(x) = \sqrt[x]{x \cdot \cos x}$

a) $f'(x) = (2x+1)^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}}{2x+1}\right]$

b) $f'(x) = (\ln x)^{x^2+1}\left[2x\ln(\ln x) + \dfrac{x^2+1}{x\ln x}\right]$

c) $f'(x) = x^{x^2}(2x\ln x + x)$

d) $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left[\ln(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right]$

e) $f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2x}{x^2-1}\right]$

f) $f'(x) = \sqrt[x]{x \cdot \cos x}\left[\dfrac{1 - \ln(x\cos x)}{x^2} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right]$

34 Halla y' siendo $y = f(x)$.

a) $x + xy - x^2y^2 = 3$

b) $x^y = y^x$

a) $y' = \dfrac{2xy^2 - y - 1}{x - 2x^2y}$

b) $y' = \dfrac{y\cdot(x\ln y - y)}{x\cdot(y\ln x - x)}$

35 Si $f(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, determina $(f \circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Sol:

$(f\circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f'\left(g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{1/2}}\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(1/2))} = \dfrac{1}{g'(\pi/4)} = 1$

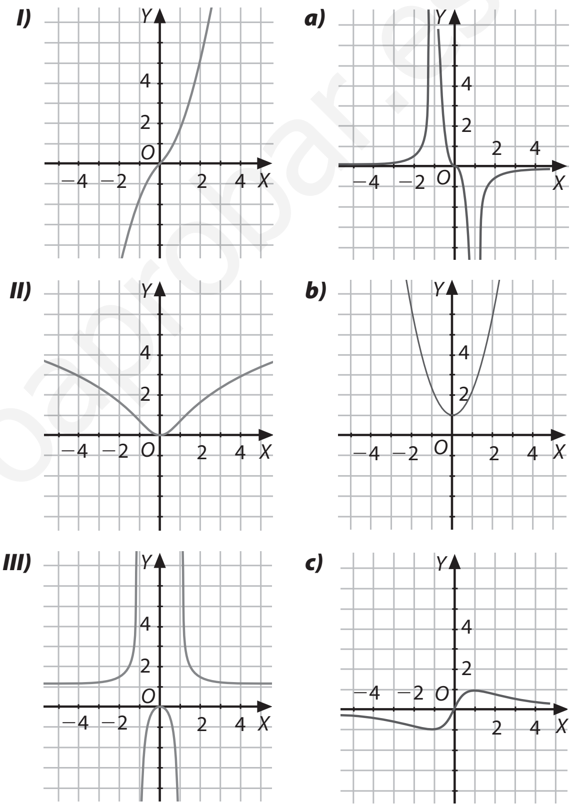
36 Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Sol:

$[f(g(0))]' = 2$

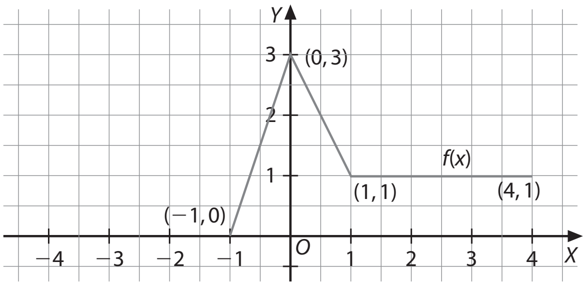
$[g(f(0))]' = 0$

37 Relaciona las gráficas de las dos columnas, de manera que a cada función le asignes su derivada.



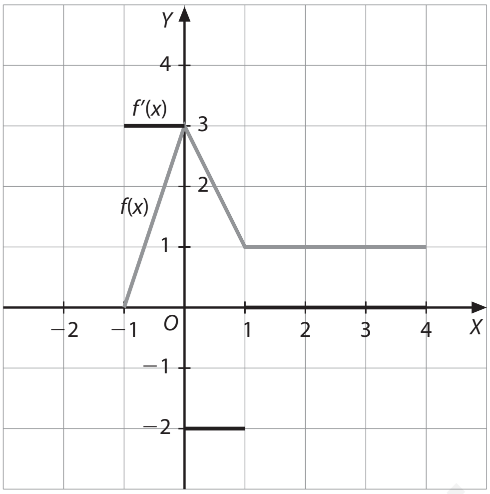
Sol: Las correspondencias son: I, *b;* II, *c;* III, *a*.

38 **La gráfica de una función es la que se muestra en la figura. ¿Cuál es la gráfica de su función derivada? ¿En qué puntos no es continua la derivada?**



Sol: La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases}$$



f' no es continua en $x = 0$ y $x = 1$. Son puntos angulosos de f.

Derivada de una función en un punto

39 **Considera la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$. Determina si hay otros puntos en los cuales la pendiente de la recta tangente sea igual a la obtenida.**

Sol: La pendiente es -1. También es el valor de la pendiente en $x = -2$ y $x = 0$

40 **Aplica la definición de derivada de una función en un punto y calcúlala para las siguientes funciones en los puntos que se indica:**

a) $f(x) = -1 + x$ en $x = -1$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $x = 2$

c) $f(x) = (1 - x)^2 + 1$ en $x = 1$

d) $f(x) = \ln(2x + 1)$ en $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ en $x = 2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ en $x = -1$

g) $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 1$

a) 1

b) 2

c) 0

d) 2

e) $\dfrac{1}{9}$

f) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

g) $\nexists$

41 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1/2\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Sol: $x + 4y - 3 = 0$

42 **Averigua las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $f(x) = \ln(2 - x)$ en $x = 1$.**

Sol: Ecuación de la recta tangente: $y = -x + 1$

Ecuación de la normal: $y = x - 1$

43 **Calcula las ecuaciones de las tangentes a la curva $2x^2 + y^2 = 1$ que pasan por el punto (1, 1).**

Sol: $y = 1$ $\quad y = 4x - 3$

44 **Halla el punto de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y escribe su ecuación.**

Sol: $(\sqrt{\pi}, 0)$ $\quad y = -2\sqrt{\pi}\,x + 2\pi$

45 **Averigua los puntos de la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$, en que la recta tangente es paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.**

Sol: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}\right)$ $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{22}{243}\right)$

46 **¿En qué punto la recta tangente a la función $f(x) = x \cdot e^x$ es paralela al eje de abscisas? Escribe la ecuación de la recta tangente en este punto.**

Sol: El punto de tangencia es: $P(-1, -e^{-1})$.

La recta tangente tiene de ecuación $y = -\dfrac{1}{e}$

47 **Calcula las abscisas de los puntos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en que la tangente es paralela a la secante que corta la curva en $x = 0$ y $x = 1$.**

Sol: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$

48 **Halla el valor de a y b para que la recta tangente a la curva de $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ sea paralela al eje de abscisas.**

Sol: $a = 16$ y $b = -8$

49 **Averigua para que valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$. Escribe la ecuación de esta recta tangente.**

Sol: $x = 1$ $\qquad y = x + \ln 2 - 1$

50 **Dada la parábola $y = x^2$:**

a) **Halla la ecuación de su recta tangente que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.**

b) **Halla las ecuaciones de sus tangentes que pasan por el punto (2, 0).**

a) $y = 4x - 4$

b) $y = 0$
$y = 8x - 16$

51 **Considera la función $f(x) = \dfrac{3-2x}{x}$:**

a) **Halla los puntos de la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.**

b) **Calcula la ecuación de estas rectas tangentes.**

a) Los puntos son $P_1(2, -1/2)$ y $P_2(-2, -7/2)$

b) Las ecuaciones de las rectas son:

$$y = -\frac{3}{4}x + 1 \qquad y = -\frac{3}{4}x - 5$$

52 **Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(3x - 2)$ en $x = 2$, y en qué punto la tangente es perpendicular a la anterior.**

Sol: $\frac{3}{4}$

No existe ningún punto

53 **Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, averigua los puntos en que la recta tangente es perpendicular a la tangente en el punto de abscisa $x = -1$.**

Sol: Los puntos buscados son (0, 0) y (1, ln 3).

54 **Averigua el número de rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ que contienen el punto (0, 1).**

Sol: Solo hay una tangente a f que pase por (0, 1).

55 **Determina en qué punto $a \in (0, \pi)$, la tangente a la curva $f(x) = \ln(\text{sen}\, x)$ es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.**

Sol: $a = \frac{3\pi}{4}$

56 **Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, halla la ecuación de la recta tangente que es paralela a la recta que une los puntos de dicha parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$.**

Sol: $y = 2x + 1$.

57 **Halla los puntos de la parábola $y = -2(x - 2)^2$ cuya recta tangente pasa por el origen de coordenadas. A continuación averigua las ecuaciones de dichas tangentes.**

Sol: $y = 0$.

$y = 16x$.

58 **Dada la función $f(x) = x^3$, averigua si la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa 3 pasa por el punto (1, 5).**

A continuación, encuentra todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 5) y son tangentes a la gráfica en algún punto.

Sol: La tangente no pasa por (1, 5).

Hay una única recta tangente: $y = 3x + 2$

59 **Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.**

a) **Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.**

b) **Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.**

a) $a = \sqrt{m}$

b) $m = 1/4$

60 **Halla la derivada de $f(x) = ax + b + \text{sen}\, x$. Calcula a y b si el punto (0, 0) es un punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente es el eje X.**

Sol: $f'(x) = a + \cos x$

$b = 0$

$a = -1$

Continuidad y derivabilidad

61 **Indica en qué puntos $f(x) = |2x^2 + x - 1|$ no es derivable.**

Sol: En $x = 1/2$ y en $x = -1$

62 **Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x = 0$.**

Sol: En $x = 0$, hay un punto de retroceso.

63 **Razona si son derivables en el cero cada una de las siguientes funciones de variable real.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

a) No es derivable en $x = 0$

b) La derivada no existe en $x = 0$.

64 **Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa, pon un ejemplo ilustrativo.**

a) **Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abscisas.**

b) **Si $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifican $h'(x) = g'(x)$, entonces $h(x) = g(x)$.**

a) Verdadera.

b) Falsa.

65 **Estudia la derivabilidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sol: Es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

66 **Estudia la derivabilidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} E(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{4 - 2x}{x^2 - 9} & \text{si } 2 \leq x \leq \pi \\ \text{sen}\, x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Sol: La función es derivable en $\mathbb{R}$, excepto en los valores enteros $z \leq 3$, y en el valor π.

67 **Sea f la función definida por**

$$\begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

Sol: $f'(0) = 1$

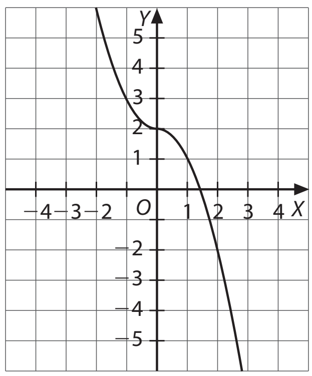
68 **Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - x|x|$.**

a) **Esboza la gráfica de f.**

b) **Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.**

c) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



b) $f'(0) = 0$

c) $y = -4x + 6$

69 **Estudia la derivabilidad de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

Sol: En $x = 1$ y $x = -1$ derivable.

70 **Estudia la derivabilidad de $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

Sol: en $x = 1$ no es derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

71 **Considera esta función: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

¿Existen valores de a con los cuales f sea derivable en toda la recta real? En cualquier caso, razona la respuesta y, si es afirmativa, encuentra dichos valores.

Sol: La función es derivable para todo valor de a.

72 **Se sabe que $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \dfrac{1}{2}x + c & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

a) **Determina el valor de la constante c.**

b) **Calcula la función derivada f'.**

c) **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.**

a) $c = 1$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1/2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

c)

$y = -x + \dfrac{31}{32}$ $\quad y = -x + 5/4$

73 **Determina los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea continua y derivable en $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: $\quad a = \dfrac{7}{2}, b = 4$

74 **Determina el valor del parámetro a para que la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$.

Sol: $\quad f$ no es derivable en $x = 1$ para ningún valor de a.

75 **Averigua el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ a \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sol: $a = 1, \quad b = 0$

76 **Se sabe que la función $f\colon [0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(0, 5)$. Calcula las constante a y b.

Sol: $a = -7/2$ y $b = 1$

77 **Determina b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Sea derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$.**

b) **Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.**

a) $b = 16$ y $c = -20$

b) $y = 3x - 2$

78 **Determina:**

a) **Los valores de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admite recta tangente en el punto $(0, 1)$.

b) **Los valores de las constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2 + d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admita recta tangente en el punto $(0, 1)$.

a) $1 = b$

$-1 = a$

b) No es posible.

79 **Calcula los valores de a y b para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x. Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos.

Sol: $\quad a = 1 \qquad b = -2$

En $x = 0$ la función no es derivable.

En $x = \pi$ la función es derivable.

Ejercicios de aplicación

80 **Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:**

a) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.**

b) **Halla los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado *a)* corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.**

c) **Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.**

a) $y = a^2 - 2ax + 1$

b) $A(0, a^2 + 1)$, $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

c) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

81 **Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por**

$$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

donde *a* es un número real.

a) **Determina *a*.**

b) **Halla la función derivada de *f*.**

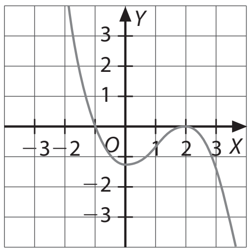
a) $a = 3$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 2$, ni en $x = 3$.

82 **La curva $f(x)$ de la figura tiene por dominio el conjunto de los números reales.**



a) **Determina los puntos en los que la función vale 0 y los valores de *x* para los cuales la función es positiva.**

b) **Calcula en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.**

c) **Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.**

d) **Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$, sabiendo que $f'(x)$ comienza por $-x^2$.**

e) **Determina *a* sabiendo que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.**

a) Vale 0 para $x = -1$ y para $x = 2$ y es positiva para $x < -1$.

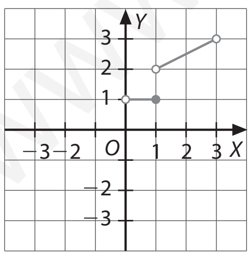
b) Se anula para $x = 0$ y para $x = 2$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 2$.

c) La recta tangente para $x = 2$ es $y = 0$.

d) $y = -3x - 3$

e) $a = -1/3$

83 **En la figura se puede ver parte de la gráfica de una función *f* que está definida en el intervalo $(-3, 3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.**



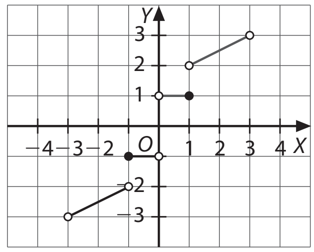
a) **Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.**

b) **Completa la gráfica de *f*.**

c) **Halla $f'(x)$ para los $x \in (-3, 3)$ en los que dicha derivada exista.**

a) No existe $f(0)$.

b)



c)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -3 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

84 **Un globo de radio *r*, que contiene hidrógeno, aumenta su volumen un 5 %. Calcula su variación de área.**

Sol: 3,33 %.

85 **Dadas las curvas $y = x^2 - 1$ y $x^2 + xy - 1 = 0$, averigua sus puntos de intersección y calcula las pendientes de las rectas tangentes en cada uno de ellos. A continuación, halla para cada punto el ángulo que forman dichas tangentes.**

Sol: Puntos de intersección: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

En $(1, 0)$ la pendiente de la tangente es $m = 2$, y en $(-1, 0)$, $m = -2$.

En el punto $(-1, 0)$ el ángulo es cero.

En el punto $(1, 0)$ el ángulo es 53,13°

86 **Halla la ecuación de las tangentes a la curva de ecuación $2x^2 - y^2 + xy = 0$ en los puntos $x = 1$.**

Sol: $y = -x$

$y = 2x$

87 **Calcula los valores de *a* para los que las tangentes a las curvas $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$ en los puntos (a, e^a) y (a, e^{-2a}) sean perpendiculares.**

Sol: $a = \ln 2$

88 **A partir del enunciado anterior, estudia si puede existir algún valor de *a* para que las tangentes en los puntos indicados sean paralelas.**

Sol: No es posible.

89 **Un incendio se extiende en forma circular de manera uniforme. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min.**

a) **Determina el área quemada en función del tiempo *t* transcurrido desde el inicio del incendio.**

b) **Calcula la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio llegue a 45 m.**

a) $A = 3{,}24\pi t^2$ m², donde *t* está expresado en minutos.

b) $v(25) \cong 508{,}94$ m²/min

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso:

90 **Considera la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y la recta $r: 2x + y = 6$.**

Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

a) **(1, 4)**

b) **(4, 1)**

c) **(4, 0)**

Sol: La respuesta correcta es la ***a)***.

91 **Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a y b sabiendo que f es derivable.

a) $a = b = 1$

b) $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = -1$

c) $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = 1$

Sol: La respuesta correcta es la ***c)***.

92 **Calcula el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas de ecuaciones $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$, en los puntos de intersección de dichas curvas.**

a) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. Son perpendiculares las tangentes en ambos puntos.**

b) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 45°.**

c) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 0°.**

Sol: La respuesta correcta es la ***a)***.

1. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \ln\sqrt{\text{sen } x}$

b) $f(x) = \text{sen}(\text{arc cos } x(\text{sen } x))$

c) $f(x) = \ln \text{sen}^2\sqrt{x}$

d) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

e) $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = 1/2 \text{ cotg } x$

b) $f'(x) = -\dfrac{x\text{sen } x(\text{sen } x + x\cos x)}{\sqrt{1 - x^2\text{sen}^2 x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\text{sen}\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}$

2. Halla el valor de *a* y de *b* para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x < 0 \\ b + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sol: $a = 1$, $b = 2$.

3. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} a\text{sen } x + b\cos x & \text{si } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen}^2 x - a\cos x & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Halla los valores de *a* y de *b* para que sea derivable en $\mathbb{R}$.

Sol: $a = 1 \quad b = -1$

4. Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Sol: No existe ni recta tangente, ni recta normal.

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto en el que se anula la segunda derivada.

Sol: $x + ey - 3 = 0$.

6. **Halla el valor de *a* y de *b* para que la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 + b$ su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ sea $y = 5x + 1$.**

Sol: $a = 3 \quad b = 5$.

7. **Una persona camina a una velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente y en línea recta desde la base de una farola cuyo foco se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la altura de la persona es 1,70 m, calcula:**

a) **La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la farola.**

b) **La velocidad de crecimiento de la sombra a los *t* segundos de empezar a andar.**

a) 1,024 m

b) 0,614 m/s